Introduction à l'homologie et à la cohomologie, avec exemples

Thierry MASSON

L.P.T. Bât. 210
Université Paris XI
91405 ORSAY Cedex
thierry.masson@th.u-psud.fr

Version du 8 juillet 2004

Table des matières

Introduction

Ce texte fait suite à une série de cours très informels que j'ai eu le plaisir de donner, en soirées, en juin 1998 aux Houches, à l'occasion de la rencontre *Quantum Field Theory, Perspective and Prospective* organisée par Cécile deWitt-Morette et Jean-Bernard Zuber. Cette version écrite va bien au delà de ce que j'ai pu y exposer alors, mais j'espère en avoir gardé l'esprit en allant à l'essentiel.

Ce texte traite d'un sujet très présent et incontournable aujourd'hui en physique théorique : la cohomologie. Le premier chapitre constitue une série de rappels sur d'une part les variétés différentiables, et d'autre part les algèbres associatives. En effet, l'homologie et la cohomologie tirent leurs origines dans ces deux grands domaines des mathématiques, et de nombreuses constructions et exemples en sont issus. Les définitions élémentaires sont données, et surtout les exemples les plus courants sont exposés et développés, dans le domaine important des espaces topologiques et des variétés différentiables, mais aussi dans les domaines des groupes et algèbres de Lie et des algèbres associatives. Les relations entre la cohomologie des variétés différentiables et les actions de groupes sont abordées dans le troisième chapitre. Les notions très importantes de classes caractéristiques et de cohomologie équivariantes y sont traitées sans entrer profondément dans les détails, car des traités entiers sont consacrés à ces deux sujets particulièrement riches.

J'espère que cette centaine de pages pourra rendre service comme introduction aux ouvrages référencés et commentés dans la bibliographie.

Chapitre 1

Rappels géométriques et algébriques

Dans ce chapitre, sont introduites des définitions générales sur les algèbres associatives et sur les variétés différentiables. Elles serviront pour développer des exemples d'homologies et de cohomologies par la suite. Ce chapitre ne se veut pas une introduction exhaustive à ces deux grands domaines des mathématiques, et nous renvoyons à des ouvrages plus complets pour des compléments.

1.1 Algèbres associatives

1.1.1 Généralités sur les algèbres associatives

Algèbres associatives unitaires

Une **algèbre associative** $\mathscr{A}$ est un *espace vectoriel* muni d'un *produit* distributif par rapport à l'addition

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \times \mathscr{A} &\to \mathscr{A} \\ (a,b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si c'est une algèbre complexe) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ et qui vérifie la formule d'**associativité** $(ab)c = a(bc)$ pour tous $a, b, c \in \mathscr{A}$. Cette algèbre associative est **unitaire** si en plus il existe un élément **unité** $\mathbb{1}$ tel que $\mathbb{1}a = a\mathbb{1} = a$ pour tout $a \in \mathscr{A}$. La dimension d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel ; en particulier, elle peut être infinie.

Une algèbre associative $\mathscr{A}$ est **commutative** si $ab = ba$ pour tous $a, b \in \mathscr{A}$. En général, une algèbre associative $\mathscr{A}$ n'est pas commutative. Il est cependant possible d'extraire de $\mathscr{A}$ une sous-algèbre associative commutative, notée $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$, le **centre de** $\mathscr{A}$, définie par

$$\mathscr{Z}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \,/\, ab = ba \quad \forall b \in \mathscr{A}\}$$

$\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ est donc l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ qui commutent avec tous les autres. Si $\mathscr{A}$ est unitaire, alors $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ l'est aussi car l'élément $\mathbb{1}$ est dans $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres associatives unitaires. Nous dirons qu'une application linéaire $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un **morphisme d'algèbres associatives unitaires**, si, pour tous $a, b \in \mathscr{A}$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ et $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Une **représentation** d'une algèbre associative $\mathscr{A}$ sur un espace vectoriel V est un morphisme d'algèbres associatives $\mathscr{A} \to \mathscr{L}(V)$, où $\mathscr{L}(V)$ est l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel V.

Graduation

Un **espace vectoriel gradué** est un espace vectoriel V qui se décompose en somme directe $V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V^n$ d'espaces vectoriels V^n. Cette graduation peut n'utiliser que les entiers positifs, et, dans ce cas, $V^n = \{0\}$ pour tout $n < 0$. L'espace vectoriel est alors gradué sur $\mathbb{N}$. Un élément $v \in V^n$ sera dit **homogène de degré** n.

Une application linéaire $\varphi : V \to W$ entre deux espaces vectoriels gradués V et W est de **degré homogène** $r \in \mathbb{Z}$ si pour tout $v \in V^n$, $\varphi(v) \in W^{n+r}$. On peut concevoir des applications linéaires de degré strictement négatif même sur des espaces vectoriels gradués sur $\mathbb{N}$. Dans ce cas, $\varphi(a)$ est nul si $n + r < 0$.

Une algèbre associative $\mathscr{A}$ est une **algèbre associative graduée** si l'espace vectoriel sous-jacent est un espace vectoriel gradué, c'est-à-dire

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^n$$

et si cette graduation est compatible avec le produit de l'algèbre au sens où pour tous $a_n \in \mathscr{A}^n$ et $a_m \in \mathscr{A}^m$, $a_n a_m \in \mathscr{A}^{n+m}$. Cette relation s'écrit symboliquement sous la forme

$$\mathscr{A}^n \mathscr{A}^m \subset \mathscr{A}^{n+m}$$

Cette relation implique qu'en particulier, nous avons $\mathscr{A}^0\mathscr{A}^0 \subset \mathscr{A}^0$, donc $\mathscr{A}^0$ est une sous-algèbre de $\mathscr{A}$, qui contient nécessairement l'élément unité de $\mathscr{A}$ si en plus $\mathscr{A}$ est unitaire. Les algèbres rencontrées dans ce qui suit seront en général graduées sur $\mathbb{N}$.

Une algèbre associative unitaire graduée $\mathscr{A}$ sera dite **graduée commutative**, si, pour tous $a_n \in \mathscr{A}^n$ et $a_m \in \mathscr{A}^m$, nous avons

$$a_n a_m = (-1)^{nm} a_m a_n$$

En particulier, $\mathscr{A}^0$ est une algèbre associative unitaire commutative au sens des algèbres ($ab = ba$ pour tous $a, b \in \mathscr{A}^0$).

Si $\mathscr{A}^0 = \mathbb{R}$, nous dirons que l'algèbre graduée $\mathscr{A}$ est **connexe**. Une algèbre graduée (resp. graduée commutative) connexe est dite **libre** s'il existe un ensemble $\{e_\alpha\}$ d'éléments homogènes de $\mathscr{A}^+ = \oplus_{n\geq 1}\mathscr{A}^n$ qui engendrent $\mathscr{A}^+$ (*i.e.* tout élément de $\mathscr{A}^+$ est une combinaison linéaire de produits des e_α) sans relations algébriques (resp. autres que la commutativité graduée).

Une application linéaire $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre deux algèbres graduées est un **morphisme d'algèbres graduées** si c'est un *morphisme d'algèbres associatives* et si pour tout $a \in \mathscr{A}^n$, $\varphi(a) \in \mathscr{B}^n$. C'est en particulier une application linéaire de degré 0 entre les espace vectoriels gradués $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

Involution

Une **involution** sur une algèbre associative unitaire $\mathscr{A}$ (sur $\mathbb{C}$) est une application

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &\to \mathscr{A} \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

telle que $a^{**} = a$ (idempotente) pour tout $a \in \mathscr{A}$ et qui est compatible avec la structure d'algèbre au sens où $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$; $(a+b)^* = a^* + b^*$; $(ab)^* = b^* a^*$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Une algèbre munie d'une involution est une **algèbre involutive**. Si $\mathscr{A}$ est unitaire, alors $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ par unicité de l'unité.

Un élément $a \in \mathscr{A}$ est **hermitien** si $a^* = a$. Tout élément peut s'écrire de façon unique $a = a_1 + ia_2$ où a_1 et a_2 sont hermitiens. Il suffit de poser $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ et $a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. Par exemple, a^*a est hermitien pour tout $a \in \mathscr{A}$, et $\mathbb{1}$ est hermitien. Une involution est dite **non dégénérée** si $a^*a = 0$ implique $a = 0$.

Une application linéaire $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre deux algèbres involutives est un **morphisme d'algèbres involutives** si c'est un *morphisme d'algèbres* et si pour tout $a \in \mathscr{A}$, $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.

Dérivations

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative. Une **dérivation** de $\mathscr{A}$ est une application linéaire $\delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ telle que
$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$
pour tous $a, b \in \mathscr{A}$. Nous noterons $\mathrm{Der}(\mathscr{A})$ l'espace vectoriel des dérivations sur $\mathscr{A}$. Il est facile de vérifier que c'est une algèbre de Lie pour le crochet de Lie défini par
$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$
Si $f \in \mathscr{Z}(\mathscr{A})$ et $\delta \in \mathrm{Der}(\mathscr{A})$, alors l'endomorphisme $f\delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ défini par $(f\delta)(a) = f\delta(a)$ est aussi une dérivation. Ceci fait de $\mathrm{Der}(\mathscr{A})$ un module sur le centre $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$ (voir plus loin la notion de module sur une algèbre). Ce n'est pas un module sur $\mathscr{A}$ tout entier, car la commutativité intervient de façon essentielle pour prouver que $f\delta$ est bien une dérivation. On vérifiera sans peine que si $\mathscr{A}$ est unitaire, alors pour toute dérivation δ, on a $\delta(\mathbb{1}) = 0$.

Nous appellerons **dérivation intérieure** sur $\mathscr{A}$ une dérivation de la forme
$$b \mapsto [a, b] = ab - ba = ad_a(b)$$
pour un $a \in \mathscr{A}$ (il est aisé de vérifier que cette expression définit bien une dérivation, grâce à l'associativité). L'ensemble des dérivations intérieures forme une sous-algèbre de Lie $\mathrm{Int}(\mathscr{A})$ de $\mathrm{Der}(\mathscr{A})$. L'application
$$\begin{aligned} \mathscr{A} &\to \mathrm{Int}(\mathscr{A}) \\ a &\mapsto ad_a \end{aligned}$$
est surjective et a pour noyau le centre $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$. Donc nous avons l'isomorphisme d'espaces vectoriels
$$\mathscr{A} / \mathscr{Z}(\mathscr{A}) \simeq \mathrm{Int}(\mathscr{A})$$
Pour tous $X \in \mathrm{Der}(\mathscr{A})$ et $a \in \mathscr{A}$, nous avons
$$[X, ad_a] = ad_{Xa}$$
c'est à dire
$$[\mathrm{Der}(\mathscr{A}), \mathrm{Int}(\mathscr{A})] \subset \mathrm{Int}(\mathscr{A})$$

$\mathrm{Int}(\mathscr{A})$ est donc un idéal de $\mathrm{Der}(\mathscr{A})$ (au sens des algèbres de Lie), ce qui signifie que $\mathrm{Der}(\mathscr{A})/\mathrm{Int}(\mathscr{A})$ est une algèbre de Lie. On note $\mathrm{Out}(\mathscr{A})$ cette algèbre de Lie, qui représente en quelque sorte les dérivations de $\mathscr{A}$ qui ne sont pas intérieures (d'où le nom « Out »). On remarquera qu'une algèbre commutative n'a pas de dérivations intérieures.

Soit maintenant $\mathscr{A}$ une algèbre graduée. Une application linéaire $\delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ de degré homogène r est une **dérivation graduée de degré** r si pour tous $a_n \in \mathscr{A}^n$ et $b \in \mathscr{A}$,
$$\delta(a_n b) = \delta(a_n)b + (-1)^{nr} a_n \delta(b)$$
Dans ce contexte, une dérivation n'est autre qu'une dérivation graduée de degré homogène pair. On note $\mathrm{Der}_r(\mathscr{A})$ l'espace vectoriel des dérivations graduées de degré r sur $\mathscr{A}$, et
$$\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathscr{A}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Der}_r(\mathscr{A})$$
l'espace vectoriel de toutes les dérivations graduées de $\mathscr{A}$.

On a remarqué que les dérivations d'une algèbre associative formaient une algèbre de Lie. Il existe une propriété équivalente sur les dérivations graduées. Pour cela, il faut introduire un **crochet de Lie gradué** de deux dérivations graduées δ_r et δ_s, de degrés respectifs r et s, en posant
$$[\delta_r, \delta_s]_{\mathrm{gr}} = \delta_r \delta_s - (-1)^{rs} \delta_s \delta_r$$
On peut alors montrer que $[\delta_r, \delta_s]_{\mathrm{gr}}$ est une dérivation graduée de degré $r + s$. Ce crochet gradué vérifie de plus l'**identité de Jacobi graduée** :
$$\left[[\delta_r, \delta_s]_{\mathrm{gr}} \delta_p\right]_{\mathrm{gr}} + (-1)^{(s+p)r} \left[[\delta_s, \delta_p]_{\mathrm{gr}} \delta_r\right]_{\mathrm{gr}} + (-1)^{(s+r)p} \left[[\delta_p, \delta_r]_{\mathrm{gr}} \delta_s\right]_{\mathrm{gr}} = 0$$
Ce crochet donne à l'espace vectoriel $\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathscr{A})$ une structure d'**algèbre de Lie graduée**.

1.1.2 Constructions courantes d'algèbres associatives

Il est possible, à partir d'une ou plusieurs algèbres associatives, d'en construire d'autres. Les deux constructions les plus courantes sont le produit tensoriel et le quotient (exactement comme pour les espaces vectoriels). Il en existe une autre, qui consiste à définir un nouveau produit sur une algèbre donnée en inversant l'ordre des facteurs. Ces constructions sont expliquées dans ce qui suit.

Produit tensoriel d'algèbres

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres associatives unitaires. Nous pouvons donner à l'espace vectoriel $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ une structure d'algèbre associative, en définissant le produit par la formule
$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$
Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont unitaires, alors $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ l'est aussi, et son élément unité est $\mathbb{1}_{\mathscr{A}} \otimes \mathbb{1}_{\mathscr{B}}$.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des algèbres graduées, alors nous pouvons donner à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ une structure d'algèbre graduée. Pour cela, si $a \in \mathscr{A}$, $a_n \in \mathscr{A}^n$, $b \in \mathscr{B}$, et $b_m \in \mathscr{B}^m$, nous posons
$$(a \otimes b_m)(a_n \otimes b) = (-1)^{nm} a a_n \otimes b_m b$$

Dans cette relation, « a_n traverse b_m », d'où le signe $(-1)^{nm}$.

La graduation de cette algèbre est définie par les sous-espaces vectoriels

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^p = \bigoplus_{n+m=p} (\mathscr{A}^n \otimes \mathscr{B}^m)$$

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des algèbres graduées commutatives, alors la définition précédente donne à $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ une structure d'algèbre graduée commutative.

Idéaux

Les objets qui vont être définis ici et les propriétés qui vont être énoncées sont valables pour les algèbres associatives. Cependant, modulo quelques modifications élémentaires, elles peuvent être réécrites pour les algèbres de Lie.

Nous dirons qu'un sous-espace vectoriel $\mathscr{I}$ d'une algèbre associative $\mathscr{A}$ est un **idéal à gauche** si pour tout $a \in \mathscr{A}$ et tout $i \in \mathscr{I}$, nous avons $ai \in \mathscr{I}$, ce que nous écrivons sous la forme $\mathscr{A}\mathscr{I} \subset \mathscr{I}$. Un **idéal à droite** est un sous-espace vectoriel $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ qui vérifie $\mathscr{I}\mathscr{A} \subset \mathscr{I}$. Enfin, un **idéal bilatère** est à la fois un idéal à gauche et à droite de $\mathscr{A}$. En particulier, on remarquera que tout idéal de $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{A}$.

Par exemple, $\{0\}$ et $\mathscr{A}$ sont des idéaux bilatères de $\mathscr{A}$. On les appelle **idéaux impropres** de $\mathscr{A}$. Un **idéal propre** de $\mathscr{A}$ est un idéal qui n'est ni $\{0\}$ ni $\mathscr{A}$. Ce sont bien sûr les idéaux les plus intéressants de $\mathscr{A}$.

Si $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ est un morphisme d'algèbres, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal bilatère de $\mathscr{A}$. On verra dans ce qui suit que tous les idéaux bilatères sont de cette forme.

Une algèbre est dite **simple** si elle ne possède aucun idéal bilatère propre. En particulier, tout morphisme d'une algèbre simple dans une autre algèbre est nécessairement soit trivial ($\operatorname{Ker} = \mathscr{A}$), soit injectif ($\operatorname{Ker} = \{0\}$).

Un idéal à gauche $\mathscr{I}$ est **minimal** (resp. **maximal**) s'il ne contient aucun idéal à gauche qui diffère de $\{0\}$ et $\mathscr{I}$ (resp. s'il n'est contenu dans aucun idéal à gauche différent de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{I}$). On définit de même les idéaux minimaux et maximaux à droite et bilatères.

Si E est un sous-ensemble de $\mathscr{A}$, nous pouvons construire l'idéal bilatère engendré par E : c'est le plus petit idéal bilatère de $\mathscr{A}$ qui contient E. Nous pouvons aussi le voir comme l'ensemble des combinaisons linéaires de tous les produits possibles entre au moins un élément de E et les éléments de $\mathscr{A}$.

Remarque : si on adapte ces définitions aux algèbres de Lie, dans ce cas, les idéaux à gauche et à droite sont tous des idéaux bilatères, par antisymétrie du crochet.

Quotient d'une algèbre

Soit $\mathscr{I}$ un idéal bilatère d'une algèbre $\mathscr{A}$. L'espace vectoriel $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ des classes d'équivalence de la relation $a \sim b \Leftarrow: a - b \in \mathscr{I}$ peut être muni d'un produit qui en fait une algèbre associative : si $[a] = a + \mathscr{I}$ et $[b] = b + \mathscr{I}$ sont des éléments de $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, nous posons

$$\begin{aligned}[a][b] &= [ab] \\ &= ab + a\mathscr{I} + \mathscr{I}b + \mathscr{I}\mathscr{I} \\ &= ab + \mathscr{I}\end{aligned}$$

Compte-tenu des propriétés de $\mathscr{I}$, le produit $[a][b]$ ne dépend que des classes $[a]$ et $[b]$ et non des choix particuliers des représentants a et b. L'algèbre obtenue est **l'algèbre quotient** de $\mathscr{A}$ par l'idéal bilatère $\mathscr{I}$. C'est une algèbre associative.

Si $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathscr{I}$ est la projection canonique $a \mapsto [a]$, alors φ est un morphisme d'algèbres et $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{I}$. Donc tout idéal bilatère est le noyau d'un morphisme d'algèbres. Une algèbre simple n'admet donc pas de quotient non trivial ($\mathscr{A}/\{0\} = \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}/\mathscr{A} = \{0\}$). Si $\mathscr{I}$ est un idéal bilatère maximal de $\mathscr{A}$, alors on peut montrer que $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ est simple. Ceci est dû au fait qu'on ne peut pas trouver d'idéal bilatère coincé entre $\mathscr{I}$ et $\mathscr{A}$.

Voici un exemple très simple de quotient d'algèbre. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire graduée, $\mathscr{A} = \oplus_{n\geq 0}\mathscr{A}^n$. Alors $\mathscr{A}^+ = \bigoplus_{n\geq 1}\mathscr{A}^n$ est un idéal bilatère dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}/\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^0$, qui est bien une algèbre.

Algèbre opposée

A partir d'une algèbre associative $\mathscr{A}$, il est possible de définir une autre algèbre associative, notée $\mathscr{A}^{op}$, appelée **algèbre opposée** . L'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{A}^{op}$ est le même que celui de $\mathscr{A}$, mais le produit est défini par la relation

$$(a, b) \mapsto ba$$

où ba est le produit de $\mathscr{A}$. Il s'agit donc d'inverser l'ordre de la multiplication de $\mathscr{A}$, d'où le nom « opposée ». Dans le cas où l'algèbre est commutative, $\mathscr{A}^{op}$ s'identifie de façon évidente à $\mathscr{A}$.

1.1.3 Modules

La notion de module est intimement liée à celle d'algèbre. Pour tout type d'algèbres (associatives ou de Lie), il est possible de définir une bonne notion de module qui lui est propre. Dans ce qui suit, on se place dans le cadre des algèbres associatives.

Définitions

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire. Un **module à gauche** sur $\mathscr{A}$ est un espace vectoriel $\mathscr{M}$ tel qu'il existe un produit

$$\begin{aligned}\mathscr{A} \times \mathscr{M} &\to \mathscr{M} \\ (a, m) &\mapsto am\end{aligned}$$

distributif par rapport aux additions dans $\mathscr{A}$ et dans $\mathscr{M}$ et compatible avec la structure de $\mathscr{A}$ au sens suivant :

$$\begin{aligned}(ab)m &= a(bm) \\ \mathbb{1}m &= m\end{aligned}$$

On remarquera que dans ce cas, $\mathscr{A}$ se représente sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}$.

Un **module à droite** sur $\mathscr{A}$ est de même un espace vectoriel $\mathscr{M}$ tel qu'il existe un produit

$$\begin{aligned}\mathscr{M} \times \mathscr{A} &\to \mathscr{M} \\ (m, a) &\mapsto ma\end{aligned}$$

ayant les propriétés que l'on devine aisément.

Un **bimodule** $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{A}$ est à la fois un module à gauche et à droite tel que $(am)b = a(mb)$ pour tous $a, b \in \mathscr{A}$ et $m \in \mathscr{M}$ (compatibilité de la structure à droite et de la structure à gauche).

Dans le cas où l'algèbre $\mathscr{A}$ est commutative, on parle souvent de module sur $\mathscr{A}$ pour désigner un bimodule $\mathscr{M}$ qui satisfait en plus à la propriété suivante : pour tous $a \in \mathscr{A}$ et $m \in \mathscr{M}$, on a $am = ma$. Si $\mathscr{A}$ n'est pas commutative, $\mathscr{M}$ est un **bimodule central** si $\mathscr{M}$ est un bimodule et si $am = ma$ pour tous $a \in \mathscr{Z}(\mathscr{A})$ et $m \in \mathscr{M}$. Cette propriété n'est bien sûr pas toujours vérifiée, même si $\mathscr{A}$ est commutative, comme le montre l'exemple de $\mathscr{M} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, qui est un bimodule sur $\mathscr{A}$ mais qui n'est pas central.

Un **module de type fini** sur $\mathscr{A}$ est un module $\mathscr{M}$ qui admet un nombre fini d'éléments $\{e_\alpha\}$ qui l'engendrent sur $\mathscr{A}$, c'est à dire que tout élément $m \in \mathscr{M}$ s'écrit $m = a^\alpha e_\alpha$ où les $a^\alpha \in \mathscr{A}$. Il faut prendre garde au fait que l'écriture de m comme combinaison linéaire sur $\mathscr{A}$ des e_α n'est pas nécessairement unique. Dans un module, contrairement aux espaces vectoriels, il n'existe pas systématiquement de base.

Soit I un ensemble quelconque, et notons $\mathscr{A}^I$ l'espace vectoriel des applications $I \to \mathscr{A}$. C'est un bimodule pour le produit

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \times \mathscr{A}^I \times \mathscr{A} &\to \mathscr{A}^I \\ (a, \varphi, b) &\mapsto a\varphi b \end{aligned}$$

où $(a\varphi b)(i) = a\varphi(i)b$ pour tout $i \in I$.

Soit I un ensemble quelconque comme ci-dessus. Posons

$$\mathscr{A}^{(I)} = \{(e_i)_{i\in I} \ / \ \forall i \in I,\ e_i \in \mathscr{A} \text{ et } \exists J \text{ fini } \subset I,\ e_i = 0 \text{ pour } i \notin J\}$$

$\mathscr{A}^{(I)}$ est donc l'ensemble des $(e_i)_{i\in I}$, $e_i \in \mathscr{A}$, tels qu'un nombre fini seulement des e_i soient non nuls. $\mathscr{A}^{(I)}$ est un bimodule sur $\mathscr{A}$ pour le produit

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \times \mathscr{A}^{(I)} \times \mathscr{A} &\to \mathscr{A}^{(I)} \\ (a, (e_i)_{i\in I}, b) &\mapsto (ae_ib)_{i\in I} \end{aligned}$$

On peut l'identifier à un sous-bimodule de $\mathscr{A}^I$. Lorsque I est un ensemble fini de cardinal n, nous noterons $\mathscr{A}^{(I)} = \mathscr{A}^I = \mathscr{A}^n$. C'est un bimodule de type fini. Nous dirons qu'un bimodule $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{A}$ est un **bimodule libre** si $\mathscr{M}$ est isomorphe à un $\mathscr{A}^{(I)}$ pour un certain ensemble I.

Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux modules de même nature (à gauche, à droite ou bilatères) et soit $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ une application linéaire. Nous dirons que φ est un **morphisme de modules** si φ est linéaire sur $\mathscr{A}$. Un morphisme de modules qui est bijectif est un **isomorphisme de modules**.

Somme directe de modules

Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux modules à gauche sur $\mathscr{A}$. L'espace vectoriel $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ est un module à gauche pour le produit

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \times \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} &\to \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \\ (a, m + n) &\mapsto am + an \end{aligned}$$

C'est le **module somme directe** de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$. Ceci se généralise de façon immédiate pour les modules à droite et les bimodules.

Nous dirons qu'un bimodule $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{A}$ est **projectif** s'il existe un bimodule $\mathscr{N}$ tel que $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ soit un bimodule libre, et **projectif de type fini** s'il existe un bimodule $\mathscr{N}$ tel que $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ soit un bimodule libre de type fini.

Le bimodule $\mathscr{A}^n$ s'identifie à la somme directe (comme somme directe de bimodules) $\mathscr{A} \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}$ (où $\mathscr{A}$ apparaît n fois).

Produit tensoriel sur une algèbre

Soient $\mathscr{M}$ un module à droite et $\mathscr{N}$ un module à gauche sur $\mathscr{A}$. Nous allons définir l'espace vectoriel **produit tensoriel sur** $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}$ avec $\mathscr{N}$, noté $\mathscr{M} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{N}$.

Pour cela, dans l'espace vectoriel $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$, considérons le sous-espace vectoriel $\mathscr{I}$ engendré par les éléments de la forme $ma \otimes n - m \otimes an$ pour tous $m \in \mathscr{M}$, $n \in \mathscr{N}$ et $a \in \mathscr{A}$. Nous posons

$$\mathscr{M} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{N} = \mathscr{M} \otimes \mathscr{N} / \mathscr{I}$$

Ainsi, dans $\mathscr{M} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{N}$, le produit tensoriel est transparent pour $\mathscr{A}$: $ma \otimes n = m \otimes an$.

Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont des bimodules sur $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{M} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{N}$ est un bimodule sur $\mathscr{A}$, de façon naturelle.

Équivalence de Morita

L'équivalence de Morita joue un rôle important dans l'étude des algèbres associatives. Sa définition repose sur la notion de bimodules sur deux algèbres distinctes. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres associatives. On dira que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{A} - \mathscr{B}$ bimodule si $\mathscr{M}$ est à la fois un module à gauche sur $\mathscr{A}$ et un module à droite sur $\mathscr{B}$ tel que $(am)b = a(mb)$ pour tous $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$, et $m \in \mathscr{M}$.

Soient alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres associatives unitaires. Nous dirons que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont **équivalentes de Morita** s'il existe un $\mathscr{A} - \mathscr{B}$ bimodule $\mathscr{M}$ et un $\mathscr{B} - \mathscr{A}$ bimodule $\mathscr{N}$ tels que $\mathscr{M} \otimes_\mathscr{B} \mathscr{N} \simeq \mathscr{A}$ et $\mathscr{N} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{M} \simeq \mathscr{B}$, où ces isomorphismes sont des isomorphismes de bimodules (sur $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$).

Si deux algèbres $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont équivalentes de morita, alors on a une correspondance bijective canonique entre l'ensemble des bimodules sur $\mathscr{A}$ et l'ensemble des bimodules sur $\mathscr{B}$, donnée par

$$\mathscr{P} \text{ bimodule sur } \mathscr{A} \mapsto \mathscr{N} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{P} \otimes_\mathscr{A} \mathscr{M} \text{ bimodule sur } \mathscr{B}$$

Remarque

Soit $\mathscr{M}$ un bimodule sur l'algèbre associative $\mathscr{A}$. Alors en fait nous pouvons considérer $\mathscr{M}$ comme un module à gauche sur l'algèbre associative $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^{op}$. En effet, considérons le produit

$$\begin{aligned} (\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^{op}) \times \mathscr{M} &\to \mathscr{M} \\ (a \otimes b, m) &\mapsto amb \end{aligned}$$

Il est facile de voir que cette définition fait de $\mathscr{M}$ un module à gauche sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^{op}$. On remarquera qu'il est important de bien prendre l'algèbre opposée dans cette définition pour obtenir à la fin un module à *gauche*.

1.2 Variétés, formes, fibrés

1.2.1 Variétés différentiables

Une **variété topologique** M un espace topologique séparé[1] tel que pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p, et un homéomorphisme

$$\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^n$$

où W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'entier n est la **dimension** de M. Le couple (U, ϕ) est une **carte locale** de M. Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est appelé un **atlas** de la variété. L'ensemble $\{U_i\}_{i \in I}$ est alors un **recouvrement d'ouverts** de M. *A priori*, cet atlas n'est pas unique. En particulier, la réunion de deux atlas est encore un atlas.

M est une **variété différentiable de classe $C^r (r \geq 1)$** si M est une variété topologique sur laquelle il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tel que, pour tous i, j avec $U_i \cap U_j \neq \varnothing$,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^r au sens usuel des applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, l'atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ est dit de classe C^r.

Une carte locale (U, ϕ) d'une variété différentiable de classe C^r sera dite de classe $C^{r'}$ pour $r' \leq r$, si la réunion de cette carte avec un atlas qui définit la structure différentiable de M est un atlas de classe $C^{r'}$. Cette définition impose donc que les applications $\phi_i \circ \phi^{-1}$ soient de classe $C^{r'}$. Il sera donc possible de réunir deux atlas de classe C^r en un atlas de classe C^r, si toutes les cartes locales de l'un sont de classe C^r pour la structure différentiable définie par l'autre.

Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe C^r. Deux tels atlas ne sont pas toujours compatibles (leur réunion n'est pas nécessairement un atlas de classe C^r). Un atlas de classe C^r est bien sûr un atlas de classe $C^{r'}$ pour tout $r' \leq r$. En particulier une variété différentiable de classe C^r est aussi une variété différentiable de classe $C^{r'}$ pour tout $r' \leq r$.

Des variétés différentiables définies par deux atlas incompatibles peuvent être isomorphes (au sens des applications différentiables entre variétés définies plus loin). Une **structure différentiable** sur une variété topologique est la donnée d'une variété différentiable construite sur cette variété topologique, à un isomorphisme près. A priori, une variété topologique peut admettre plusieurs structures différentiables. En réalité, pour toute dimension autre que 4, si une structure différentiable existe sur une variété topologique, alors elle est unique. Par contre, il a été montré qu'en dimension 4, plusieurs structures différentiables existent sur $\mathbb{R}^4$. Par exemple, sur la variété topologique $\mathbb{R}$, on peut introduire deux atlas incompatibles $\{(\mathbb{R}, t \mapsto t)\}$ et $\{(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)\}$, tous deux constitués d'une seule carte. Les structures différentiables sur $\mathbb{R}$ définies par ces deux atlas sont les mêmes.

Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est **différentiable** de classe $C^{r'}$, avec $r' \leq r$, si pour toute carte locale (U, ϕ) de classe $C^{r'}$, $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ est de classe $C^{r'}$.

Dans ce qui suit, les variétés différentiables et les fonctions définies dessus seront essentiellement de classe C^∞.

[1] Un espace topologique est dit séparé si, pour tous points x, y de cet espace, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.

Coordonnées locales

Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété différentiable M. Pour tout $p \in U$, $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. Les nombres $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sont les **coordonnées de p dans la carte (U, ϕ)**. Les n fonctions $(x^1, \dots, x^n)$ sont les n **fonctions coordonnées** associées à cette carte, elles forment un **système de coordonnées** sur U. Elles sont notées plus brièvement (x^i). Les fonctions x^i ne sont bien sûr définies que sur l'ouvert U.

Soit $\chi : \phi(U) \to W \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme (de classe C^∞) entre l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ et un autre ouvert W de $\mathbb{R}^n$. Alors $(U, \chi \circ \phi)$ est encore une carte locale de la variété différentiable M, dont les coordonnées associées ne sont plus celle associées à la carte locale (U, ϕ). Pour un ouvert U de M donné, il existe donc une infinité de systèmes de coordonnées sur U. χ permet d'effectuer un **changement de coordonnées** sur l'ouvert U. Si (x^i) sont les coordonnées associées à (U, ϕ) et (y^j) sont celles associées à $(U, \chi \circ \phi)$, alors le changement de coordonnées est noté symboliquement $(y^j(x^i))$, où il faut considérer les y^j comme n fonctions (de classe C^∞) définies sur l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.

Nous dirons que le système de coordonnées associé à une carte locale (U, ϕ) est centré en $p \in M$ si $p \in U$ et $\phi(p) = (0, \dots, 0)$. Les coordonnées de p sont donc nulles. Un tel système de coordonnée existe toujours pour n'importe quel p, puisqu'il suffit de composer l'homéomorphisme d'une carte locale par une translation dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné une carte locale (U, ϕ), une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ prendra localement la forme $f(x^1, \dots, x^n)$ au dessus de U (par abus de notation). En fait, il s'agit ici de la fonction $f \circ \phi^{-1}$.

Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables. Une application $F : M \to N$ est différentiable si, pour toutes cartes locales (U, ϕ) sur M et (V, ψ) sur N telles que $F(U) \subset V$, les fonctions $\psi^j \circ F \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables.

Si (x^i) et (y^j) sont les coordonnées des cartes (U, ϕ) et (V, ψ) respectivement, cela signifie que les fonctions

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto y^j(F(x^1, \dots, x^n)) = F^j(x^1, \dots, x^n)$$

sont différentiables.

L'espace tangent

Soit p un point de la variété différentiable M. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des courbes $\gamma : [-1, 1] \to M$ telles que $\gamma(0) = p$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset U$ pour un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ). Il est commode d'adopter la notation $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$ sur cet intervalle, où les x^i sont les applications coordonnées associées à la carte locale (U, ϕ). Sur $\mathscr{C}$, on définit la relation d'équivalence :

$$\gamma \sim \gamma' \Leftarrow: \left(\frac{d\gamma^i(t)}{dt}\right)_{|t=0} = \left(\frac{d{\gamma'}^i(t)}{dt}\right)_{|t=0}$$

Il est aisé de vérifier que cette relation d'équivalence est indépendante du choix du système de coordonnées sur U. Cette relation signifie que deux courbes γ et γ' sont équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans $\mathbb{R}^n$ » , sur n'importe quelle carte locale.

Par définition, l'**espace tangent en p à M**, noté T_pM, est l'ensemble des classes d'équivalences dans $\mathscr{C}$ pour cette relation.

Cette définition signifie donc que T_pM est constitué des « tangentes » des courbes γ dans M. L'indépendance vis à vis du choix des coordonnées locales est essentielle pour assurer la cohérence de cette définition. Il faut cependant souligner qu'un « vecteur tangent » à M n'a pas de sens si M n'est pas un sous-ensemble d'un $\mathbb{R}^m$. La « tangente » est plutôt vue ici dans l'espace $\mathbb{R}^n$, grâce aux cartes locales.

Bien qu'il soit possible de visualiser les vecteurs (au moins dans $\mathbb{R}^n$), cette définition ne fait pas apparaître de façon évidente une éventuelle structure d'espace vectoriel de T_pM. C'est pourquoi l'espace tangent est aussi défini de la façon suivante.

Soit l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M,

$$\mathscr{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R},\ f \text{ de classe } C^\infty\}$$

Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions : $(fg)(p) = f(p)g(p)$. Pour un $p \in M$, on munit $\mathscr{F}(M)$ de la relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftarrow : \exists U \subset M,\ U \text{ ouvert avec } p \in U, \text{ tel que } \ f_{|U} = g_{|U}$$

On note $C_p^\infty(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathscr{F}(M)$ pour cette relation. Le produit sur $\mathscr{F}(M)$ passe au quotient (comme il est aisé de le vérifier). Donc $C_p^\infty(M)$ est une algèbre. Une **dérivation** sur $C_p^\infty(M)$ est une application linéaire $\mathscr{L} : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ qui vérifie la **relation de Leibniz en p** : $\mathscr{L}(\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}) = \mathscr{L}(\widetilde{f})g(p) + f(p)\mathscr{L}(\widetilde{g})$ où $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont les classes d'équivalence de f et g. Par définition, l'**espace tangent en p à M**, T_pM, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C_p^\infty(M)$.

La relation d'équivalence définie sur $\mathscr{F}(M)$ sert à ne faire dépendre $\mathscr{L}(\widetilde{f})$ que des valeurs de f et de ses dérivées en p. En effet, la seule information que $\widetilde{f}$ garde de f est l'ensemble des valeurs de f et de ses « dérivées » en p.[2] Donc aucun autre point que p ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation $\mathscr{L}$ sur $C_p^\infty(M)$. Ensuite, la relation de Leibniz assure que cette dépendance ne peut se faire qu'au maximum par la première dérivée de f en p, car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.

Ces deux définitions sont bien sûr équivalentes. Elles peuvent être reliées de la façon suivante. Soit $\gamma \in \mathscr{C}$ un représentant d'une classe de $\mathscr{C}/\sim$. Soit $f \in \mathscr{F}(M)$ un représentant d'une classe de $C_p^\infty(M)$. La dérivation associée à γ est donnée par la formule :

$$\widetilde{f} \mapsto \left(\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right)_{|t=0}$$

Il est facile de vérifier que c'est bien une dérivation sur $C_p^\infty(M)$, c'est à dire que le résultat ne dépend que des classes de f et γ. Il est aussi facile de voir que cette relation identifie les deux définitions.

Ainsi, T_pM est un espace vectoriel dont tout **vecteur** $X(p)$ peut être vu comme la dérivée d'une courbe (non unique) passant par p, donc comme un « vecteur », ou comme une dérivation en p sur les fonctions définies au voisinage de p. Localement, dans une carte locale (U, ϕ), de coordonnées (x^i), tout vecteur $X(p) \in T_pM$ s'écrit

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

[2]On dit alors que $\widetilde{f}$ est le **jet d'ordre infini de f en p**.

Les $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ forment une base de T_pM. Ce sont les dérivations $\widetilde{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, associées aux courbes $t \mapsto \phi^{-1}(x^1(p), \dots, x^{i-1}(p), x^i(p) + t, x^{i+1}(p), \dots, x^n(p)) \in U$ pour t suffisamment petit. En particulier la dimension de T_pM est n.

Lors d'un changement de coordonnées $(x^i) \mapsto (y^j)$, les bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}(p)\right\}$ sont reliées entre elles par

$$\frac{\partial}{\partial y^j}(p) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

La matrice $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\right)$ assure donc le changement de bases dans T_pM.

Variétés orientables

Une variété différentiable (connexe) M est **orientable** s'il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de M tel que si (x^i) et (y^i) désignent les coordonnées de deux cartes quelconques de M s'intersectant, le changement de coordonnées $y^j(x^i)$ vérifie

$$\det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\right) > 0$$

pour tout p dans l'intersection des ouverts des deux cartes.

Ainsi, si la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}$ de T_pM est choisie comme orientée dans le sens positif, alors la base $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}(p)\right\}$ l'est aussi, puisque le changement de bases s'effectue grâce à une matrice de déterminant strictement positif. Lorsque le choix d'une telle orientation est fait, on dit que M est **orientée**. Une variété orientable n'a que deux orientations possibles.

Champs de vecteurs

Soit TM l'espace

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

Il est facile de montrer que TM est une variété différentiable orientée. C'est le **fibré tangent** à M.

Un **champ de vecteurs** X sur M est une application différentiable $X : M \to TM$ telle que $X(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$.[3] On note $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M. Pour tous $f \in \mathscr{F}(M)$ et $X \in \Gamma(M)$, fX est un champ de vecteurs défini en tout $p \in M$ par $(fX)(p) = f(p)X(p)$.[4]

Localement, au dessus d'une carte locale (U, ϕ) de M, de coordonnées (x^i), on peut écrire

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

où $X^i : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables, les **coordonnées** de X dans la carte (U, ϕ).

Si X est un champ de vecteurs sur M, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonctions différentiable, on définit $Xf : M \to \mathbb{R}$ comme la fonction $(Xf)(p) = X(p)\widetilde{f}$ où le membre de droite fait référence

[3]En termes de fibrés, X est une section du fibré vectoriel TM.

[4]$\Gamma(M)$ est donc un module sur $\mathscr{F}(M)$

à la définition de T_pM comme dérivations sur $C_p^\infty(M)$. L'application $f \mapsto Xf$ satisfait à la **relation de Leibniz**

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

pour tous $f, g \in \mathscr{F}(M)$ et $X \in \Gamma(M)$. Cette relation caractérise complètement les champs de vecteurs sur M au sens où $\Gamma(M)$ est exactement l'espace vectoriel des applications linéaires $\mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M)$ qui satisfont à cette relation.

Pour tous $X, Y \in \Gamma(M)$, on peut définir un nouveau champ de vecteurs $[X, Y] \in \Gamma(M)$ en posant $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Il est en effet facile de vérifier que cette expression satisfait bien à la relation de Leibniz (ce qui n'est pas vrai de XY ou YX séparément). En coordonnées locales, les coordonnées $[X, Y]^i$ de $[X, Y]$ valent

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

$[X, Y]$ est le **crochet de Lie** des champs de vecteurs X et Y. Ce crochet donne à $\Gamma(M)$ une structure d'algèbre de Lie.[5]

Si M et N sont deux variétés différentiables et $F : M \to N$ est une application différentiable, on définit $F_* : \Gamma(M) \to \Gamma(N)$ par la relation suivante. Si $X \in \Gamma(M)$, F_*X est le champ de vecteurs dont la valeur en tant que dérivée sur $f \in \mathscr{F}(N)$ est $(F_*X)f = X(f \circ F)$, où $f \circ F \in \mathscr{F}(M)$. Localement, les coordonnées de F_*X sont données par

$$(F_*X)^j = \frac{\partial F^j}{\partial x^i} X^i$$

où les notations sont celles déjà introduites.

Une construction analogue définit une application $T_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ en posant $T_pF(X(p))\widetilde{f} = X(p)\widetilde{f \circ F}$ pour tous $p \in M$ et $\widetilde{f} \in C^\infty_{F(p)}(N)$. $TF : TM \to TN$ est l'**application linéaire tangente** de F.

Métrique et application de Hodge

Une **métrique** sur la variété M est la donnée d'un produit scalaire $g(p)$ sur chaque espace vectoriel T_pM, $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, tel que pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, $p \mapsto g(p)(X(p), Y(p))$ soit C^∞. La métrique est riemannienne si le produit scalaire est défini positif sur chaque T_pM.

On note $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ la matrice locale de la métrique g dans les coordonnées (x^i), g^{ij} sa matrice inverse et $\det g$ son déterminant.

Si $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(M)$, on pose

$$*\omega = \frac{1}{(n-p)!p!} \sqrt{\det g} \epsilon_{i_1 \dots i_n} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_p j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

où $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ est complètement antisymétrique en les $i_1, \dots, i_n$, avec $\epsilon_{12\dots n} = 1$. Ces expressions locales peuvent se recoller sur tout M, et cela définit une application $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$. C'est l'**application de Hodge**. Elle vérifie $** \omega = (-1)^{p(n-p)}\omega$ pour tout $\omega \in \Omega^p(M)$, donc elle est inversible. Elle identifie $\Omega^p(M)$ à $\Omega^{n-p}(M)$.

[5] $\Gamma(M)$ est l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre $\mathscr{F}(M)$.

Variétés à bord

Une variété de dimension n a été définie comme recollements d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il est possible de considérer des variétés pour lesquels les ouverts de références sont dans $\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n / x^1 \geq 0\}$. Notons H^n l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par $x^1 = 0$ (c'est le bord de $\mathbb{R}^n_+$). Dans ce cas, pour un point p d'une variété topologique M, on a deux situations possibles :

1. il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^n_+$ tel que $W \cap H^n = \varnothing$, un ouvert U de M contenant p et un homéomorphisme $\phi : U \to W$;
2. il existe un ouvert $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert U de M contenant p et un homéomorphisme $\phi : U \to W = \widetilde{W} \cap \mathbb{R}^n_+$, tel que $\phi(p) \in H^n \cap W$.

Le premier cas correspond à la situation usuelle. Par contre, la seconde situation est nouvelle, et signifie que p est un point du bord de M.[6] On note ∂M le sous-ensemble de M de ces points. C'est le **bord** de M. On peut facilement constater que ∂M est une variété topologique qui n'a pas de bord. Donc

$$\partial\partial M = \varnothing$$

Il est possible d'introduire de la même façon des variétés différentiables à bord, les espaces tangents, les champs de vecteurs, etc... La variété bord ∂M « récupère » ces structures induites par celles de M. Par la suite, on ne s'intéressera pas particulièrement à ces variétés, bien qu'elles jouent un grand rôle dans les théories homologiques des espaces topologiques, et les constructions seront faites sur des variétés sans bord.

1.2.2 Formes différentielles

1-formes différentielles

Une **1-forme différentielle** α sur M est une application linéaire $\alpha : \Gamma(M) \to \mathscr{F}(M)$ qui vérifie $\alpha(fX) = f\alpha(X)$ pour tous $f \in \mathscr{F}(M)$ et $X \in \Gamma(M)$. Les 1-formes différentielles sont donc duales en un certain sens des champs de vecteurs. On note $\Omega^1(M)$ l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur M. Si $f \in \mathscr{F}(M)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, il est facile de voir que $f\alpha \in \Omega^1(M)$.

Pour $f \in \mathscr{F}(M)$, on peut définir $df : \Gamma(M) \to \mathscr{F}(M)$ par $df(X) = Xf$. Alors il est facile de vérifier que $df \in \Omega^1(M)$. Chaque fonction différentiable définit donc une 1-forme différentielle. df est appelée la différentielle de la fonction f. L'application linéaire $d : \mathscr{F}(M) \to \Omega^1(M)$, $f \mapsto df$ est appelée la **différentielle**.

p-formes différentielles

Une ***p*-forme différentielle** ω sur M est une application p-multilinéaire alternée

$$\omega : \underbrace{\Gamma(M) \times \cdots \times \Gamma(M)}_{n \text{ fois}} \to \mathscr{F}(M)$$

telle que $\omega(fX_1, X_2, \dots, X_p) = f\omega(X_1, X_2, \dots, X_p)$ pour tous $f \in \mathscr{F}(M)$ et $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M)$. On note $\Omega^p(M)$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles sur M. Si $f \in \mathscr{F}(M)$ et

[6] On notera que l'ouvert W est la trace sur $\mathbb{R}^n_+$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\omega \in \Omega^p(M)$, alors $f\omega \in \Omega^p(M)$. À cause de l'antisymétrie, il est facile de voir que $\Omega^p(M) = \{0\}$ lorsque $p > n$ (où n est la dimension de M).

Pour tout $\omega \in \Omega^p(M)$, on définit $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ par la **formule de Koszul**

$$d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots \overset{i}{\vee} \dots, X_{p+1}) + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots \overset{i}{\vee} \dots \overset{j}{\vee} \dots, X_{p+1})$$

pour tous $X_1, \dots, X_{p+1} \in \Gamma(M)$. Il est facile de vérifier que cette formule définit bien un élément de $\Omega^{p+1}(M)$. d est la **différentielle de de Rham** sur M.

On remarquera qu'une 0-forme différentielle n'est autre qu'une fonction, d'où la relation $\Omega^0(M) = \mathscr{F}(M)$.

L'algèbre des formes

On définit l'espace vectoriel des formes différentielles en posant

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$$

On introduit sur cet espace le produit extérieur

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \cdot \eta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$$

pour toutes formes différentielles $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\eta \in \Omega^q(M)$. Ce produit vérifie $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$. Cela fait de $\Omega^*(M)$ une algèbre associative. C'est l'**algèbre des formes différentielles sur M**.

L'application d définie sur tout $\Omega^*(M)$ satisfait à $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$ et $d^2 = 0$. C'est la différentielle sur $\Omega^*(M)$.

Expressions locales

Si (U, ϕ) est une carte locale de M et (x^i) les coordonnées associées, on introduit les 1-formes différentielles locales dx^i définies au dessus de U par la relation $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$. Toute 1-forme différentielle α s'écrit alors localement au dessus de U comme $\alpha = \alpha_i dx^i$, où $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ sont les **coordonnées locales** de α dans la carte (U, ϕ).

Une p-forme différentielle ω s'écrit localement

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

où les $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \to \mathbb{R}$ sont antisymétriques par rapport aux indices i_k. Ce sont les coordonnées locales de ω. La différentielle d prend localement l'expression

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{i_1 \dots i_p} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Lors d'un changement de coordonnées locales $(x^i) \mapsto (y^j)$ sur U, les coordonnées de ω se transforment comme

$$\omega'_{j_1 \dots j_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}} \omega_{i_1 \dots i_p}$$

où $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \omega'_{j_1 \dots j_p} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}$.

Pull-back

Soient M et N deux variétés différentiables et $F : M \to N$ une application différentiable. Pour toute p-forme $\omega \in \Omega^p(N)$, on définit $F^*\omega \in \Omega^p(M)$ par $(F^*\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(F_* X_1, \dots, F_* X_p)$ pour tous $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M)$. $F^*\omega$ est le **pull-back** de ω par F. Il est facile de montrer que $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$, où à gauche il s'agit de la différentielle sur M et à droite celle sur N.

Localement, avec les notations usuelles, on a

$$(F^*\omega)_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial F^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial F^{j_p}}{\partial x^{i_p}} \omega_{j_1 \dots j_p}$$

Dérivée de Lie

Pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(M)$, on introduit l'application

$$\begin{aligned} i_X : \Omega^p(M) &\to \Omega^{p-1}(M) \\ \omega &\mapsto i_X \omega \end{aligned}$$

définie pour tout $p \geq 0$ (par définition elle est nulle sur $\Omega^0(M)$) en posant

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1})$$

pour tous $X_1, \dots, X_{p-1} \in \Gamma(M)$. Cette application est le **produit intérieur** par le champ de vecteurs X. Elle vérifie

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (i_X \eta)$$

pour toutes formes $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\eta \in \Omega^*(M)$,[7] et

$$i_X i_Y + i_Y i_X = 0$$

pour tous champs de vecteurs X et Y.

i_X permet de définir l'application

$$\begin{aligned} L_X : \Omega^p(M) &\to \Omega^p(M) \\ \omega &\mapsto L_X \omega \end{aligned}$$

en posant $L_X = i_X d + d i_X$. Cette application est la **dérivée de Lie** dans la direction X. Elle vérifie

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X \eta)$$

pour toutes formes $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$,[8] et

$$\begin{aligned} [L_X, i_Y] &= i_{[X,Y]} \\ [L_X, L_Y] &= L_{[X,Y]} \\ [L_X, d] &= 0 \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs X et Y. Sur les fonctions, L_X n'est autre que la dérivation des fonctions par le champ de vecteurs X : $L_X f = X f$.

[7] Cela fait de i_X une dérivation de degré -1 de l'algèbre $\Omega^*(M)$.

[8] Cela fait de L_X une dérivation de l'algèbre $\Omega^*(M)$.

Intégration

Dans le cas où M est orientée, il est possible de définir l'intégrale d'une n-forme différentielle sur M en posant localement, pour $\omega = \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$,

$$\int_U \omega_{12 \dots n} dx^1 dx^2 \cdots dx^n$$

et en recollant ces expressions pour tous les ouverts d'un atlas de M (à l'aide d'une partition de l'unité). On note

$$\int_M \omega$$

l'intégrale obtenue.

1.2.3 Géométrie des groupes de Lie

Le groupe de Lie et son algèbre de Lie

Un **groupe de Lie** est un espace G qui est à la fois un groupe et une variété différentiable, tel que les applications

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

soient différentiables. Cette simple définition donne à tout groupe de Lie une géométrie particulière. L'application $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ est différentiable. G admet un élément particulier, son unité e (en tant que groupe). L'application linéaire tangente $T_e L_g : T_e G \to T_g G$ identifie de façon canonique tout plan tangent $T_g G$ au plan tangent en e. Notons $\mathfrak{g} = T_e G$ ce plan tangent particulier.

Un champ de vecteurs X sur G est **invariant à gauche** si pour tout $g \in G$, $X(g) = T_e L_g X(e)$. En d'autres termes, $L_{g*} X = X$ pour tout $g \in G$. Ces relations indiquent que tout champ de vecteurs invariant à gauche X est complètement caractérisé par sa valeur en e. Donc l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche est isomorphe à $\mathfrak{g}$. Il est facile de vérifier que si X et Y sont invariants à gauche, alors leur crochet de Lie $[X,Y]$ l'est aussi. Cela donne à $\mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Lie. C'est l'**algèbre de Lie du groupe G**. Cette algèbre est de dimension $\dim G$ (en tant que variété). C'est un élément essentiel de l'étude du groupe G, et en particulier de sa géométrie. Son avantage essentiel est d'être de dimension finie, alors que l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs sur G ne l'est pas.

Une forme différentielle ω sur G est invariante à gauche si ${L_g}^* \omega = \omega$ pour tout $g \in G$. On remarquera que si ω est invariante à gauche et les $X_1, \dots, X_p$ le sont aussi, alors $\omega(X_1, \dots, X_p)$ est une constante sur G. Ainsi, les 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G s'identifient à l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$.

G se représente canoniquement sur $\mathfrak{g}$ par la **représentation adjointe** $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ définie par $Ad_g X = {R_{g^{-1}}}_* L_{g*} X$ où $R_g : G \to G$, $h \mapsto hg$ est différentiable. Cette représentation adjointe induit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur elle-même, appelée aussi représentation adjointe, qui prend la forme $ad_X Y = [X,Y]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.

L'application exponentielle

Tout champ de vecteur X sur une variété différentielle M définit un flot $\phi_{X,t} : M \to M$ par la relation

$$\frac{d}{dt} \phi_{X,t}(p) = X(\phi_{X,t}(p))$$

pour t réel et $p \in M$, et la condition initiale $\phi_{X,0}(p) = p$.

Dans le cas où X est un champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie, son flot satisfait en plus à $L_g \phi_{X,t}(e) = \phi_{x,t}(g)$ pour tout $g \in G$.

On définit l'**application exponentielle** par

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\to G \\ X &\mapsto \phi_{X,1}(e) \end{aligned}$$

Cette application vérifie alors

$$\begin{aligned} \exp(0) &= e \\ \frac{d}{dt} \exp(tX) &= X(\exp(tX)) \end{aligned}$$

Elle identifie un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$ à un voisinage ouvert de $e \in G$. De plus, tout élément d'un groupe de Lie connexe est de la forme $g = \exp X_1 \exp X_2 \dots \exp X_k$ pour des $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$.

1.2.4 Fibrés et connexions

Fibré principal

Soit G un groupe de Lie et M une variété différentiable. Un **fibré principal** P au dessus de M, de groupe de structure G est une variété différentiable telle que :

1. il existe une application différentiable surjective $\pi : P \to M$. π est la **projection** du fibré, $\pi^{-1}(x)$ est la **fibre** au dessus de $x \in M$. On la note aussi P_x.
2. G agit à droite librement[9] sur P. On note $p \mapsto p \cdot g = \widetilde{R}_g p$ cette action.
3. Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x et un difféomorphisme $\phi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ tel que $\pi(\phi(x,h)) = x$ et ϕ est compatible avec l'action de G au sens où $\phi(x, hg) = \phi(x,h) \cdot g$ pour tous $x \in U$ et $g, h \in G$.

Le couple (U, ϕ) est une **trivialisation locale** de P au dessus de U. M est la **base** du fibré P et G son **groupe de structure**. Dans le cas des fibrés principaux, G est aussi la fibre, au sens où G est isomorphe à $\pi^{-1}(x)$ pour tout $x \in M$.

À partir d'une trivialisation locale (U, ϕ) de P, il est possible d'en construire d'autres au dessus de U.[10] Compte tenu des contraintes dans la définition, toute autre trivialisation (U, ψ) est reliée à (U, ϕ) par une application différentiable $g : U \to G$ telle que $\psi(x,h) = \phi(x, g(x)h)$ pour tous $x \in U$ et $h \in G$. Ainsi, si (x,h) représente le point $p \in P$ dans la trivialisation (U, ψ), alors $(x, g(x)h)$ représente ce même point dans la trivialisation (U, ϕ).

[9] Pour tout $p \in P$, le sous-groupe $G_p = \{g \in G / p \cdot g = p\}$ est réduit à l'élément neutre de G.
[10] Cela correspond à un « changement de coordonnées » comme dans une carte sur une variété.

Pour deux ouverts U, V de M tels que $U \cap V \neq \varnothing$ et (U, ϕ_U) et (V, ϕ_V) soient des trivialisations de P, il existe une application différentiable $g_{UV} : U \cap V \to G$ telle que si $\phi_U(x, h_U) = \phi_V(x, h_V) \in P$, alors $h_U = g_{UV} h_V$ pour tout $x \in U \cap V$. On appelle g_{UV} une **fonction de transition** du fibré P.

P est complètement caractérisé par un système de trivialisations locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tel que les U_i forment un recouvrement de M, et des fonctions de transitions $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ (qui n'ont besoin d'être définie que lorsque $U_i \cap U_j \neq \varnothing$). Ces fonctions de transitions satisfont à $g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$ pour tout $x \in U_i \cap U_j \neq \varnothing$ et $g_{ij}(x) g_{jk}(x) g_{ki}(x) = e$ pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$. Ces relations caractérisent complètement un ensemble de fonctions de transitions.

Un **vecteur vertical** $X(p) \in T_p P$ est un vecteur dans le noyau de $T_p \pi : T_p P \to T_x M$ où $x = \pi(p)$. On note $V_p \subset T_p P$ le sous-espace vectoriel des vecteurs verticaux. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $p \cdot \exp(tX)$ est une courbe dans P passant en p à $t = 0$. Son vecteur tangent en p est clairement vertical (il suffit de dériver la relation $\pi(p \cdot \exp(tX) = \pi(p))$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on note

$$X^v(p) = \left(\frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{t=0}$$

ce vecteur vertical. On peut montrer que tout vecteur vertical de $T_p P$ est de cette forme :

$$V_p = \{ X^v(p) / X \in \mathfrak{g} \}$$

ce qui fait que V_p est isomorphe à $\mathfrak{g}$ en tant qu'espace vectoriel.

Un champ de vecteurs vertical est un champ de vecteurs sur P vertical en tout point. $\mathfrak{g}$ s'identifie donc à un sous-espace des champs de vecteurs verticaux par $X \mapsto X^v$. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs verticaux est vertical, et on a $[X, Y]^v = [X^v, Y^v]$. Enfin, si X est vertical sur P, alors $\widetilde{R}_{g*} X$ l'est aussi.

Fibrés quelconques

Pour des raisons pratiques, on va introduire les fibrés généraux comme des fibrés associés à des fibrés principaux. Cela n'enlève rien à cette notion, puisqu'on peut montrer que tout fibré est associé à un fibré principal.

Soient donc P un fibré principal, qui va servir de « modèle » pour le fibré, et G son groupe de structure. Soit F un espace topologique sur lequel G agit à gauche continûment. On note $\ell_g f$ cette action, pour tous $g \in G$ et $f \in F$. Le fibré E, de fibre F associé au fibré principal P est construit en « remplaçant » chaque fibre de P par F. Cela est possible en substituant l'action à gauche de G (groupe) sur G (fibre) dans P par l'action à gauche ℓ de G sur F.

Concrètement, sur $P \times F$ on définit l'action à droite de G par

$$(p, f) \mapsto (p \cdot g, \ell_{g^{-1}} f)$$

Alors par définition, on pose $E = (P \times F)/G$ l'espace des orbites de cette action. Tout point de E est une orbite de la forme $[p, f] = \{(p \cdot g, \ell_{g^{-1}} f)/g \in G\}$. L'application $\pi_E([p, f]) = \pi(p) = x \in M$ est bien définie. C'est la projection $\pi_E : E \to M$. Pour $x \in M$, soit $p \in \pi^{-1}(x)$ fixé. Alors $\pi_E^{-1}(x)$ est constitué de tous les $[p_1, f_1]$ tels que $\pi(p_1) = x$. Or, dans chaque classe $[p_1, f_1]$ avec $\pi(p_1) = x$, il existe un unique représentant de la forme $(p, f) = (p_1 \cdot g, \ell_{g^{-1}} f_1)$ pour un $g \in G$. Chaque élément de $\pi_E^{-1}(x)$ est donc représenté par un élément de $P \times F$

de la forme (p, f) (où p est fixé). f pouvant parcourir tout F, cela montre que $\pi_E^{-1}(x)$ est isomorphe à F. E est donc un « fibré », de fibre F.

Ce même genre de raisonnement permet de montrer que pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x et un homéomorphisme $\chi : U \times F \to \pi_E^{-1}(U)$. Le couple (U, χ) est une trivialisation locale de E. Elle est bien sûr construite à partir d'une trivialisation locale (U, ϕ) de P. Si $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ forme un système de trivialisations locales de P, alors l'ensemble $\{(U_i, \chi_i)\}_{i \in I}$ associé forme un système de trivialisation locale de E.

Les fonctions de transitions permettant de passer d'une trivialisation locale sur E à une autre sont de la forme $\ell_{g_{ij}}$ sur $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, où les $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ sont les fonctions de transition de P.

On note $E = P \times_\ell F$ ce fibré associé à P par l'action ℓ de G sur la fibre type F.

Sections

Une section d'un fibré E et une application $s : M \to E$ telle que $\pi_E(s(x)) = x$ pour tout $x \in M$. On note $\Gamma(E)$ l'espace des sections de E.

Si P est le fibré principal associé à E, alors $\Gamma(E)$ est isomorphe à l'espace des applications G-équivariantes $P \to F$, où une application $f : P \to F$ est G-équivariante si $f(p \cdot g) = \ell_{g^{-1}} f(p)$ pour tous $p \in P$ et $g \in G$. On note $\mathscr{F}_G(P, F)$ l'espace des **applications $\boldsymbol{G}$-équivariantes de $\boldsymbol{P}$ dans $\boldsymbol{F}$**.

Fibrés vectoriels

Un fibré vectoriel E est un fibré dont chaque fibre F est un espace vectoriel et pour lequel ℓ est une représentation (linéaire) de G sur F. Dans ce cas, $\Gamma(E)$ hérite d'une structure d'espace vectoriel, et on peut multiplier toute section de E par une fonction sur M.[11] Si E et E' sont deux fibrés vectoriels sur la variété M (de fibrés principaux associés différents), alors $E \oplus E' = \cup_{x \in M} (E_x \oplus E'_x)$ est aussi un fibré vectoriel. C'est la **somme directe de Whitney** des deux fibrés. Ce type de construction permet d'introduire le fibré vectoriel $E \otimes E'$ pour lequel chaque fibre est $E_x \otimes E'_x$.

À tout fibré vectoriel E on peut associer un fibré principal P auquel E est associé. Ce fibré principal est défini par ses fibres : la fibre P_x est l'espace des repères de l'espace vectoriel E_x pour tout $x \in M$. Il est facile de vérifier que E est alors associé à P. Si E est muni d'une métrique de fibré, on peut se restreinte au repères orthonormaux pour cette métrique.

Connexions

Une **connexion** sur un fibré principal P est une 1-forme ω sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G (espace qu'on note $\Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$), telle que $\omega(X^v) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $\widetilde{R}_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$ pour tout $g \in G$. Dans cette seconde relation, $\widetilde{R}_g^*$ agit sur la partie « forme » de ω, et $Ad_{g^{-1}}$ agit sur la partie « algèbre de Lie ».

On note H_p le noyau de $\omega(p)$ dans $T_p P$. C'est le sous-espace des **vecteurs horizontaux** en p. Il est facile de voir que $H_p \oplus V_p = T_p P$ pour tout $p \in P$.

Une forme différentielle sur P est dite verticale (resp. horizontale) si elle s'annule dès que l'un des vecteurs sur laquelle on l'applique est horizontal (resp. vertical). ω est par construction verticale.

[11] $\Gamma(E)$ est un module sur $\mathscr{F}(M)$.

On note $\mathcal{A}$ l'espace des connexions sur P. Si ω et ω' sont des éléments de $\mathcal{A}$, alors $\omega - \omega'$ est une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Cela montre que $\mathcal{A}$ est un espace affine, d'espace vectoriel associé $\Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$.

Courbure

La **courbure** d'une connexion ω sur P est la 2-forme différentielle Ω sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(P)$. Par construction, Ω est horizontale. Il est de plus facile de calculer que $d\Omega + [\omega, \Omega] = 0$. C'est l'**identité de Bianchi**.

Expressions locales

Si (U, ϕ) est une trivialisation locale de P, alors on a naturellement une section locale $s_U : U \to \pi^{-1}(U)$ définie par $s_U(x) = \phi(x, e)$ pour tout $x \in U$. Soient alors $A^U = s_U^* \omega$ la 1-forme sur U à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui trivialise ω, et $F^U = s_U^* \Omega$ la 2-forme sur U à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui trivialise Ω. Alors F^U est reliée à A^U par la relation $F^U(X,Y) = dA^U(X,Y) + [A^U(X), A^U(Y)]$ pour tous $X, Y \in \Gamma(U)$ (champs de vecteurs de M définis seulement sur U).

Si (V, ψ) est une seconde trivialisation locale de P telle que $U \cap V \neq \varnothing$, et si $g_{UV} : U \cap V \to G$ est la fonction de transition, alors les trivialisations locales A^U, F^U et A^V, F^V de ω et Ω sur U et V sont reliées entre elles par la relation de recollement :

$$\begin{aligned} A^V &= g_{UV}^{-1} A^U g_{UV} + g_{UV}^{-1} dg_{UV} \\ F^V &= g_{UV}^{-1} F^U g_{UV} \end{aligned}$$

où $g_{UV}^{-1} A^U g_{UV}$ est une autre notation pour $Ad_{g_{UV}^{-1}} A^U$. On remarquera que les F se recollent de façon homogène alors que les A admettent un terme supplémentaire de la forme $g^{-1}dg$.

Le groupe de jauge

Un automorphisme vertical d'un fibré principal P est un difféomorphisme $f : P \to P$ tel que $f(P_x) = P_x$ pour tout $x \in M$, et $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ pour tous $g \in G$ et $p \in P$. L'espace de ces automorphismes verticaux de P est le **groupe de jauge** $\mathscr{G}$ de P.

Puisque $f(p)$ est dans la même fibre que p, on peut écrire $f(p) = p \cdot \psi(p)$ pour une application $\psi : P \to G$. Il est facile de voir que ψ vérifie $\psi(p \cdot g) = g^{-1}\psi(p)g$ pour tout $g \in G$. ψ est donc une application G-équivariante $P \to G$ pour l'action $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$ de G sur lui-même. Ces applications ψ sont aussi des sections d'un fibré associé à P : $P \times_\alpha G$.[12]

Avec ces notations, si ω est une connexion sur P, alors $f^*\omega$ est aussi une connexion. Elle vaut $f^*\omega = \psi^{-1}\omega\psi + \psi^{-1}d\psi$. $\mathscr{G}$ agit donc à droite sur $\mathcal{A}$. La courbure de $f^*\omega$ vaut $f^*\Omega = \psi^{-1}\Omega\psi$.

$\mathscr{G}$ est un groupe de Lie de dimension infinie. On peut cependant considérer son algèbre de Lie $\mathrm{Lie}\mathscr{G}$. Les éléments de $\mathrm{Lie}\mathscr{G}$ sont les applications G-équivariantes $P \to \mathfrak{g}$ pour la représentation Ad de G sur $\mathfrak{g}$. Ce sont aussi les sections du fibré (vectoriel) associé $Ad\mathfrak{g} = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$.

[12] C'est un fibré de fibre G mais ce n'est pas un fibré principal.

L'action infinitésimale de $\mathrm{Lie}\mathscr{G}$ sur une connexion ω est donnée par $\omega \mapsto d\xi + [\omega, \xi]$ où $\xi : P \to \mathfrak{g}$ est G-équivariante. La courbure satisfait à $\Omega \mapsto [\Omega, \xi]$.

1.2.5 Variétés quotients

Une des façons les plus usuelles de construire des variétés topologiques ou différentiables consiste à réduire des variétés déjà connues en utilisant des relations sur cette variété.

On considère un espace topologique séparé X sur lequel on a une relation d'équivalence $\sim$. L'espace $Y = X/\sim$ des relations d'équivalences peut être muni de la topologie induite, qui la topologie la plus fine qui fasse de la projection $\pi : X \to Y$ une application continue. La topologie de Y n'est pas nécessairement séparée. Il existe des résultats relativement généraux qui assurent, pour certains types de classe d'équivalence, que l'espace quotient Y est séparé.

Un espace topologique X est dit régulier si, pour tout point p de X et tout fermé F de X ne contenant pas p, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $p \in U$ et $F \subset V$.

Si A est un sous-espace de X, on définit la relation d'équivalence $\sim$ en définissant ces classes d'équivalence comme les singletons $\{x\}$ pour $x \notin A$ et A lui-même. L'espace quotient Y est l'espace X dans lequel A a été réduit à un point. On a alors le résultat suivant :

Si X est régulier et A est fermé dans X, alors Y est séparé.

Les relations d'équivalence les plus courantes proviennent de l'action d'un groupe G sur un espace topologique X. Une telle action peut être vue comme un homomorphisme de groupes entre G et les isomorphismes de X (dans le cas où X est une variété différentiable, on prend les difféomorphismes). On note $g \cdot p$ l'action d'un élément $g \in G$ sur $p \in X$. L'**orbite** d'un point p de X est l'ensemble $G(p) = \{g \cdot p / g \in G\}$. Les classes d'équivalences de la relations d'équivalence associée sont les orbites de l'action.

Tout sous-groupe H de G agit sur G de façon naturelle par multiplication à gauche : $(h, g) \mapsto hg$ pour tous $h \in H$ et $g \in G$. L'espace des orbites G/H de cette action est séparé pour la topologie induite si H est fermé dans G. Dans ce cas, on obtient un fibré principal $G \to G/H$ de groupe de structure H. De plus, dans le cas où H est un sous-groupe normal de G, alors G/H est un groupe topologique.

Considérons à nouveau l'action de G sur un espace topologique séparé X. À tout $p \in X$, on peut aussi associer un sous-groupe de G, le **groupe d'isotropie** défini par $G_p = \{g \in G / g \cdot p = p\}$. On peut alors montrer que si G est une groupe topologique compact, alors pour tout $p \in X$ on a un homéomorphisme $G/G_p \to G(p)$. Cet homéomorphisme provient de l'application $g \mapsto g \cdot p$, dont le noyau est exactement G_p.

Une action est dite **transitive** si pour tous $p, q \in X$ on peut trouver $g \in G$ tel que $q = g \cdot p$. L'orbite de n'importe quel point est donc X tout entier. Dans ce cas il est facile de constater que les sous-groupe d'isotropie sont tous conjugués entre-eux. Un espace X sur lequel G agit transitivement est appelé un **espace homogène** de G. Cet espace s'identifie à G/G_p pour n'importe quel $p \in X$. De nombreuses variétés différentiables sont des espaces homogène pour des groupes de Lie usuels.

1.3 Exemples d'algèbres associatives

1.3.1 Algèbre de matrices ou d'endomorphismes

Ce sont les exemples les plus simples d'algèbres associatives unitaires. On les note dans ce qui suit $M(n,\mathbb{R})$, $M(n,\mathbb{C})$ et $\mathscr{L}(V)$ (algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie ou non). Si V est de dimension finie, $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à une algèbre de matrices, et est en particulier de dimension finie.

Les algèbres de Lie des dérivations des algèbres matricielles $M(n,\mathbb{R})$ et $M(n,\mathbb{C})$ sont constituées de dérivations intérieures uniquement. Donc dans ce cas, l'algèbre de Lie quotient $\mathrm{Out}(M(n,\mathbb{C}))$ est réduite à $\{0\}$. Pour toute matrice M, M et $M - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(M)\mathbb{1}$ (où $\mathbb{1}$ est la matrice identité) donnent les mêmes dérivations intérieures : $ad_M = ad_{M-\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(M)\mathbb{1}}$. On peut donc toujours normaliser M par $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Ainsi, les algèbres de Lie des dérivations de $M(n,\mathbb{R})$ et $M(n,\mathbb{C})$ s'identifient respectivement à $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

Sur $M(n,\mathbb{C})$, l'application $M \mapsto M^\dagger$ (transconjuguée de la matrice M) est une involution. $M(n,\mathbb{R})$ et $M(n,\mathbb{C})$ sont des algèbres simples. Leur centre se réduit à $\mathbb{C}$.

Si $\mathscr{A}$ est une algèbre associative (sur $\mathbb{C}$), on note $M(n,\mathscr{A})$ l'algèbre associative des matrices de taille n dont les entrées sont dans $\mathscr{A}$. Il est facile de voir que $M(n,\mathscr{A}) = M(n,\mathbb{C}) \otimes \mathscr{A}$.

Les deux algèbres $\mathscr{A} = \mathbb{C}$ et $\mathscr{B} = M(n,\mathbb{C})$ sont équivalentes de Morita. Pour le voir, il suffit de considérer $\mathscr{M} = \mathbb{C}^n$ comme module à gauche sur $\mathbb{C}$ (multiplication des composantes) et comme module à droite sur $M(n,\mathbb{C})$ par multiplication d'une matrice ligne par une matrice carré. De même, on prend $\mathscr{N} = \mathbb{C}^n$ avec cette fois les structures de modules inversée. Alors on a immédiatement $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{N} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{M} = \mathscr{A}$. Plus généralement, toute algèbre associative $\mathscr{A}$ est équivalente de Morita à l'algèbre $M(n,\mathscr{A})$.

1.3.2 Les algèbres de fonctions et des formes différentielles sur une variété

Prenons $\mathscr{A} = \Omega^*(M) = \oplus_{n\geq 0}\Omega^n(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur une variété différentiable M, munie du produit extérieur $\wedge$. C'est une algèbre graduée commutative. L'algèbre $\mathscr{A}^0 = \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ est l'algèbre commutative des fonctions différentiables sur M, notée aussi $\mathscr{F}(M)$ auparavant.

L'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre $\mathscr{F}(M)$ est exactement l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la variété M. Cette algèbre de Lie est aussi un module sur $\mathscr{F}(M)$ (au sens bimodule central). On note $\Gamma(M)$ cette algèbre de Lie.

Si E est un fibré vectoriel (réel) au dessus de la variété compacte M, alors l'espace des sections de E, qu'on note usuellement $\Gamma(E)$, est un module projectif de type fini sur $\mathscr{F}(M)$. En effet, le **théorème de Swan** dit qu'il existe un fibré vectoriel E' au dessus de M tel que $E \oplus E' \simeq M \times \mathbb{R}^N$ pour un N assez grand. Au niveau des modules des sections, cette relation s'écrit $\Gamma(E) \oplus \Gamma(E') \simeq \mathscr{F}(M)^N$.

Le produit intérieur i_X et la dérivée de Lie L_X définis sur $\mathscr{A}$ sont respectivement des dérivations de degré -1 et 0 de $\mathscr{A}$.

Par la suite, cette caractérisation purement algébrique des ces objets géométriques sera utilisée pour des généralisations.

1.3.3 L'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{T}^n V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ fois}}$$

et $\mathscr{T}^0 V = \mathbb{C}$. L'espace vectoriel gradué

$$\mathscr{T} V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}^n V$$

peut être muni canoniquement d'un produit (le **produit tensoriel**) qui en fait une algèbre associative unitaire graduée en posant

$$\mathscr{T}^p V \times \mathscr{T}^q V \to \mathscr{T}^{p+q} V$$
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p, w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q$$

L'algèbre ainsi obtenue s'appelle l'**algèbre tensorielle** de V.

Par construction, cette algèbre est de dimension infinie et n'est jamais commutative. On peut aussi définir l'algèbre tensorielle comme l'algèbre associative graduée libre engendrée en degré 0 par $\mathbb{C}$ et en degré 1 par V. Comme on va le voir dans les exemples qui suivent, elle est à la base de constructions de nombreuses autres algèbres, obtenues par quotient par un idéal bilatère bien choisi. En fait, comme on le verra, toute algèbre est le quotient d'une algèbre tensorielle pour un certain espace vectoriel. Cette propriété fait de l'algèbre tensorielle une algèbre « universelle » au sens suivant.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire, et $\varphi : V \to \mathscr{A}$ une application linéaire. Alors il existe un unique prolongement de φ en un morphisme d'algèbres

$$\varphi : \mathscr{T} V \to \mathscr{A}$$

Il suffit en effet de poser, pour tout $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in \mathscr{T}^p V$,

$$\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = \varphi(v_1) \ldots \varphi(v_p) \in \mathscr{A}$$

et $\varphi(\lambda\mathbb{1}) = \lambda\mathbb{1}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Cette propriété s'appelle la **propriété universelle de l'algèbre tensorielle**.

Ce résultat ne peut être établi que parce que $\mathscr{T} V$ est engendrée librement en degrés 0 et 1 : aucune relation entre les générateurs ne vient obstruer le prolongement de φ à l'algèbre tensorielle toute entière. En particulier, prenons pour espace vectoriel V l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{A}$, et prenons pour φ l'application identité de V dans $\mathscr{A}$. Alors le prolongement de φ à $\mathscr{T} V$ est surjectif, et donc $\mathscr{A}$ est le quotient de $\mathscr{T} V$ par le noyau du prolongement de φ. Ce noyau est bien sûr un idéal de $\mathscr{T} V$. Toute algèbre associative est donc obtenue par quotient d'une algèbre tensorielle.

Une autre conséquence importante de la propriété de prolongement est la suivante. Si nous nous donnons une application linéaire

$$\delta_p : \mathscr{T}^1 V \to \mathscr{T}^{1+p} V$$

pour $p \in \mathbb{N}$ ou $p = -1$, alors il existe un unique prolongement de δ_p en une dérivation graduée de degré p sur $\mathscr{T} V$.

1.3.4 L'algèbre extérieure sur un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel comme ci-dessus, et $\mathscr{T}V$ son algèbre tensorielle. Considérons l'idéal bilatère $\mathscr{I}_\wedge$ de cette algèbre engendré par les éléments de la forme $v\otimes w+w\otimes v \in \mathscr{T}^2V$. Définissons l'algèbre quotient

$$\bigwedge V = \mathscr{T}V/\mathscr{I}_\wedge$$

Cette algèbre est graduée, en posant

$$\bigwedge^p V = \mathscr{T}^pV/(\mathscr{I}_\wedge)^p$$

où $(\mathscr{I}_\wedge)^p = \mathscr{I}_\wedge \cap \mathscr{T}^pV$. L'algèbre $\bigwedge V$ est alors une algèbre connexe graduée commutative (libre). Elle est de dimension finie si V est de dimension finie. C'est l'**algèbre extérieure** sur l'espace vectoriel V. On remarquera que l'idéal $\mathscr{I}_\wedge$ est aussi engendré par les éléments de la forme $v \otimes v$ pour $v \in V$.

Comme $\mathscr{T}V$, l'algèbre $\bigwedge V$ est elle aussi engendrée en degrés 0 et 1 par $\mathbb{C}$ et V (qui sont inclus dans cette algèbre puisque l'idéal $\mathscr{I}_\wedge$ ne commence qu'en degré 2). La seule chose qui puisse différencier $\mathscr{T}V$ et $\bigwedge V$ est donc le produit. C'est lui qui impose la structure de cette algèbre. Nous noterons $\wedge$ ce produit. C'est le **produit extérieur**.

Comme $\mathscr{T}V$, l'algèbre extérieure possède une propriété universelle d'extension d'application linéaires. En effet, si $\mathscr{A}$ est une algèbre associative unitaire, et si

$$\varphi : V \to \mathscr{A}$$

est une application linéaire qui satisfait à

$$\varphi(v)\varphi(v) = 0$$

dans $\mathscr{A}$ pour tout $v \in V$, alors il existe un unique prolongement de φ en un morphisme d'algèbres

$$\varphi : \bigwedge V \to \mathscr{A}$$

Il suffit en effet de poser

$$\varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \varphi(v_1)\ldots\varphi(v_p) \in \mathscr{A}$$

et $\varphi(\lambda\mathbb{1}) = \lambda\mathbb{1}$. C'est la **propriété universelle de l'algèbre extérieure**.

Ainsi, comme pour l'algèbre tensorielle, si

$$\delta_p : V \to \bigwedge^{1+p} V$$

est une application linéaire, alors il existe un unique prolongement de δ_p en une dérivation graduée de degré p

$$\delta_p : \bigwedge V \to \bigwedge V$$

Un cas particulier très intéressant est celui où l'espace vectoriel V est le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La théorie des groupes et algèbres de Lie nous apprend alors que cette algèbre extérieure sur $\mathfrak{g}^*$ est une sous-algèbre de l'algèbre des formes différentielles sur le groupe de Lie connexe dont $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie. Cette exemple sera reconsidéré plus loin, car le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ donne une structure supplémentaire à $\bigwedge\mathfrak{g}^*$.

1.3.5 L'algèbre symétrique sur un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel comme ci-dessus, et $\mathscr{T}V$ son algèbre tensorielle. Considérons l'idéal bilatère $\mathscr{I}_\mathsf{S}$ de cette algèbre engendré par les éléments de la forme $v\otimes w-w\otimes v \in \mathscr{T}^2V$. Alors l'algèbre quotient

$$\mathsf{S}V = \mathscr{T}V/\mathscr{I}_\mathsf{S}$$

est une algèbre graduée et commutative (et non « graduée commutative ») engendrée en degré 0 et 1 par $\mathbb{C}$ et V. C'est l'**algèbre symétrique** sur l'espace vectoriel V. Son produit sera noté par juxtaposition (sachant que tous les éléments commutent entre eux). Parfois, ce produit est aussi noté $\vee$. C'est le **produit symétrique**. Dans le cas où V est de dimension finie, il est facile de constater que cette algèbre est l'algèbre des polynômes sur V^*.

Il est très utile de changer la graduation de cette algèbre de façon à ce qu'elle devienne graduée commutative. Pour cela, il suffit de remarquer que si tous les éléments ont un degré pair, alors « graduée commutatif » et « commutatif » coïncident. On définit donc une nouvelle algèbre $\bigvee V$ dont l'espace vectoriel est le même que celui de $\mathsf{S}V$, mais où les éléments de S^nV sont maintenant *par définition* de degré $2n$. Donc on a $\bigvee^{2n}V = \mathsf{S}^nV$. En degré impair, on pose $\bigvee^{2n+1}V = \{0\}$. Il suffit alors de vérifier que le produit est compatible avec cette nouvelle graduation. Cette graduation fait de $\bigvee V$ une algèbre connexe graduée commutative (libre), engendrée en degrés 0 et 2 (par $\mathbb{C}$ et V).

L'algèbre symétrique possède elle aussi une propriété universelle. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire. Si $\varphi : V \to \mathscr{A}$ est une application linéaire telle que

$$\varphi(v)\varphi(w) = \varphi(w)\varphi(v)$$

dans $\mathscr{A}$ pour tous $v, w \in V$, alors il existe un unique prolongement de φ en un morphisme d'algèbres

$$\varphi : \bigvee V \to \mathscr{A}$$

Il suffit de poser $\varphi(v_1 \vee \cdots \vee v_p) = \varphi(v_1)\ldots\varphi(v_p)$ et $\varphi(\lambda\mathbb{1}) = \lambda\mathbb{1}$. C'est la **propriété universelle de l'algèbre symétrique**.

Les deux exemples qui viennent d'être décrits ont pour ambition de rendre plus « commutatif » le produit sur l'algèbre tensorielle, en quotientant cette algèbre par les anticommutateurs ou par les commutateurs, donc en « annulant » ces anticommutateurs ou ces commutateurs. Dans les deux exemples qui suivent, nous allons voir que le produit est plus subtil, car il est hérité d'une structure supplémentaire sur l'espace vectoriel.

1.3.6 L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Ce n'est donc rien de plus qu'un espace vectoriel munie d'une certaine opération (le crochet de Lie). Utilisons ce crochet pour définir l'idéal bilatère $\mathscr{I}_\mathfrak{g}$ de $\mathscr{T}\mathfrak{g}$ engendré par les éléments de la forme $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y] \in \mathscr{T}^1\mathfrak{g} \oplus \mathscr{T}^2\mathfrak{g}$. Quotienter $\mathscr{T}\mathfrak{g}$ par cet idéal revient à annuler dans l'algèbre obtenu (ou le produit est noté par juxtaposition, XY) les expressions de la forme $XY-YX-[X,Y]$. On note $\mathscr{U}(\mathfrak{g}) = \mathscr{T}/\mathscr{I}_\mathfrak{g}$ cette algèbre. C'est l'**algèbre enveloppante universelle** de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Cette algèbre n'est ni graduée ni commutative.

Le nom de cette algèbre vient des faits suivants. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre associative, il est possible de définir sur l'espace vectoriel sous-jacent une structure d'algèbre de Lie en définissant le crochet de Lie comme le commutateur dans $\mathscr{A}$: $[a, b] = ab - ba$. On note $\mathscr{A}_{\text{Lie}}$ cette algèbre de Lie. Remarquons que l'identité de Jacobi dans cette algèbre de Lie est une conséquence directe de l'associativité dans $\mathscr{A}$. Nous savons donc associer à toute algèbre associative une algèbre de Lie de façon canonique. On dira que $\mathscr{A}$ est une **algèbre enveloppante** de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{A}_{\text{Lie}}$. Parmi toutes les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$, il en existe une particulière, appelée algèbre enveloppante universelle, et notée $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, qui satisfait au critère d'universalité suivant.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative. Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathscr{A}_{\text{Lie}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors il existe une extension de φ en un morphisme d'algèbres associatives $\varphi' : \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$. C'est la **propriété universelle de l'algèbre enveloppante universelle**. Cette propriété assure l'unicité de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Il est facile de montrer que la construction de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ comme quotient de l'algèbre tensorielle $\mathscr{T}\mathfrak{g}$ vérifie cette propriété.

Soit maintenant η une représentation (au sens des algèbres de Lie) de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V. Alors, par définition même d'une représentation d'algèbre de Lie, η réalise une application

$$\eta : \mathfrak{g} \to \mathscr{L}(V)_{\text{Lie}}$$

Par la propriété universelle de l'algèbre enveloppante universelle $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, nous pouvons étendre η en

$$\eta : \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{L}(V)$$

Nous obtenons alors une représentation de l'algèbre associative unitaire $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ sur V. Réciproquement, si $\eta : \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{L}(V)$ est une représentation d'algèbre associative unitaire, alors cette représentation se restreint en une représentation d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} \subset \mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Il y a donc correspondance entre les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les représentations de l'algèbre associative unitaire $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$.

1.4 Exemples de variétés

1.4.1 Variétés courantes

L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable orientable de dimension n, non compacte. Une seule carte suffit, munie des n coordonnées cartésiennes usuelles. L'espace $\mathbb{C}^n$ est aussi une variété différentiable orientable, de dimension $2n$. Là encore une seule carte suffit. Plus généralement, tout espace vectoriel est une variété différentiable, sur laquelle une seule carte est nécessaire (les coordonnées peuvent être définies en référence à une base).

La **sphère** $\mathbb{S}^n$ est l'espace des $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1$. C'est une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension n. Les espaces $SU(2)$ et $\mathbb{S}^3$ sont homéomorphes.

La **boule** $\mathbb{D}^n$ est l'espace des $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 \leq 1$. C'est une variété différentiable compacte connexe de dimension n, dont le bord est $\mathbb{S}^{n-1}$. La boule $\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à l'espace quotient $(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1])/(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$. Dans cette construction, la boule est considérée comme un ensemble continu de sphères concentriques, la sphère la plus petite au centre étant réduite à un point.

Le **tore** $\mathbb{T}^n$ est l'espace produit de n cercles $\mathbb{S}^1$. C'est donc une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension n. Le groupe $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Le tore $\mathbb{T}^n$ s'identifie au quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de cette action.

Le groupe $\mathbb{Z}_2$ agit sur la sphère $\mathbb{S}^n$ par $x \mapsto -x$. L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$ est par définition le quotient $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ de cette action. C'est une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension n. On peut aussi la définir comme le quotient de l'action de $\mathbb{R}^*$ par homothéties sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. L'espace $\mathbb{RP}^1$ s'identifie au cercle $\mathbb{S}^1$. L'espace $SO(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^3$.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par multiplication sur chaque coordonnée. L'espace des orbites de cette action est l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$. Cette action induit une action de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ dont $\mathbb{CP}^n$ est aussi le quotient. $\mathbb{CP}^n$ est une variété différentiable compacte connexe par arcs de dimension $2n+1$. On peut montrer que $\mathbb{CP}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. L'application quotient $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ est l'application de Hopf. Pour $n = 1$, on obtient un fibré principal

$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$$

qu'on appelle le **fibration de Hopf**.

On peut définir de façon analogue les espaces projectifs sur les quaternions. Nous ne le ferons pas ici.

Soit λ une racine p-ième de l'unité. Le groupe $\mathbb{Z}_p$ agit sur la sphère $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par $(z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto (\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1})$. L'espace des orbites de cette action est l'espace lenticulaire $\mathbb{L}_p^{2n+1}$. C'est une variété différentiable compacte connexe sans bord de dimension $2n+1$. Pour $p = 2$, on voit facilement que $\mathbb{L}_2^{2n+1}$ s'identifie à $\mathbb{RP}^{2n+1}$.

Les variétés topologiques compactes connexes sans bord de dimension 2 ont été classées en deux grandes classes : celle qui sont orientables et celles qui ne le sont pas. Les surfaces orientables sont elles-même classées selon un entier, le genre g. Le genre généralise le nombre de trous au sens du tore $\mathbb{T}^2$, pour lequel le genre est 1. La sphère est de genre 0. On note M_g^2 cette variété, qu'on peut voir comme une sphère avec g anses. D'autres part, les surfaces non orientable ont été classées selon un entier μ. On note M_μ^2 ces variétés. Elles sont construire en « collant μ bandes de Möbius » à la sphère $\mathbb{S}^2$.[13] La surface $M_{\mu=2}^2$ est appelée la **bouteille de Klein**, et on a $M_{\mu=1}^2 \simeq \mathbb{RP}^1$.

Un k-repère dans $\mathbb{R}^n$ (pour $k \leq n$) est un ensemble de k vecteurs orthonormaux de $\mathbb{R}^n$. L'espace des k-repères de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable, qu'on note $V(k, \mathbb{R}^n)$. C'est la **variété réelle de Stiefel**. Dans le cas complexe, on considère les k-repères dans $\mathbb{C}^n$ (k vecteurs orthonormaux pour le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$). Cela définit la **variété complexe de Stiefel** $V(k, \mathbb{C}^n)$.

L'espace des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k est une variété différentiable $G(k, \mathbb{R}^n)$, qu'on appelle la **grassmannienne réelle** de $\mathbb{R}^n$, ou encore la **variété de Grassmann** réelle. De la même façon, on définit la **grassmannienne complexe** $G(k, \mathbb{C}^n)$ comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{C}^n$.

Les groupes de Lie usuels sont des variétés différentiables :

- $Gl(n, \mathbb{R})$ est de dimension n^2, il admet deux composantes connexes homéomorphes ;
- $O(n)$ est de dimension $(n^2 - n)/2$, compact et a deux composantes connexes homéomorphes ;
- $SO(n)$ est de dimension $(n^2 - n)/2$, compact et est connexe par arcs ;
- $Gl(n, \mathbb{C})$ est de dimension $2n^2$ et est connexe ;
- $U(n)$ est de dimension n^2, compact et est connexe par arcs ;

[13] De façon plus précise : pour coller une bande de Möbius à la sphère, on enlève un disque à la sphère, et on recolle le long du bord de ce trou une bande de Möbius. C'est possible car le bord de la bande de Möbius est une cercle, comme le bord du disque.

– $SU(n)$ est de dimension $n^2 - 1$, compact et est connexe par arcs.

L'inclusion $SU(n) \hookrightarrow U(n)$ induit un fibré principal

$$SU(n) \to U(n) \to \mathbb{S}^1$$

dont la projection $U(n) \to \mathbb{S}^1$ est le déterminant.

Le groupe $O(n)$ agit transitivement par rotations sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. Donc $\mathbb{S}^{n-1}$ est un espace homogène pour $O(n)$. On voit facilement que les sous-groupes d'isotropie de cette action sont isomorphes à $O(n-1)$. Donc

$$\mathbb{S}^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1)$$

On peut montrer de la même façon que

$$\mathbb{S}^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1)$$

et que

$$\mathbb{S}^{2n-1} \simeq U(n)/U(n-1) \simeq SU(n)/SU(n-1)$$

Par le même raisonnement, on montre que

$$\mathbb{RP}^n \simeq O(n+1)/(O(n) \times O(1)) \quad \text{et} \quad \mathbb{CP}^n \simeq U(n+1)/(U(n) \times U(1))$$

Le groupe $O(n)$ agit naturellement sur les éléments de $V(k, \mathbb{R}^n)$ par l'action induite de celle sur $\mathbb{R}^n$, puisqu'il envoie un k-repère sur un autre k-repère. Cette action est transitive, et son groupe d'isotropie est $O(n-k)$, c'est à dire le sous groupe qui laisse invariant le sous espace orthogonal à un k-repère. On a donc

$$V(k, \mathbb{R}^n) \simeq O(n)/O(n-k)$$

De façon tout à fait analogue, le groupe $O(n)$ agit sur les éléments de $G(k, \mathbb{R}^n)$ par l'action induite de celle sur $\mathbb{R}^n$. Cette action est transitive. Le sous-groupe d'isotropie est $O(k) \times O(n-k)$. En effet, le facteur $O(n-k)$ laisse globalement invariant un sous-espace de dimension k, et le facteur $O(k)$ agit dans ce sous-espace. On a donc

$$G(k, \mathbb{R}^n) \simeq O(n)/(O(k) \times O(n-k))$$

On a une situation semblable pour le cas complexe. D'autre part, tout k-repère de $\mathbb{R}^n$ définit un sous-espace vectoriel de dimension k. On a donc une projection canonique de $V(k, \mathbb{R}^n)$ sur $G(k, \mathbb{R}^n)$. Il est facile de voir que son noyau est isomorphe à $O(k)$. On a alors le fibré principal

$$O(k) \to V(k, \mathbb{R}^n) \to G(k, \mathbb{R}^n)$$

À Chaque point p de $G(k, \mathbb{R}^n)$, associons le sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$ qu'il représente, $E_p \subset \mathbb{R}^n$, et considérons la réunion

$$E(k, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{p \in G(k, \mathbb{R}^n)} E_p$$

Cette réunion est un fibré vectoriel canonique de fibre type $\mathbb{R}^k$ au dessus de $G(k, \mathbb{R}^n)$. L'espace $V(k, \mathbb{R}^n)$ est alors le fibré principal associé à $E(k, \mathbb{R}^n)$ pour la métrique de fibré sur $E(k, \mathbb{R}^n)$ induite par $\mathbb{R}^n$.

Ces considérations s'appliquent aussi de façon analogue au cas complexe.

1.4.2 Fibrés associés à une variété

Soit M est une variété différentiable. Nous avons déjà introduit son fibré vectoriel tangent TM, dont chaque fibre est l'espace tangent au dessus d'un point x de M. Le dual de ce fibré, T^*M, défini en considérant au dessus de x le dual T_x^*M (au sens des espaces vectoriels) de T_xM, est le **fibré cotangent**. Les sections de ce fibré sont les 1-formes différentielles sur M. On peut aussi introduire au dessus de x les espaces produits tensoriels $\mathscr{T}^p T_xM \otimes \mathscr{T}^q T_x^*M$, qui conduisent aux fibrés vectoriels des tenseurs de type (p, q) au dessus de M, $\mathscr{T}^{p,q}M$. Les p-formes différentielle sont les sections du fibré vectoriel $\bigwedge^p T^*M$ dont les fibres sont $\bigwedge^p T_x^*M$. L'algèbre des formes différentielles $\Omega^*(M)$ est l'espace des sections du fibré $\oplus_{p \geq 0} \bigwedge^p T^*M$.

Si S est une sous-variété d'une variété M, alors de façon naturelle l'espace tangent T_xS de S en $x \in S$ est un sous-espace vectoriel de T_xM. On définit le **fibré normal** NS à S dans M en prenant, pour tout $x \in S$, $N_xS = T_xM/T_xS$. En d'autres termes, on a la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to TS \hookrightarrow TM \to NS \to 0$$

Dans le cas où M est munie d'une métrique, alors en tout point $x \in S$ il est possible de considérer le sous-espace vectoriel orthogonal à T_xS dans T_xM. Ce sous-espace vectoriel est isomorphe à N_xS, et donc le fibré normal est isomorphe au fibré vectoriel orthogonal à TS dans TM. En présence d'une métrique, on prend préférentiellement ce fibré pour représenter le fibré normal.

Un exemple de tel fibré est le fibré normal à la sphère $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ pour la métrique euclidienne habituelle. Ce fibré normal est de rang 1, et les vecteurs qui le constituent sont radiaux par rapport à la sphère.

Bibliographie de ce chapitre

La géométrie différentielle est devenue un outil courant du physicien théoricien, c'est pourquoi de nombreux ouvrages de différents niveaux sont disponibles, dont voici un échantillon : M. Nakahara 1990 [Nak90], A. S. Schwarz 1996 [Sch96], Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette 1982 [CBDM82], R. Bertlmann 1996 [Ber96] sont des ouvrages plutôt destinés aux physiciens, S. Lang 1962 [Lan62], B. Doubrovine,S. Novikov, A. Fomenko 1982 [DNF82], S. Kobayashi, K. Nomizu 1963 [KN63], S. Sternberg 1983 [Ste83], R. Bott, L. W. Tu 1982 [BT82], G. E. Bredon 1993 [Bre93] sont des grands classiques mathématiques, B. Booss, D. D. Bleecker 1985 [BB85], D. Husemoller 1994 [Hus94], N. Steenrod 1951 [Ste51], I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák 1993 [KMS93] sont des ouvrages mathématiques plus spécialisés dans certains domaines (fibrés, théories de jauge, approche intrinsèque de la géométrie différentielle...). En ce qui concerne les algèbres associatives, on peut consulter des grands classiques : N. Bourbaki 1962 [Bou62], N. Jacobson 1985 [Jac85] et R. S. Pierce 1982 [Pie82].

Chapitre 2

Homologies et cohomologies

Ce chapitre est dédié aux définitions élémentaires sur les notions d'homologie et de cohomologie. Des propriétés générales sont données.

2.1 Définitions

Les notions d'homologie et de cohomologie qui suivent vont être définies dans le cadre des espaces vectoriels. En réalité, ces définitions n'utilisent qu'une structure de module sur un anneau. En particulier, dans les exemples qui seront donnés par la suite, on utilisera parfois des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$ (cas de l'homologie simpliciale par exemple). Dans ce qui suit, il ne sera fait mention de modules sur un anneau que lorsqu'une différence avec le cas des espaces vectoriels devra être notée. On peut d'ores et déjà remarquer que les définitions dans lesquelles apparaissent des applications linéaires entre espaces vectoriels pourront être transcrites sur les modules avec des morphismes de modules. L'autre grande différence se situe dans l'absence de toute référence à la notion de torsion, qui n'existe pas dans le cadre des espaces vectoriels. La torsion est introduite et étudiée dans tous les livres de mathématiques traitant de l'homologie.

2.1.1 Homologie d'espaces vectoriels différentiels

Un **espace vectoriel différentiel** est un espace vectoriel V muni d'un endomorphisme d tel que $d^2 = 0$, appelé **différentielle** sur V. On note (V, d) un tel espace vectoriel différentiel.

On peut alors associer à d deux sous-espaces vectoriels de V :

$$B(V) = \mathrm{Im}\, d = \{v \in V / v = dw\}$$
$$Z(V) = \mathrm{Ker}\, d = \{v \in V / dv = 0\}$$

Les éléments de $B(V)$ sont appelés les **bords** et les éléments de $Z(V)$ les **cycles** de (V, d). Des éléments quelconques de V sont appelés des **chaînes**.

Comme $d^2 = 0$, on a de façon évidente $B(V) \subset Z(V)$. On peut donc former le quotient d'espaces vectoriels

$$H(V) = Z(V)/B(V)$$

Cet espace vectoriel $H(V)$ est appelé l'**homologie** de (V, d). On dira que l'homologie de (V, d) est triviale si $H(V)$ est l'espace vectoriel réduit à l'élément nul.

Si (V, d) et (V', d') sont deux espaces vectoriels différentiels, un **morphisme d'espaces vectoriels différentiels** entre (V, d) et (V', d') est une application linéaire $f : V \to V'$ compatible avec les différentielles au sens où $d' \circ f = f \circ d$. De cette relation, on tire facilement que $f(Z(V)) \subset Z(V')$ et $f(B(V)) \subset B(V')$. Donc f passe au quotient, au sens où elle définit une application linéaire

$$f^\sharp : H(V) \to H(V')$$

2.1.2 Complexes différentiels

Un **complexe différentiel** est une suite d'espaces vectoriels $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'applications linéaires $d_n : V^n \to V^{n+1}$ telles que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout entier n. Les applications d_n sont appelées les **différentielles** du complexe. On note (V^*, d) ce complexe.

Il est bien sûr possible d'introduire des complexes décroissants, c'est à dire une suite d'espaces vectoriels avec des applications linéaires $d_n : V_n \to V_{n-1}$ (pour $n > 0$) telles que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Il est alors d'usage d'indicer en bas les espaces vectoriels. On note (V_*, d) ce complexe.

Il n'y a pas de différence conceptuelle entre les complexes croissants et les complexes décroissants. Seul le vocabulaire change. En particulier, comme on va le voir plus loin, on associe à des complexes différentiels croissants une **cohomologie** alors qu'on associe à des complexes différentiels décroissants une **homologie**. Ce n'est bien sûr, pour l'instant, qu'une différence de terminologie. Par la suite, on introduira de nouveaux objets dans le cadre de complexes croissants, mais des définitions équivalentes pourraient être données sur des complexes décroissants.

Un complexe différentiel définit en particulier un espace vectoriel différentiel, en posant

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^n$$

et $d = d_n$ sur V^n.

Pour $n > 0$, dans chaque espace vectoriel V^n, nous avons les sous-espaces $Z^n(V) = \mathrm{Ker}\, d_n$ et $B^n(V) = \mathrm{Im}\, d_{n-1}$. Les éléments de $Z^n(V)$ sont appelés les ***n*-cocycles** et les éléments de $B^n(V)$ les ***n*-cobords**. De façon générale, les éléments de V^n sont appelés les ***n*-cochaînes**. Nous n'avons, *a priori*, qu'une inclusion $\mathrm{Im}\, d_{n-1} \subset \mathrm{Ker}\, d_n$, c'est à dire $B^n(V) \subset Z^n(V)$. Nous pouvons donc former les quotients

$$H^n(V, d) = Z^n(V)/B^n(V)$$

Le cas particulier $n = 0$ est traité en posant $H^0(V, d) = \mathrm{Ker}\, d_0 \subset V^0$. Cela revient à introduire un espace vectoriel supplémentaire $V^{-1} = \{0\}$ dans le complexe (V^*, d), avec l'application $d_{-1} : V^{-1} \to V^0$ définie bien sûr par $d_{-1}(0) = 0$. La suite d'espaces vectoriels $H^n(V, d)$ est appelée la **suite de cohomologie** du complexe (V^*, d).

Nous posons

$$H^*(V, d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(V, d)$$

Cet espace vectoriel est la **cohomologie** du complexe (V^*, d).

Dans le cas d'un complexe décroissant, nous formons, pour $n > 0$,

$$H_n(V,d) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$$

Le cas $n = 0$ est défini aussi à part en posant $H_0(V,d) = V_0/\operatorname{Im} d_1$. Cela correspond à rajouter au complexe différentiel l'espace vectoriel $V_{-1} = \{0\}$ et l'application nulle $V_0 \to V_{-1}$. La suite d'espaces vectoriels $H_n(V,d)$ est la **suite d'homologie** du complexe (V_*, d). Dans ce cas, les éléments de $Z_n(V) = \operatorname{Ker} d_n$ sont appelés les ***n*-cycles**, et les éléments de $B_n(V) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ les ***n*-bords** du complexe. Les éléments de V_n sont appelés les ***n*-chaînes**. Nous notons $H_*(V,d)$ son **homologie**.

La cohomologie d'un complexe différentiel (V^*, d) est dite triviale, si $H^n(V,d) = \{0\}$ pour tout $n > 0$ et si $H^0(V,d)$ est le corps de base de l'espace vectoriel V^0.

Soient (V^*, d) et (V'^*, d') deux complexes (croissants). Nous dirons que l'application linéaire $f : V \to V'$ est un **morphisme de complexes différentiels** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f : V^n \to V'^n$ et $d'_{n+1} \circ f = f \circ d_n$. Un tel morphisme définit alors des applications linéaires en cohomologies

$$f^\sharp : H^n(V,d) \to H^n(V',d')$$

2.1.3 Algèbres différentielles

Dans le cas où l'espace vectoriel sur lequel on souhaite faire de la cohomologie est en plus une algèbre, il est possible de contraindre la différentielle d à être compatible avec le produit.

Soit donc $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire. Une **différentielle** sur $\mathscr{A}$ est une dérivation $d : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ de carré nul :

$$\begin{aligned} d(ab) &= (da)b + a(db) \\ d^2 &= 0 \end{aligned}$$

On dira alors que $(\mathscr{A}, d)$ est une **algèbre différentielle**. Sa cohomologie (ou son homologie, puisqu'ici il n'y a pas de graduation) est définie comme sur un espace vectoriel différentiel. Cependant, la structure d'algèbre, et la compatibilité entre la différentielle et le produit, donnent des propriétés supplémentaires.

Ainsi, l'espace vectoriel $Z(\mathscr{A}) = \operatorname{Ker} d$ des cocycles est une sous-algèbre de $\mathscr{A}$, et l'espace vectoriel $B(\mathscr{A}) = \operatorname{Im} d$ des cobords est un idéal bilatère de $Z(\mathscr{A})$. En effet, pour $x, y \in Z(\mathscr{A})$ nous avons $d(xy) = (dx)y + xdy = 0$. Donc $xy \in Z(\mathscr{A})$. Si maintenant $x \in Z(\mathscr{A})$ et $y \in \mathscr{A}$, alors il reste $d(xy) = xdy$. Donc xdy est un cobord. Le même raisonnement vaut pour $(dy)x$, et prouve que $B(\mathscr{A})$ est bien un idéal bilatère de $Z(\mathscr{A})$

Ceci implique alors que le quotient $H^*(\mathscr{A}, d) = Z(\mathscr{A})/B(\mathscr{A})$ est une algèbre, appelée **algèbre cohomologique** de $\mathscr{A}$.

On remarquera enfin que $d\mathbb{1} = 0$, comme il est facile de le voir en appliquant la différentielle à la relation $\mathbb{1}\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

2.1.4 Algèbres différentielles graduées

Soit maintenant $\mathscr{A}$ une algèbre graduée unitaire. On dira que $(\mathscr{A}^*, d)$ est une **algèbre différentielle graduée** si d est une dérivation graduée de degré $+1$ de $\mathscr{A}$ et de carré nul.

Donc d réalise des applications

$$d : \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}^{n+1}$$

telles que, pour tous $a_n \in \mathscr{A}^n$ et $b \in \mathscr{A}$,

$$d(a_n b) = (da_n)b + (-1)^n a_n (db)$$

et telles que

$$d^2 = 0$$

La cohomologie de $(\mathscr{A}^*, d)$ est alors une algèbre graduée, dont la graduation est héritée de celle de $\mathscr{A}$:

$$H^n(\mathscr{A}, d) = \operatorname{Ker}(d : \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}^{n+1}) / \operatorname{Im}(d : \mathscr{A}^{n-1} \to \mathscr{A}^n)$$

On peut montrer que si $(\mathscr{A}^*, d)$ est une algèbre différentielle graduée commutative, alors $H^*(\mathscr{A}, d)$ est aussi une algèbre graduée commutative.

2.1.5 Bicomplexes

Un **bicomplexe différentiel** est une suite d'espaces vectoriels $(V^{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ et d'applications $\delta : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ et $d : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$ telles que $\delta^2 = 0$, $d^2 = 0$, et $d\delta = \delta d$.[1]

Ce bicomplexe permet d'introduire différentes cohomologies. D'abord, on peut considérer les cohomologies de δ et d séparément, notées respectivement $H^{*,*}(V,\delta)$ et $H^{*,*}(V,d)$. Comme δ et d commutent, chacune induit une application sur la cohomologie de l'autre :

$$\begin{aligned} \delta &: H^{p,*}(V,d) \to H^{p+1,*}(V,d) \\ d &: H^{*,q}(V,\delta) \to H^{*,q+1}(V,\delta) \end{aligned}$$

Elles sont toutes deux de carré nul. Il est donc possible d'introduire leur cohomologies, que nous notons respectivement $H^{*,*}(V, d|\delta)$ et $H^{*,*}(V,\delta|d)$. Décrivons les éléments de $H^{*,*}(V, d|\delta)$. Une classe $[v^{p,q}]_{d|\delta} \in H^{p,q}(V, d|\delta)$ admet un représentant $[v^{p,q}]_d \in H^{p,q}(V,d)$ tel que $\delta[v^{p,q}]_d = [\delta v^{p,q}]_d = 0$. Ce représentant $[v^{p,q}]_d$ admet lui-même un représentant $v^{p,q} \in V^{p,q}$ tel que $dv^{p,q} = 0$. La relation $[\delta v^{p,q}]_d = 0$ signifie que $\delta v^{p,q} = -du^{p+1,q-1}$ pour un élément $u^{p+1,q-1} \in V^{p+1,q-1}$. Donc $\delta v^{p,q}$ n'est pas nul, mais il l'est modulo les bords pour d. On a ainsi la situation schématisée sous la forme

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ v^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \delta v^{p,q} + du^{p+1,q-1} = 0 \\ & u^{p+1,q-1} \arrow[u, "d"] \end{tikzcd}$$

Un élément nul $[v^{p,q}]_{d|\delta}$ dans $H^{p,q}(V, d|\delta)$ est représenté dans $H^{p,q}(V,d)$ par un cobord de la forme $[v^{p,q}]_d = \delta[w^{p-1,q}]_d = [\delta w^{p-1,q}]_d$ pour un $w^{p-1,q} \in V^{p-1,q}$. Cette relation s'écrit dans

[1] Parfois on choisit plutôt la relation $d\delta + \delta d = 0$. Pour passer d'une convention à l'autre, il suffit de redéfinir d en posant $d'v^{p,q} = (-1)^p dv^{p,q}$ pour tout $v^{p,q} \in V^{p,q}$.

$V^{p,q}$ sous la forme $v^{p,q} = \delta w^{p-1,q} + du^{p,q-1}$. On a donc le schéma

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
w^{p-1,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \delta w^{p-1,q} + du^{p,q-1} = v^{p,q} \\
& u^{p,q-1} \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}$$

Comme on peut le constater, toutes les relations usuelles définissant une cohomologie sont écrites modulo des cobords pour d. C'est pourquoi la cohomologie $H^{*,*}(V, d|\delta)$ est appelée la **cohomologie de $(V^{*,*}, \delta)$ modulo d**. La situation est tout à fait semblable pour $H^{*,*}(V, \delta|d)$, qui est la cohomologie de $(V^{*,*}, d)$ modulo δ. Ces deux cohomologies sont *a priori* différentes.

À partir du bicomplexe différentiel $(V^{*,*}, \delta, d)$, on peut construire un complexe différentiel (V^*, D), appelé **complexe total** pour $V^{*,*}$, de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$V^n = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$$

et $Dv^{p,q} = \delta v^{p,q} + (-1)^p dv^{p,q}$. Il est facile de voir que $D^2 = 0$.[2] On peut alors introduire la cohomologie de ce complexe total $H^*(V, D)$. Cette cohomologie sera reliée à d'autres cohomologies par la suite.

2.2 Propriétés générales

2.2.1 Suites exactes

Les notions d'homologie et de cohomologie, entretiennent une relation étroite avec la notion de suites exactes.

Soit $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels, et soient $f_n : V^n \to V^{n+1}$ une suite d'applications linéaires. Nous dirons que la suite

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V^n \xrightarrow{f_n} V^{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

est **exacte** en V^n si

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n$$

Nous dirons que c'est une **suite exacte** si elle est exacte en tout V^n.

Notons 0 l'espace vectoriel réduit à l'élément nul. Pour tout espace vectoriel V, il existe une unique application linéaire $0 \to V$, celle qui envoie 0 sur $0 \in V$, et il existe une unique application linéaire $V \to 0$, celle qui envoie tout $v \in V$ sur 0.

Alors la suite $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V$ est exacte si et seulement si i est injective, et la suite $V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si π est surjective.

[2] Naïvement, on aurait pu prendre $D = \delta + d$. Mais on n'a pas alors $D^2 = 0$. Si nous étions partis de deux différentielles δ et d telles que $d\delta + \delta d = 0$, alors on aurait bien eu $(\delta + d)^2 = 0$.

Par conséquent, la suite $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si f est un isomorphisme.

Nous dirons que la suite $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$ est une **suite exacte courte** si elle est exacte.

L'exactitude en U signifie que i est injective, donc que U est isomorphe à $i(U) \subset V$. L'exactitude en W signifie que π est surjective, donc que W est isomorphe à $V/\operatorname{Ker}\pi$. Or, l'exactitude en V signifie $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i = i(U) \simeq U$, donc on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$W \simeq V/U$$

Une suite exacte courte comme ci-dessus est dite **scindée**, si il existe une application linéaire $\phi : W \to V$ telle que $\pi \circ \phi = \mathrm{Id}_W$. Dans ce cas, tout élément $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = \phi \circ \pi(v) + v_U$ avec $v_U \in \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i$, donc $v_U = i(u)$ pour un $u \in U$. Nous avons donc la décomposition $V \simeq U \oplus W$.

La notion de suite exacte n'est pas restreinte à des espaces vectoriels. Il est possible de définir des suites exactes d'algèbres de Lie (les morphismes sont alors des morphismes d'algèbres de Lie), d'algèbres associatives (avec des morphismes d'algèbres associatives), de groupes, ou bien encore de modules. Cependant, dans le cas des suites exactes courtes, il faut clairement expliciter en quel sens elle est éventuellement scindée, car une suite exacte courte d'algèbre de Lie peut très bien être scindée comme suite exacte courte d'espaces vectoriels et ne pas l'être pour la structure supplémentaire d'algèbre de Lie (le morphisme ϕ qui scinde n'étant pas nécessairement un morphisme d'algèbres de Lie). D'autre part, on sait très bien qu'il est toujours possible de scinder une suite exacte courte d'espaces vectoriels, puisqu'il s'agit de trouver en fait un supplémentaire à U dans V, que l'on identifie ensuite à W. Dans la situation beaucoup plus générale de modules sur un anneau, où toutes ces notions ont encore un sens, comme il est facile de le voir, il n'est pas toujours possible de scinder une suite exacte courte.

Si (V^*, d) est un complexe différentiel, alors sa cohomologie $H^*(V, d)$ n'est autre qu'une mesure de la non exactitude de la suite $\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} V^n \xrightarrow{d_n} V^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$, puisque $H^n(V, d)$ compare $\operatorname{Im} d_{n-1}$ à $\operatorname{Ker} d_n$.

Considérons maintenant la suite exacte courte de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow (U^*, d_U) \xrightarrow{\varphi} (V^*, d_V) \xrightarrow{\psi} (W^*, d_W) \longrightarrow 0$$

où les φ et ψ sont des morphismes de complexes différentiels. Alors on peut montrer qu'il existe un morphisme

$$\partial : H^*(W, d_W) \to H^*(U, d_U)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^*(U, d_U) \arrow[rr, "\varphi^\sharp"] & & H^*(V, d_V) \\
& H^*(W, d_W) \arrow[ul, "\partial"] \arrow[ur, "\psi^\sharp"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, soit $\alpha \in H^*(W, d_W)$. Comme la suite est exacte, il existe $x \in V$ tel que $\psi(x)$ soit un représentant de la classe α. En particulier, $d_W\psi(x) = 0$. De $\psi(d_V x) = d_W\psi(x)$, nous tirons alors $d_V x \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Donc il existe $u_x \in U$ tel que $\varphi(u_x) = d_V x$. On vérifie facilement que u_x est un cocycle, puisque φ est injective. Soit $\beta \in H^*(U, d_U)$ la classe de u_x. Nous posons $\partial\alpha = \beta$. Il faut alors montrer que cette définition a un sens, c'est à dire que la classe β est indépendante des choix faits dans cette définition. Si $y \in V$ est tel que $\psi(y)$ est un autre représentant de la classe α, alors, avec des notations évidentes, nous avons $\psi(y) - \psi(x) = d_W w = d_W\psi(z) = \psi(d_V z)$. Donc $y - x - d_V z \in \operatorname{Ker}\psi$. Or, $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$, donc $d_V y = d_V x + d_V\varphi(u_I)$ pour un $u_I \in U$. Alors $\varphi(u_y) = d_V y = d_V x + d_V\varphi(u_I) = \varphi(u_x) + \varphi(d_U u_I)$. Comme φ est injective, cela implique $u_y = u_x + d_U u_I$, c'est à dire que la classe de cohomologie de u_y est la même que celle de u_x.

Par construction, nous voyons que nous avons la commutativité du diagramme.

Il faut remarquer que nous avons

$$\partial : H^n(W, d_W) \to H^{n+1}(U, d_U)$$

ce qui fait que le diagramme triangulaire ci-dessus est en réalité une longue suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^n(U, d_U) \xrightarrow{\varphi^\sharp} H^n(V, d_V) \xrightarrow{\psi^\sharp} H^n(W, d_W) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(U, d_U) \longrightarrow \cdots$$

Ce genre de suite exacte est très utile pour calculer des cohomologies. Par exemple, si l'une des cohomologies est triviale, alors cette longue suite exacte se réduit à des suites exactes qui représentent des isomorphismes entre les 2 cohomologies qui restent. Ainsi, si $H^*(U, d_U)$ est triviale, alors $H^*(V, d_V)$ et $H^*(W, d_W)$ sont isomorphes. Il en est de même en permutant le rôle des complexes.

2.2.2 Homotopies

Soient (U^*, d_U) et (V^*, d_V) deux complexes différentiels croissants. Deux morphismes de complexes différentiels $\varphi, \varphi' : U \to V$ sont dit **homotopes** s'il existe un morphisme de degré -1, $D : U^n \to V^{n-1}$ tel que

$$d_{V,n-1}D + Dd_{U,n} = \varphi_n - \varphi'_{n-1} : U^n \to V^n$$

On note $\varphi \simeq \varphi'$ deux morphismes de complexes différentiels qui sont homotopes. L'homotopie définit une relation d'équivalence entre les morphismes de complexes différentiels.

Le résultat essentiel de la théorie de l'homotopie est le suivant : si $\varphi, \varphi' : (U^*, d_U) \to (V^*, d_V)$ sont homotopes, alors $\varphi^\sharp = \varphi'^\sharp : H^*(U, d_U) \to H^*(V, d_V)$.

Une **homotopie contractante** d'un complexe différentiel (V^*, d) est une homotopie entre les morphismes de complexes différentiels $\mathrm{Id} : (V^*, d) \to (V^*, d)$ (application identité) et $0 : (V^*, d) \to (V^*, d)$ (application nulle). Ainsi une telle homotopie D satisfait à $dD + Dd = \mathrm{Id}$ sur V.

Si (V^*, d) admet une homotopie contractante, alors sa cohomologie est triviale. En effet, soit $v \in V$ un cycle ($dv = 0$). Alors en lui appliquant la relation $dD + Dd = \mathrm{Id}$, on obtient $dDv = v$, c'est à dire que v est un bord.

La notion d'homotopie contractante admet des généralisations assez variées. La plus simple consiste à considérer différentes possibilités de signes dans la relation $dD + Dd = \mathrm{Id}$. Ce qu'il faut en retenir, c'est qu'il existe parfois de telles applications qui permettent d'associer à tout cycle (ou cocycle) un élément dont ce cycle est le bord (ou le cobord). Ces applications simplifient considérablement les calculs de cohomologies.

2.2.3 Complexe adjoint

Soit (V_*, ∂) un complexe décroissant. On lui associe son **complexe adjoint** en prenant pour espace vectoriel gradué le dual de V_*, qu'on note $V^* = \oplus_{n\in\mathbb{N}} V^n$ où V^n est le dual de V_n, et pour différentielle $d : V^n \to V^{n+1}$ définie par dualité

$$(df)(v_{n+1}) = f(\partial v_{n+1})$$

pour tout $f \in V^n$. $d^2 = 0$ est une conséquence de $\partial^2 = 0$.

Dans le cas où (V_*, ∂) est un complexe décroissant constitué d'anneaux sur $\mathbb{Z}$ (et non d'espaces vectoriels), si G est un groupe abélien, on définit le **complexe adjoint à valeurs dans G** par

$$V^n = \hom(V_n, G)$$

où $\hom(V_n, G)$ désigne les morphismes de groupes abéliens entre V_n et G. La différentielle $d : V^n \to V^{n+1}$ est définie par dualité comme précédemment : $(df)(v_{n+1}) = f(\partial v_{n+1})$. On note $H^*(V, G)$ la **cohomologie du complexe V_* à valeurs dans G**.

Dans le cas où $G = \mathbb{K}$ est un corps commutatif (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{Z}_p$ pour p premier), et (V_*, ∂) un complexe décroissant d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, où les V_n sont de dimensions finies, on peut montrer que les espaces vectoriels $H^n(V, \mathbb{K})$ et $H_n(V)$ sont duaux l'un de l'autre. Il revient donc au même de calculer l'un ou l'autre.

2.2.4 Produit tensoriel de complexes différentiels

Soient (U^*, d_U) et (V^*, d_V) deux complexes différentiels croissants (d'espaces vectoriels). Le produit tensoriel $W = U \otimes V$ est un bicomplexe pour la graduation $W^{p,q} = U^p \otimes V^q$ et les différentielles d_U et d_V (qui commutent puisqu'elles opèrent sur des espaces différents). On définit le complexe différentiel (W^*, d_W) comme le complexe total du bicomplexe $(W^{*,*}, d_U, d_V)$. Ainsi, la différentielle $d_W : W^n \to W^{n+1}$ prend la forme

$$d_W(u_p \otimes v_q) = (d_U u_p) \otimes v_q + (-1)^p u_p \otimes (d_V v_q)$$

pour $u_p \in U^p$ et $v_q \in V^q$ avec $p + q = n$.

On peut montrer que la cohomologie de (W^*, d_W) est reliée aux cohomologies de (U^*, d_U) et de (V^*, d_V) par

$$H^n(W, d_W) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(U, d_U) \otimes H^q(V, d_V)$$

C'est la **formule de Künneth**. Cette formule se révèle très utile dans la pratique, car elle permet de calculer dans des cas concrets des cohomologies. Attention, ce résultat n'est plus vrai pour des complexes d'anneaux sur $\mathbb{Z}$. En effet, dans ce cas, il peut exister un espace non nul, qu'on appelle la torsion, qui entre dans une suite exacte courte avec les espaces $H^*(W, d_W)$ et $H^*(U, d_U) \otimes H^*(V, d_V)$.

2.2.5 Augmentation d'un complexe

Soit (W^*, d) un complexe différentiel. Une **augmentation** de ce complexe est la donnée d'un bicomplexe $(V^{*,*}, \delta, d)$ et d'une application injective $r : W^q \to V^{0,q}$ telle que $\delta \circ r = 0$ et $dr = rd$. En d'autres termes, W s'injecte dans un bicomplexe de façon compatible avec la différentielle du bicomplexe. On peut donc considérer la suite de complexes différentiels

$$0 \longrightarrow W^* \xrightarrow{r} V^{0,*} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} V^{p,*} \xrightarrow{\delta} V^{p+1,*} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

On a alors l'important résultat pratique suivant : si les suites

$$0 \longrightarrow W^q \xrightarrow{r} V^{0,q} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} V^{p,q} \xrightarrow{\delta} V^{p+1,q} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

sont exactes pour tous $q \geq 0$, alors on a

$$H^*(V, D) = H^*(W, d)$$

Il est évident que r induit une application $r^* : H^*(W, d) \to H^*(V, D)$. Cette application est un isomorphisme. On va s'intéresser à la surjectivité de cette application. Pour cela, soit $v^n \in H^n(V, D)$, dont on choisit un représentant $\alpha^n \in V^n$. L'élément α^n s'écrit sous forme d'une somme $\alpha^n = \sum_{r=0}^n \alpha^{r,n-r}$ pour $\alpha^{r,n-r} \in V^{r,n-r}$. La relation $D\alpha^n = 0$ se répercute sur les $\alpha^{r,n-r}$ sous la forme

$$\delta\alpha^{r,n-r} + (-1)^{r+1} d\alpha^{r+1,n-r-1} = 0 \in V^{r+1,n-r}$$

pour $0 \leq r \leq n-1$ et

$$\delta\alpha^{n,0} = 0$$

pour $r = n$, puisqu'il n'y a pas d'élément dans $V^{n+1,-1}$. La cohomologie de δ est triviale par hypothèse. Donc il existe $\beta^{n-1,0} \in V^{n-1,0}$ tel que $\delta\beta^{n-1,0} = \alpha^{n,0}$. On peut considérer $\beta^{n-1,0}$ comme un élément de V^{n-1}. La différence $\alpha^n - D\beta^{n-1,0} \in V^n$ est un autre représentant de la classe v^n qui a pour particularité de ne pas avoir de composante dans $V^{n,0}$. Sur ce représentant, on peut reproduire la construction précédente, qui élimine cette fois la composante dans $V^{n-1,1}$. De proche en proche, on obtient un représentant qu'on note encore α^n tel que $\alpha^{0,n} \neq 0$ et toutes les autres composantes sont nulles. La relation $D\alpha^{0,n} = 0$ signifie $d\alpha^{0,n} = 0$ et $\delta\alpha^{0,n} = 0$. De cette seconde relation on déduit l'existence de $\gamma^n \in W^n$ tel que $r\gamma^n = \alpha^{0,n}$. Alors $r(d\gamma^n) = d(r\gamma^n) = d\alpha^{0,n} = 0$. Donc $d\gamma^n$ est dans le noyau de r, qui est par hypothèse nul. D'où $d\gamma^n = 0$. L'élément $\gamma^n \in W^n$ définit une classe de cohomologie $w^n \in H^n(W^*, d)$ telle que $r^* w^n = v^n$. Donc r^* est bien surjective. L'injectivité utilise une technique semblable sur le représentant $\alpha^{n-1} \in V^{n-1}$ tel que $r(\gamma^n) = D\alpha^{n-1}$.

2.2.6 Le lemme « Tic-Tac-Toe »

Soit $(V^{*,*}, \delta, d)$ un bicomplexe différentiel. On fixe l'application δ comme horizontale, et d comme verticale. Le **lemme « tic-tac-toe »** dit que si la cohomologie $H^{*,*}(V, d|\delta)$ n'admet qu'une seule ligne non nulle, alors cette cohomologie est isomorphe à $H^*(V, D)$.

Pour démontrer ce résultat, on construit deux applications inverses l'une de l'autre d'un des espaces vers l'autre, $h : H^{*,*}(V, d|\delta) \to H^*(V, D)$ puis $g : H^*(V, D) \to H^{*,*}(V, d|\delta)$.

On utilise les notations déjà introduites sur les bicomplexes, en particulier p indexe les colonnes et q les lignes. On note $d' = (-1)^p d$, afin que $D = \delta + d'$. Soit donc $v^{p,q} \in H^{p,q}(V, d|\delta)$ dans la ligne non nulle, dont on choisit une représentant $\alpha^{p,q} \in V^{p,q}$. Ce représentant satisfait à $d'\alpha^{p,q} = 0$ puisque c'est un cocycle pour d, et $\delta\alpha^{p,q} = -d'\alpha^{p+1,q-1}$ pour un $\alpha^{p+1,q-1} \in V^{p+1,q-1}$ puisque c'est un cocycle pour δ modulo d. Il est facile de voir que $d\delta\alpha^{p+1,q-1} = 0$ en utilisant $\delta^2 = 0$ sur $\alpha^{p,q}$. Donc on a le schéma :

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
\alpha^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \delta\alpha^{p,q} + d'\alpha^{p+1,q-1} = 0 & 0 \\
& \alpha^{p+1,q-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & \delta\alpha^{p+1,q-1} \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}$$

L'élément $\delta\alpha^{p+1,q-1}$ définit donc un élément de $H^{p+2,q-1}(V, d)$, et comme $\delta^2 = 0$, cet élément est un cocycle pour δ. La cohomologie à cet endroit est triviale, donc il existe $[\beta^{p+1,q-1}]_d \in H^{p+1,q-1}(V, d)$ tel que $[\delta\alpha^{p+1,q-1}]_d = \delta[\beta^{p+1,q-1}]_d$. Dans $V^{p+2,q-1}$, cette relation s'écrit $\delta\alpha^{p+1,q-1} = \delta\beta^{p+1,q-1} - d'\alpha^{p+2,q-2}$. L'élément $\beta^{p+1,q-1}$ est dans le noyau de d, donc on peut remplacer $\alpha^{p+1,q-1}$ par $\alpha^{p+1,q-1} - \beta^{p+1,q-1}$ dans le schéma ci-dessus. On note encore $\alpha^{p+1,q-1}$ cet élément. Donc, dans $V^{p+2,q-1}$, on a $\delta\alpha^{p+1,q-1} + d'\alpha^{p+2,q-2} = 0$. Ce processus peut être itéré, et cela génère des $\alpha^{p+r,q-r}$ jusqu'à $r = q$. La somme $\alpha^{p+q} = \sum_{r=0}^q \alpha^{p+r,q-r}$ est un élément de V^{p+q} dans le noyau de D, donc définit un élément $h(v^{p,q}) \in H^{p+q}(V, D)$.

On va définir g. Soit $v^n \in H^n(V, D)$, de représentant $\alpha^n \in V^n$, $D\alpha^n = 0$. On écrit α^n sous la forme $\alpha^n = \sum_{r=0}^n \alpha^{n-r,r}$. On ne peut pas prendre l'élément $\alpha^{n-q,q}$ (où q est tel que $H^{*,q}(V, d|\delta)$ soit la ligne non nulle) comme représentant de $g(v^n)$, car on n'a pas nécessairement $d\alpha^{n-q,q} = 0$. On va voir qu'il est possible d'ajouter des D-cobords à α^n pour annuler les $\alpha^{n-r,r}$ pour $r > q$ (on s'intéresse donc à ce qui se passe *au dessus* de la ligne non nulle en cohomologie). L'élément $\alpha^{0,n}$ satisfait à $d\alpha^{0,n} = 0$ et $\delta\alpha^{0,n} + d'\alpha^{1,n-1} = 0$. Ces relations signifient que $\alpha^{0,n}$ définit un élément de $H^{0,n}(V, d|\delta)$. Or cette cohomologie est triviale à cet endroit. De plus il n'y a pas de δ-cobords à cet endroit, donc $[\alpha^{0,n}]_d = 0$, c'est à dire $\alpha^{0,n} = -d'\beta^{0,n-1}$. Remplaçons maintenant α^n par $\alpha^n - D\beta^{0,n-1}$, en gardant la même notation. Alors $\alpha^{0,n} = 0$ pour ce nouveau représentant. L'élément $\alpha^{1,n-1}$ vérifie $d\alpha^{1,n-1} = 0$ et $\delta\alpha^{1,n-1} + d'\alpha^{2,n-2} = 0$, et donc définit à son tour un élément de $H^{1,n-1}(V, d|\delta)$, qui est triviale à cet endroit. Donc $\alpha^{1,n-1} = \delta\beta^{0,n-1} + d'\beta^{1,n-2}$, avec $d\beta^{0,n-1} = 0$. Le nouveau représentant $\alpha^n - D(\beta^{0,n-1} + \beta^{1,n-2})$ n'a pas de composante dans $V^{1,n-1}$. En itérant ce processus, on peut construire un représentant α^n de v^n tel que $\alpha^{n-r,r} = 0$ pour $r > q$. Pour ce représentant, $d\alpha^{n-q,q} = 0$ et $\delta\alpha^{n-q,q} + d'\alpha^{n-q+1,q-1} = 0$, et on pose $g(v^n)$ la classe de $\alpha^{n-q,q}$ dans $H^{n-q,q}(V, d|\delta)$.

Ces constructions sont des illustrations des manipulations courantes sur les bicomplexes. Le lemme énoncé admet une version équivalente en intervertissant d et δ.

Bibliographie de ce chapitre

Il existe de nombreux ouvrages généraux sur l'homologie et la cohomologie. Malheureusement, bien souvent ils sont très mathématiques. Je conseille donc le tome 3 de B. Dou-brovine, S. Novikov, A. Fomenko 1982 [DNF82] et le tome 9 de J. Dieudonné 1970

[Die70] qui donnent des définitions générales. On peut trouver aussi dans E. H. Spanier 1966 [Spa66], N. Jacobson 1985 [Jac85], R. Bott, L.W. Tu 1982 [BT82] M. Postnikov 1990 [Pos90] et G. E. Bredon 1993 [Bre93] des développements généraux sur ce sujet, mais assez mathématiques.

Chapitre 3

Homologies, cohomologies et topologie

Ce chapitre introduit les homologies et cohomologies les plus courantes définies sur les espaces topologiques et les variétés différentiables. Historiquement, la topologie a été un moteur dans l'élaboration des concepts de l'homologie algébrique. Ce bref chapitre ne se veut pas un exposé complet de ce vaste domaine.

3.1 Homologie simpliciale

L'homologie simpliciale fait partie des premières tentatives pour définir une homologie qui donne des invariants topologiques. Cette homologie est de nature entièrement géométrique, et consiste à considérer des « blocs élémentaires » (points, triangles, tétraèdres, ...) à partir desquels on reconstruit l'espace à étudier. On parle de triangulation de l'espace. Nous allons donc définir ces blocs élémentaires puis le complexe différentiel à partir duquel on calcule cette homologie.

3.1.1 Simplexes de $\mathbb{R}^N$

Dans ce qui suit, on se place dans $\mathbb{R}^N$. Soient $v_0, \dots, v_p$ $(p+1)$ points distincts de $\mathbb{R}^N$. On dira qu'ils sont **géométriquement indépendants** si les p vecteurs $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, ..., $v_p - v_0$ de $\mathbb{R}^N$ sont linéairement indépendants.

Un ***p*-simplexe** σ^p est alors un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\sigma^p = \{x \in \mathbb{R}^N \ / \ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1\}$$

où les v_i sont $(p+1)$ points de $\mathbb{R}^N$ géométriquement indépendants. Les λ_i sont les **coordonnées barycentriques** de $x \in \sigma^p$. p est la dimension du simplexe. On note $\sigma^p = [v_0 v_1 \dots v_p]$ un tel p-simplexe. C'est un compact de $\mathbb{R}^N$. On dira que les v_i sont les **vertex** de σ^p, et que le sous-espace

$$\{x \in \mathbb{R}^N \ / \ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_j = 0\}$$

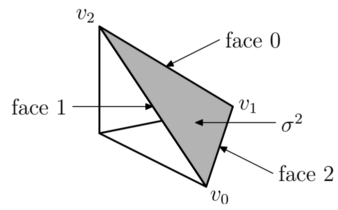

FIG. 3.1 – Faces d'un simplexe.

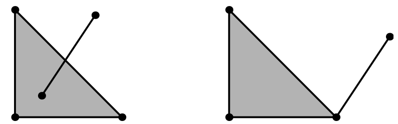

FIG. 3.2 – L'objet de gauche n'est pas un complexe simplicial. L'objet de droite est un complexe simplicial.

est la j-ième **face** de σ^p (face opposée au vertex v_j, voir la figure 3.1.).

Les simplexes de dimension 0 de $\mathbb{R}^N$ sont les points. En dimension 1 on a les segments, en dimension 2 les triangles (pleins), en dimension 3 les tétraèdres (pleins), *etc...*

3.1.2 Complexe simplicial

Un **complexe simplicial** K est un ensemble fini de simplexes de $\mathbb{R}^N$ tel que :
- Si $\sigma^p \in K$, alors toutes les faces de σ^p sont aussi dans K ;
- Si $\sigma^p, \sigma^q \in K$, alors ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q = \varnothing$, ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q$ est une face commune à σ^p et σ^q (donc un élément de K).

La dimension de K est la dimension maximale de ses simplexes.

Afin de définir une opération bord sur les complexes simpliciaux, il faut orienter les simplexes. Pour cela, on se donne un ordre sur les vertex du simplexe. On note $\sigma^p = \langle v_0 \dots v_p \rangle$ un ***p*-simplexe orienté**. Si on change l'ordre des vertex, on sort un signe ± 1 selon la signature de la permutation qui change l'ordre. Ainsi, avec cette règle on a $\langle v_0 v_1 \rangle = -\langle v_1 v_0 \rangle$ et $\langle v_0 v_1 v_2 \rangle = -\langle v_1 v_0 v_2 \rangle = \langle v_1 v_2 v_0 \rangle$ *etc...*

Soit maintenant K un complexe simplicial de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. On note $\ell(p)$ le nombre de p-simplexes dans K. Le **groupe des *p*-chaînes** de K, noté $C_p(K)$, est le groupe abélien libre engendré par les p-simplexes orientés de K. En d'autres termes, une p-chaîne de $C_p(K)$ est une somme formelle

$$c = \sum_{i=1}^{\ell(p)} n_i \sigma_i^p$$

où les σ_i^p sont les $\ell(p)$ p-simplexes de K et $n_i \in \mathbb{Z}$.

On peut alors définir une opération **bord**

$$\partial_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$$

en posant

$$\partial_p\langle v_0 \dots v_p\rangle = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots v_p\rangle$$

où $\widehat{v_i}$ signifie qu'on omet le vertex v_i (on obtient donc un $(p-1)$-simplexe) et $\partial_0\langle v_0\rangle = 0$. On prolonge ∂_p par linéarité sur $\mathbb{Z}$ sur tout $C_p(K)$:

$$\partial_p c = \sum_{i=0}^{\ell(p)} n_i \partial_p \sigma_i^p$$

On peut alors très facilement montrer que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$. On obtient ainsi un complexe différentiel (décroissant)

$$C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Dans ce complexe différentiel, les espaces $C_p(K)$ ne sont pas des espaces vectoriels mais seulement des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. L'homologie de ce complexe est l'**homologie simpliciale de $\boldsymbol{K}$**, que l'on note $H_*(K)$. On peut aussi introduire la **cohomologie simpliciale de $\boldsymbol{K}$** comme la cohomologie adjointe du complexe $C_*(K)$ (à valeurs dans $\mathbb{Z}$). On la note $H^*(K)$.

Pour un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^N$ donné, l'union des simplexes de K, considérés comme sous-espaces de $\mathbb{R}^N$, est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^N$, qu'on appelle le **polyèdre** de K, et qu'on note $|K|$. On dira qu'un espace topologique X est **triangulable** s'il existe un complexe simplicial K tel que X soit homéomorphe à $|K|$. On peut montrer que toute variété compacte est triangulable. On définit alors l'**homologie simpliciale de $\boldsymbol{X}$** comme l'homologie simpliciale de K. L'homologie simpliciale de X est un invariant topologique, c'est à dire que si X' est un espace topologique homéomorphe à X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On peut montrer en effet que si K et K' sont deux complexes simpliciaux qui fournissent toutes les deux des triangulations de X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On définit la **cohomologie simpliciale de $\boldsymbol{X}$** comme la cohomologie simpliciale de K. C'est aussi un invariant topologique.

3.2 Homologie singulière

Contrairement à l'homologie simpliciale, l'homologie singulière s'applique à tout espace topologique. Elle généralise l'homologie simpliciale en considérant non plus des « triangles » mais des applications partant de triangles standards à valeurs dans l'espace topologique étudié.

3.2.1 Complexe singulier

Simplexes singuliers

Dans $\mathbb{R}^N$, on considère la base canonique $e_1, \dots, e_N$ avec $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ où 1 est à la i-ème position. On ajoute à cette base, considérée comme des points de $\mathbb{R}^N$, l'élément 0, noté e_0. On peut de façon canonique inclure $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ en posant $(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N, 0)$. On note donc par les mêmes symboles les éléments de la base canonique de

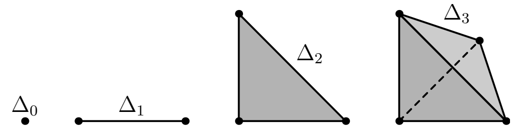

FIG. 3.3 – Les p-simplexes standards de $\mathbb{R}^\infty$ pour $p = 0, 1, 2, 3$.

$\mathbb{R}^{N+1}$ qui viennent de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathbb{R}^\infty$ la « limite » des inclusions $\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$.

Le **$\boldsymbol{p}$-simplexe standard** de $\mathbb{R}^\infty$ est défini comme

$$\Delta_p = \{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \ / \ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

Pour $p = 0$, Δ_0 est donc le point origine e_0 de $\mathbb{R}^\infty$; pour $p = 1$, Δ_1 est le segment qui joint e_0 à e_1 ; *etc...* (voir la figure 3.3.)

Étant donnés $n+1$ points $v_0, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^N$, on note $[v_0, \dots, v_n]$ l'application $\Delta_n \to \mathbb{R}^N$ définie par $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$. On appelle cette application un **$\boldsymbol{n}$-simplexe singulier affine**. On remarquera que l'image de $[v_0, \dots, v_n]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^N$ engendré par les combinaisons connexes des points $v_0, \dots, v_n$. Ici, on ne suppose pas que ces points soient géométriquement indépendants, ce qui signifie que cette image puisse être dégénérée. Par exemple, l'image de $[e_0, e_1, e_2, e_2]$ est un triangle, et non un tétraèdre. C'est de là que vient le mot « singulier ».

Une expression du type $[v_0, \dots \widehat{v_i} \dots, v_n]$ signifie que l'on omet le point v_i. Ainsi par exemple, $[e_0, \dots \widehat{e_i} \dots, e_n]$ est un $(p-1)$-simplexe singulier affine dont l'image est contenue dans Δ_p. On note $F_i^p = [e_0, \dots \widehat{e_i} \dots, e_n] : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ ce simplexe singulier affine, et on l'appelle la **$\boldsymbol{i}$-ème face de $\boldsymbol{\Delta_p}$**. En effet, l'image de F_i^p est la face de Δ_p opposée au sommet e_i. On a alors $F_i^p(e_j) = e_j$ pour $j < i$ et $F_i^p(e_j) = e_{j+1}$ pour $j \geq i$. On vérifie facilement que pour $j > i$ on a

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots \widehat{e_i} \dots \widehat{e_j} \dots, e_p]$$

et pour $j \leq i$

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots \widehat{e_j} \dots \widehat{e_{i+1}} \dots, e_p]$$

Soit maintenant X un espace topologique. Un **$\boldsymbol{p}$-simplexe singulier** sur X est une application continue $\sigma_p : \Delta_p \to X$ (figure 3.4). En considérant toute les sommes formelles finies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de tels p-simplexes singuliers, on engendre un groupe abélien que l'on note $\Delta_p(X)$. C'est le **groupe des $\boldsymbol{p}$-chaînes singulières sur $\boldsymbol{X}$**. Une p-chaîne singulière de X s'écrit donc sous la forme $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ où les σ sont des p-simplexes singuliers et les n_σ des entiers. La somme porte sur un nombre fini de p-simplexes singuliers.

Si $\sigma : \Delta_p \to X$ est un p-simplexe singulier, on définit la **$\boldsymbol{i}$-ème face de $\boldsymbol{\sigma}$** comme le $(p-1)$-simplexe singulier

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \to X$$

Le **bord de $\boldsymbol{\sigma}$** est alors la combinaison

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

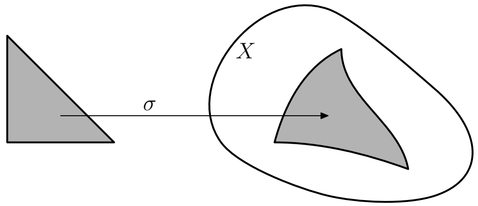

FIG. 3.4 – Exemple de simplexe singulier.

C'est une $(p-1)$-chaîne. On prolonge ∂_p par linéarité à toute p-chaîne $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$: $\partial_p c = \sum_\sigma n_\sigma \partial_p \sigma$. Donc ∂_p définit un morphisme de groupes

$$\partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$$

On montre alors facilement que

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$$

Pour $p < 0$, on pose $\Delta_p(X) = 0$, et pour $p \leq 0$, $\partial_p = 0$. Par la suite, on notera ∂ pour tous les morphismes ∂_p. On a donc le complexe différentiel décroissant

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial} 0$$

Son homologie est l'**homologie singulière de $\boldsymbol{X}$**, notée $H_*(X)$. Cette homologie est un invariant topologique de X. La **cohomologie singulière de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans** $\mathbb{Z}$ est la cohomologie adjointe du complexe $\Delta_*(X)$. C'est un invariant topologique aussi.

Si X a plusieurs composantes connexes par arcs X_α, alors le groupe $\Delta_p(X)$ est la somme directe des groupes $\Delta_p(X_\alpha)$. Cette décomposition est préservée par le passage à l'homologie, et on a $H_*(X) = \oplus_\alpha H_*(X_\alpha)$. Il suffit donc, pour étudier cette homologie, de considérer des espaces connexes par arcs.

Homologie singulière à valeurs dans un groupe abélien quelconque

Comme dans le cas de l'homologie simpliciale, on a ici un exemple d'homologie où les espaces sont des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. Nous allons voir qu'on peut généraliser cette construction en remplaçant l'anneau $\mathbb{Z}$, dont en réalité seule la structure de groupe abélien intervient, par n'importe quel groupe abélien G. En particulier, il est possible de définir l'homologie singulière de X à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, *etc.* Pour différentier ces différentes homologie, on note parfois $H_*(X, \mathbb{Z})$ l'homologie singulière à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui vient d'être définie.

Soit G un groupe abélien dont l'opération interne est notée additivement. On définit le groupe $\Delta_p(X, G)$ des ***p*-chaînes singulières à valeurs dans $\boldsymbol{G}$** sur X comme le groupe engendré par les sommes formelles finies $c = \sum_\sigma g_\sigma \sigma$ où les σ sont des p-simplexes singuliers et les g_σ sont des éléments de G. La définition de l'homologie singulière de X à valeurs dans G reprend celle à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais cette fois on prolonge ∂ par linéarité sur G. On note $H_*(X, G)$ le **groupe d'homologie singulière de $\boldsymbol{X}$ à valeurs dans $\boldsymbol{G}$**.[1]

[1]Il est possible, même si ça n'a pas été mentionné, de définir par la même procédure l'homologie simpliciale à valeurs dans G.

En définissant ainsi une homologie singulière à valeurs dans n'importe quel groupe abélien G, on n'introduit pas nécessairement de nouveaux invariants topologiques de X. En effet, toute l'information que pourrait apporter le groupe $H_*(X, G)$ est souvent déjà contenue dans le groupe $H_*(X, \mathbb{Z})$. Seuls certains types de groupes abéliens (par exemple les groupes $\mathbb{Z}_p$) peuvent conduire à des nouveautés.[2] Si G contient $\mathbb{Z}$ (comme par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) alors on est sûr de ne rien engendrer de nouveau.

Nombres de Betti, caractéristique d'Euler-Poincaré, polynôme de Poincaré

Le cas $G = \mathbb{R}$ est néanmoins très important. Dans ce cas, $\Delta_p(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (par construction), et on peut montrer que $H_p(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de *dimension finie*. On note $b_p = \dim_\mathbb{R} H_p(X, \mathbb{R})$ la dimension de cet espace (ou $b_p(X)$ s'il y a besoin de préciser l'espace topologique). C'est le ***p*-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{X}$**. Le nombres de Betti sont donc des invariants topologiques (entiers) de X. On peut montrer que la dimension de $H_p(X, \mathbb{R})$ est aussi le rang du groupe abélien $H_p(X, \mathbb{Z})$, c'est à dire le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ dans $H_p(X, \mathbb{Z})$.

Calculer les nombres de Betti individuellement n'est pas toujours aisé, car il faut bien souvent déterminer une bonne partie de la structure de $H_*(X, \mathbb{R})$. Par contre, il existe une combinaison de ces nombres à laquelle on peut accéder par d'autres méthodes (combinatoires ou géométriques). Ce nombre est la **caractéristique d'Euler-Poincaré de $\boldsymbol{X}$**, définie par

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p$$

Dans le cas où X est triangulable, on peut calculer ce nombre de façon très simple. Soit K un complexe simplicial qui triangule X. Soit $\ell(p)$ le nombre de p-simplexes dans K. Alors on peut montrer que

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \ell(p)$$

Il s'agit donc ici d'une façon purement combinatoire de calculer la caractéristique d'Euler -Poincaré de X. Nous reviendrons sur ce nombre plus loin.

Cette caractéristique d'Euler-Poincaré est en fait un cas particulier d'un objet plus général défini à partir des nombres de Betti, le **polynôme de Poincaré**. C'est un polynôme $P(X, t)$ défini par

$$P(X, t) = \sum_p b_p t^p$$

C'est réellement un polynôme et non une série infinie car comme on le verra plus loin, les nombres de Betti s'annulent à partir d'un certain rang. Comme ce polynôme n'est défini qu'à partir d'invariants topologiques, c'est lui-même un invariant topologique de X. La caractéristique d'Euler-Poincaré vaut $\chi(X) = P(X, -1)$. Nous explorerons certaines propriétés de ce polynôme par la suite, et nous verrons qu'il est souvent plus facile de le calculer que de calculer l'homologie de X.

Classe entière

On peut injecter les groupes abéliens $\Delta_p(X)$ dans les groupes abéliens $\Delta_p(X, \mathbb{R})$ (en injectant dans $\mathbb{R}$ chaque coefficient de $\mathbb{Z}$). Cette injection commute avec les différentielles,

[2]Ceci est dû à la présence éventuelle de « torsion ». Nous n'aborderons pas ces complications ici.

et définit donc une application en homologie. Nous dirons qu'une classe d'homologie dans $H_*(X, \mathbb{R})$ est **entière** si elle est l'image par cette application d'une classe de $H_*(X, \mathbb{Z})$. On peut montrer qu'il est toujours possible de choisir une base de $H_*(X, \mathbb{R})$ constituée de classes d'homologies entières.

3.2.2 Propriétés de l'homologie singulières

La définition qui vient d'être donnée de l'homologie singulière a le mérite d'être compacte et facilement généralisable à d'autres groupes abéliens que $\mathbb{Z}$. Cependant, dans les exemples concrets, elle se révèle quasiment inefficace, car, à part quelques exemples très simples, elle ne permet pas le calcul direct du groupe d'homologie singulière. Il faut en fait tirer de cette définition des propriétés et des techniques qui permettent ces calculs dans des cas plus compliqués. C'est l'objet de la topologie algébrique.

Il est relativement facile de montrer que l'homologie singulière de l'espace $X = \{*\}$ réduit à un point, vaut $H_0(*) = \mathbb{Z}$ et $H_p(*) = 0$ pour $p \neq 0$. C'est à peu près le seul exemple que l'on puisse calculer à partir de la définition.

Application « pull-back » induite en homologie

Soit $f : X \to X'$ une application continue entre deux espaces topologiques X et X'. Par composition, f envoie les simplexes singuliers de X dans les simplexes singuliers de X' : $\sigma \mapsto f \circ \sigma$. On a donc une application induite $f_\sharp : \Delta_*(X) \to \Delta_*(X')$, qui est un morphisme de groupes. Il est facile de voir qu'elle commute avec les applications bord. On hérite donc d'une application en homologie

$$f_* : H_*(X) \to H_*(X')$$

Ce résultat reste valable pour l'homologie à valeur dans n'importe quel groupe abélien. Considérons maintenant le cas de la cohomologie des complexes adjoints à $\Delta_*(X)$ et $\Delta_*(X')$. En composant un élément $\varphi \in \hom(\Delta_*(X'), \mathbb{Z})$ avec $f_\sharp$, on obtient un élément $\varphi \circ f_\sharp \in \hom(\Delta_*(X), \mathbb{Z})$. L'application $\varphi \mapsto \varphi \circ f_\sharp$ passe en cohomologie et définit

$$f^* : H^*(X') \to H^*(X)$$

On remarquera que dans ce cas, l'application part de X' et va vers X.

Applications homotopes

Deux applications continues $f_0, f_1 : X \to X'$ sont **homotopes** s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to X'$ telle que $F(0,x) = f_0(x)$ et $F(1,x) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. Alors, pour deux telles applications, on peut montrer que $f_{0*} = f_{1*} : H_*(X) \to H_*(X')$ et $f_0^* = f_1^* : H^*(X') \to H^*(X)$.

On dira que deux espaces topologiques X et X' sont **homotopiquement équivalents** s'il existe deux applications continues $f : X \to X'$ et $g : X' \to X$ telles que $f \circ g$ soit homotope à l'application identité sur X' et $g \circ f$ soit homotope à l'application identité sur X. Si X et X' sont homotopiquement équivalents, alors $H_*(X) = H_*(X')$ et $H^*(X) = H^*(X')$. Ce résultat donne par exemple l'homologie d'un espace contractile en un point. Par définition, X est **contractile en un point** $x_0 \in X$ s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to X$ telle que $F(0,x) = x$ et $F(1,x) = x_0$ pour tout $x \in X$ (F « contracte » X sur le point x_0). En d'autres termes, l'application identité sur X est homotope à l'application constante $x \mapsto x_0$. Prenons $f : X \to \{*\}$, $f(x) = *$, et $g : \{*\} \to X$, $g(*) = x_0$. Alors $f \circ g(*) = *$ est l'identité sur $\{*\}$, et $g \circ f(x) = x_0$ est homotope à l'identité sur X. Donc X et $\{*\}$ ont même homologie : $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $H_p(X) = 0$ pour $p \neq 0$.

On peut montrer que si X est connexe par arcs, alors $H_0(X) = \mathbb{Z}$, où un générateur de $H_0(X)$ est donné par le 0-simplexe singulier $\Delta_0 \ni e_0 \mapsto x \in X$ pour n'importe quel $x \in X$. Ce résultat donne donc H_0 pour tout espace topologique X, compte-tenu de la remarque sur la décomposition de X en composantes connexes par arcs.

Théorème de Hurewicz

Considérons maintenant $H_1(X)$ pour X connexe par arcs. Soit $f : [0,1] \to X$ un lacet continu (c'est à dire $f(0) = f(1)$). En identifiant le segment $[0,1]$ à Δ_1, ce lacet définit une 1-chaîne $\phi(f)$ dans $\Delta_1(X)$, qui est un cycle. On peut montrer que l'application ϕ, qui envoie les lacets sur X en des cycles de $\Delta_1(X)$ définit un morphisme de groupes

$$\widetilde{\phi} : \pi_1(X) \to H_1(X)$$

($\pi_1(X)$ est le premier groupe d'homotopie de X). Maintenant, remarquons que $H_1(X)$ est un groupe abélien, et que $\pi_1(X)$ n'est pas nécessairement abélien. Ceci implique qu'en réalité $\widetilde{\phi}$ se factorise en un morphisme entre l'abélianisé $\widetilde{\pi}_1(X)$ de $\pi_1(X)$ et $H_1(X)$. L'abélianisé $\widetilde{G}$ d'un groupe G est obtenu en quotientant G par le sous-groupe normal engendré par les « commutateurs » $g^{-1}h^{-1}gh$ pour $g, h \in G$. C'est par définition un groupe abélien. Il est facile de voir que si G est abélien, alors $\widetilde{G} = G$. Le théorème de Hurewicz dit que ce morphisme de groupes est un isomorphisme si X est connexe par arcs.

Plus généralement, le **théorème de Hurewicz** général relie l'homologie d'un espace topologique à son homotopie dans certaines situations. Si l'espace topologique X est $(p-1)$-connexe pour $p \geq 2$, c'est à dire $\pi_k(X) = 0$ pour $k \leq p-1$, alors $\pi_p(X)$ et $H_p(X)$ sont isomorphes (pour le cas $p = 1$, il faut considérer la situation précédente). Ce théorème est d'une extrême importance car non seulement il relie entre eux deux types d'invariants topologiques ($H_p(X)$ et $\pi_p(X)$), mais en plus il permet de calculer $H_p(X)$ dans de nombreux cas.

Par exemple, en bas degré, on a $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ pour $n > 1$ ($\mathbb{S}^n$ est la sphère de dimension n), $H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$ ($\mathbb{T}^n$ est le tore de dimension n).

Isomorphisme entre les homologies simpliciale et singulière

Dans le cas où l'espace topologique X est triangulable, on a l'important résultat que les homologies simpliciales et singulières sont les mêmes. Il en est de même pour les cohomologies simpliciales et singulières. Dans les exemples concrets, il est préférable, si c'est possible, de calculer l'homologie singulière en calculant son homologie simpliciale. Comme ces deux homologies coïncident, on parle de l'**homologie de l'espace topologique triangulable** $\boldsymbol{X}$.

3.3 Cohomologie de de Rham

3.3.1 L'algèbre différentielle $\Omega^*(M)$

Soit M une variété différentiable de dimension m. L'algèbre $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur M, munie de la différentielle de de Rham d, est une algèbre différentielle graduée commutative. Nous rappelons que $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ est définie sur $\omega \in \Omega^p(M)$ par la **formule de Koszul**

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots \overset{i}{\vee} \dots, X_{p+1}) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots \overset{i}{\vee} \dots \overset{j}{\vee} \dots, X_{p+1})
\end{aligned}
$$

pour tous $X_1, \dots, X_{p+1} \in \Gamma(M)$.

La cohomologie de cette algèbre différentielle est la **cohomologie de de Rham de M**. On la note $H^*(M, \mathbb{R})$. C'est une algèbre graduée. Pour ce complexe différentielle, une forme différentielle qui est un cocycle est dite **fermée** et une forme différentielle qui est un cobord est dite **exacte**. Puisque l'algèbre différentielle des formes différentielles est graduée commutative, $H^*(M, \mathbb{R})$ est une algèbre graduée commutative.

Compte-tenu que $\Omega^p(M) = 0$ pour $p > m$, il est immédiat que $H^p(M, \mathbb{R}) = 0$ pour $p > m$. Il est d'autre part facile de calculer $H^0(M, \mathbb{R})$. Une fonction $f \in \Omega^0(M)$ est fermée si $df = 0$, c'est à dire si toutes les dérivées partielles de f sont nulles dans toutes les cartes de M. Cela implique que f soit localement constante. Elle prend donc une valeur constante sur chaque composante connexe de M. $H^0(M, \mathbb{R})$ est donc le produit cartésien de copies de $\mathbb{R}$, autant qu'il y a de composantes connexes dans M. En particulier, si M est connexe, $H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit $f : M \to M'$ une application différentiable entre deux variétés différentiables M et M'. On sait alors que f définit une application « pull-back »

$$f^* : \Omega^*(M') \to \Omega^*(M)$$

qui commute avec les différentielles de de Rham. On a donc une application en cohomologies

$$f^* : H^*(M', \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$$

3.3.2 Le lemme de Poincaré

Le **lemme de Poincaré** est d'une importance capitale en cohomologie de de Rham, car il est à la base de nombreux résultats.

Ce lemme dit que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contractile (c'est à dire difféomorphe à $\mathbb{R}^n$), alors pour tout $p \geq 1$, toute p-forme différentielle fermée sur U est exacte. En d'autres termes, la cohomologie de de Rham d'un ouvert contractile est triviale.

La démonstration de ce lemme repose sur la construction explicite d'une homotopie contractante. Tout d'abord, il est utile de formaliser le fait que U soit contractile. Cela signifie qu'il existe une application différentiable

$$f : [0,1] \times U \to U$$

telle que $f(1, x) = x$ et $f(0, x) = x_0$ pour tout $x \in U$ et pour un point $x_0 \in U$ fixé.

Soit η une p-forme sur le cylindre $[0,1] \times U$. On note $t \in [0,1]$ la coordonnée sur $[0,1]$ et $x = (x^\mu)$ les coordonnées sur U. Alors η se décompose en

$$\eta(t, x) = \eta_p(t, x) + dt \wedge \eta_{p-1}(t, x)$$

où η_p et η_{p-1} sont respectivement une p-forme et une $(p-1)$-forme sur $[0,1] \times U$ dans laquelle dt n'apparaît pas.

On définit l'opérateur $K : \Omega^p([0,1] \times U) \to \Omega^{p-1}(U)$ par

$$(K\eta)(x) = \int_0^1 dt\ \eta_{p-1}(t, x)$$

Calculons $Kd\eta + dK\eta$. D'une part, nous avons

$$
\begin{aligned}
(Kd\eta)(x) &= K(d_U \eta_p)(x) + K\left(dt \wedge \frac{\partial \eta_p}{\partial t}\right)(x) - K\left(dt \wedge d_U \eta_{p-1}\right)(x) \\
&= \int_0^1 dt \left(\frac{\partial \eta_p}{\partial t}\right)(t, x) - \int_0^1 dt\ (d_U \eta_{p-1})(t, x) \\
&= (\eta_p(1, x) - \eta_p(0, x)) - \int_0^1 dt\ (d_U \eta_{p-1})(t, x)
\end{aligned}
$$

où d_U est la restriction à U de la différentielle sur $[0,1] \times U$. D'autre part, nous avons

$$(dK\eta)(x) = \int_0^1 dt\ (d_U \eta_{p-1})(t, x)$$

donc

$$(Kd\eta + dK\eta)(x) = \eta_p(1, x) - \eta_p(0, x)$$

Dans le cas où $\eta = f^*\omega$ pour $\omega \in \Omega^p(U)$, on a $\eta_p(1, x) = \omega(x)$ car $f(1, \cdot)$ est l'identité sur U, et $\eta_p(0, x) = 0$ car $f(0, \cdot)$ est constante (pour calculer $\eta_p(t, x)$ dans $\eta = f^*\omega$, on peut se placer à t constant car η_p ne dépend pas de dt). On a donc finalement

$$Kdf^*\omega + dKf^*\omega = \omega$$

or, $df^*\omega = f^*d\omega$, donc, si on définit

$$k : \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$$

par $k = Kf^*$, alors k est une homotopie contractante :

$$kd + dk = \mathrm{Id}$$

L'existence de cette homotopie contractante prouve que la cohomologie de de Rham de U est triviale.

3.3.3 La suite de Mayer-Vietoris

On suppose que la variété M est décomposée sous la forme $M = U \cup V$, où U et V sont deux ouverts de M. Bien sûr, l'intersection des deux ouverts peut être non vide. Alors on a les inclusions

$$U \cap V \longrightarrow U \longrightarrow M \quad \text{et} \quad U \cap V \longrightarrow V \longrightarrow M$$

Par restrictions, toute forme ω sur M définit une forme $\omega_{|U}$ sur U, $\omega_{|V}$ sur V et $\omega_{|U\cap V}$ sur $U \cap V$. On a donc les applications

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^*(M) & \to & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \to & \Omega^*(U \cap V) \\ \omega & \mapsto & \omega_{|U} \oplus \omega_{|V} & & \\ & & \omega_U \oplus \omega_V & \mapsto & \omega_{V|U\cap V} - \omega_{U|U\cap V} \end{array}$$

On peut facilement vérifier que la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

est exacte. C'est la **suite de Mayer-Vietoris** associée aux ouverts U, V de M. Cette suite exacte induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^q(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H^q(U, \mathbb{R}) \oplus H^q(V, \mathbb{R}) \longrightarrow H^q(U \cap V, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{q+1}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \cdots$$

3.3.4 Couplage à l'homologie singulière

On peut relier la cohomologie de de Rham de M à son homologie singulière à valeurs dans $\mathbb{R}$ en construisant un couplage entre les deux.

Définition du couplage

Pour cela, on doit modifier légèrement la définition de l'homologie singulière en ne prenant pour p-simplexes singuliers que des applications $\sigma : \Delta_p \to M$ qui sont C^∞ dans un voisinage de Δ_p dans $\mathbb{R}^p$. On peut alors montrer que l'homologie associée est la même que l'homologie singulière (essentiellement parce que toute application continue peut être approximée autant qu'on le souhaite par une application différentiable). Dans ce qui suit, on ne considérera que ces p-simplexes singuliers.

Comme on veut intégrer des p-formes sur les p-simplexes standards, on choisit une **orientation** sur les Δ_p. Pour cela, on prend l'orientation positive sur Δ_0, et si une orientation a été choisie sur Δ_{p-1}, on impose l'orientation sur $\partial\Delta_p$ telle que l'application face $F_0^p : \Delta_{p-1} \to \partial\Delta_p$ préserve cette orientation. On oriente alors Δ_p de façon cohérente avec son bord $\partial\Delta_p$. Toutes les applications faces ne préservent pas l'orientation.

Soit ω une p-forme sur M et $\sigma : \Delta_p \to M$ un p-simplexe singulier. Alors on définit un couplage $\langle \omega, \sigma \rangle \in \mathbb{R}$ en posant

$$\langle \omega, \sigma \rangle = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

où $\sigma^*\omega$ est le pull-back de ω sur Δ_p (ou sur un voisinage de Δ_p dans $\mathbb{R}^p$). L'intégrale est celle d'une p-forme sur une variété orientée de dimension p. On prolonge ce couplage à toutes les p-chaînes singulières $c = \sum_\sigma r_\sigma \sigma$ en posant

$$\langle \omega, c \rangle = \sum_\sigma r_\sigma \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

pour $r_\sigma \in \mathbb{R}$.

Si ω est une $(p-1)$-forme sur M et $\sigma : \Delta_p \to M$ un p-cycle singulier, alors en utilisant le **théorème de Stokes** on a

$$\begin{aligned} \langle d\omega, \sigma \rangle &= \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_i^p{}^* \sigma^* \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i^p)^* \omega = \int_{\Delta_{p-1}} (\partial\sigma)^* \omega \\ &= \langle \omega, \partial\sigma \rangle \end{aligned}$$

En particulier, si on restreint ce couplage aux formes fermées d'une part et aux cycles d'autre part, on constate que

$$\langle \omega + d\eta, \sigma \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle + \langle \eta, \partial\sigma \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle$$

et

$$\langle \omega, \sigma + \partial\rho \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle + \langle d\omega, \rho \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle$$

Ce couplage passe donc en cohomologie (de de Rham) et en homologie (singulière) et définit une application bilinéaire

$$H^p(M, \mathbb{R}) \times H_p(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Théorème de de Rham

Le **théorème de de Rham** dit que ce couplage est non dégénéré, ce qui signifie que $H^p(M, \mathbb{R})$ et $H_p(M, \mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels duaux l'un de l'autre. Or, on sait que la cohomologie singulière de M à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'espace dual de son homologie à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ce théorème réalise donc un isomorphisme entre la cohomologie singulière (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la cohomologie de de Rham. Nous notons donc naturellement cette unique cohomologie par $H^*(M, \mathbb{R})$. Si $f : M \to M'$ est une application différentiable, on a défini $f^* : H^*(M', \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ grâce à l'application pull-back sur les formes différentielles. Puisque f est continue, elle définit aussi $f^* : H^*(M', \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ en utilisant cette fois la cohomologie singulière. On peut montrer que ces deux applications sont les mêmes (d'où l'unique notation).

Ce théorème est très important car il identifie des objets construits de façons tout à fait différentes. D'un côté l'homologie singulière, construire de façon topologique, et de l'autre la cohomologie des formes différentielles, construite de façon géométrico-analytique.

Un corollaire important de ce théorème est que les **nombres de Betti**, la **caractéristique d'Euler-Poincaré** et le **polynôme de Poincaré** de M (voir page 52) peuvent maintenant être obtenus par la cohomologie de de Rham. En particulier, les nombres de Betti sont nuls au delà de la dimension de M, et cela prouve bien que la formule qui définit le polynôme de Poincaré donne un polynôme.

Classe entière

On dira qu'une classe de cohomologie de $H^*(M, \mathbb{R})$ est **entière** si, quand on la couple aux classes d'homologie entières de $H_*(M, \mathbb{R})$, elle donne des résultats entiers. En prenant la base duale d'une base de $H_*(M, \mathbb{R})$ constituée de classes d'homologie entières, on voit qu'il existe des bases de $H^*(M, \mathbb{R})$ constituées de classes de cohomologie entières.

3.3.5 La formule de Künneth et le polynôme de Poincaré

Il est facile de vérifier que si M_1 et M_2 sont deux variétés différentiables, alors l'algèbre différentielle $\Omega^*(M_1 \times M_2)$ s'identifie à

$$\Omega^*(M_1 \times M_2) = \Omega^*(M_1) \otimes \Omega^*(M_2)$$

Cette relation conduit à la **formule de Künneth** pour la cohomologie de de Rham :

$$H^*(M_1 \times M_2, \mathbb{R}) = H^*(M_1, \mathbb{R}) \otimes H^*(M_2, \mathbb{R})$$

Comme les nombre de Betti sont les dimensions des espaces vectoriels $H^p(M, \mathbb{R})$, cette formule implique que

$$b_p(M_1 \times M_2) = \sum_{r+s=p} b_r(M_1) b_s(M_2)$$

Traduite en termes de polynômes de Poincaré, cela conduit à la relation très simple

$$P(M_1 \times M_2, t) = P(M_1, t) P(M_2, t)$$

Cette propriété permet de calculer dans bien des cas le polynôme de Poincaré. Elle implique la relation équivalente sur le caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1)\chi(M_2)$$

3.4 Variété compacte, orientée et sans bord

Lorsque la variété est compacte, orientée et sans bord, il est possible d'aller plus loin dans l'étude des propriétés générales de son homologie et de sa cohomologie.

3.4.1 Les groupes d'homologie et de cohomologie de plus haut degré

Dans le cas d'une variété M compacte, orientée et sans bord de dimension m, on peut décrire $H^m(M, \mathbb{R})$ et $H_m(M, \mathbb{R})$.

La classe fondamentale

La variété M représente une classe d'homologie dans $H_m(M, \mathbb{R})$. En effet, M représente l'élément $[M]$ de $H_m(M, \mathbb{R})$ défini grâce au couplage par la relation

$$\langle [\omega], [M] \rangle = \int_M \omega$$

pour toute m-forme fermée ω sur M ($[\omega]$ étant la classe de la forme ω dans $H^m(M, \mathbb{R})$). La classe d'homologie $[M]$ est appelée la **classe fondamentale de $\boldsymbol{M}$**. On peut montrer qu'elle est entière et engendre $H_m(M, \mathbb{Z})$, qui s'identifie à $\mathbb{Z}$. On peut construire cette classe directement par l'homologie simpliciale. Pour cela, considérons tous les m-simplexes σ_i^m dans une triangulation de M, que l'on oriente grâce à l'orientation héritée de celle de M. Alors la classe $[M]$ est la classe de $\sum_i \sigma_i^m$.

La forme volume

Un représentant $\omega \in \Omega^m(M)$ de la classe duale dans $H^m(M, \mathbb{R})$ de la classe fondamentale est une **forme volume sur $\boldsymbol{M}$**. Elle vérifie

$$\int_M \omega = 1$$

Cette forme volume est ainsi nommée car elle permet de définir l'intégration de fonctions sur M en posant $f \mapsto \int_M f\omega$, où $f\omega$ est considéré comme une m-forme sur M.

Le degré d'une application

La classe fondamentale permet de définir le **degré d'une application** différentiable $f : M_1 \to M_2$ entre deux variétés compactes orientées sans bord M_1 et M_2 de même dimensions m. Pour cela, on remarque que f définit une application en homologie $f_* : H_*(M_1) \to H_*(M_2)$. Alors $f_*[M_1]$ est nécessairement un multiple entier de $[M_2]$: $f_*[M_1] = q[M_2]$. Le nombre $q \in \mathbb{Z}$ est le **degré de $\boldsymbol{f}$**. Par dualité, ce degré peut aussi être calculé à l'aide des formes différentielles. Si $\omega \in \Omega^m(M_2)$ est une forme volume ($\int_{M_2} \omega = 1$), alors

$$\int_{M_1} f^*\omega = \int_{f(M_1)} \omega = q \int_{M_1} \omega = q$$

Considérons le cas particulier d'une application différentiable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ où $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est la sphère de dimension n. Le degré de f peut être calculé comme ci-dessus en utilisant une forme volume ω sur $\mathbb{S}^n$. Une telle forme est donnée par exemple par

$$\omega = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i x^i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n}{((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2)^{n/2}}$$

où $\widehat{dx^i}$ signifie qu'on omet dx^i. Dans cette définition, on considère que $\mathbb{S}^n$ est immergée dans $\mathbb{R}^{n+1}$, d'où l'usage des coordonnées cartésiennes. Le facteur γ_n sert à normaliser ω de telle façon que $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 1$. Le degré de f peut aussi être obtenu d'une autre façon, beaucoup plus topologique. On sait en effet que $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, où $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour l'homotopie des fonctions continues $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. L'application f définit une telle classe d'équivalence, qui nous donne donc un entier. Cet entier est le degré de f.

3.4.2 Dualité de Poincaré

Si m est la dimension de M, alors il existe un couplage naturel entre les p-formes et les $m-p$-formes, défini en posant

$$\langle \omega_p, \eta_{m-p} \rangle = \int_M \omega_p \wedge \eta_{m-p}$$

où $\omega_p \in \Omega^p(M)$ et $\eta_{m-p} \in \Omega^{m-p}(M)$. Si ω_p et η_{m-p} sont toutes les deux fermées, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient

$$\langle \omega_p + d\alpha_{p-1}, \eta_{m-p} \rangle = \langle \omega_p, \eta_{m-p} \rangle$$

et

$$\langle \omega_p, \eta_{m-p} + d\beta_{m-p-1} \rangle = \langle \omega_p, \eta_{m-p} \rangle$$

Donc ce couplage passe en cohomologie et définit une application bilinéaire

$$H^p(M,\mathbb{R}) \times H^{m-p}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Le **théorème de Poincaré** dit que ce couplage est non dégénéré, ce qui signifie que nous avons des isomorphismes

$$(H^p(M,\mathbb{R}))^* \simeq H^{m-p}(M,\mathbb{R})$$

où $(H^p(M,\mathbb{R}))^*$ est le dual de $H^p(M,\mathbb{R})$. C'est la **dualité de Poincaré**. Par conséquent, les nombres de Betti sont reliés entre eux par

$$b_p = b_{m-p}$$

Ceci implique en particulier que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété orientable compacte sans bord de dimension impaire est nulle.

Classe duale d'une sous-variété

Soit $i : N \hookrightarrow M$ l'inclusion d'une sous-variété orientée compacte sans bord N de dimension n dans la variété orientée compacte sans bord M de dimension m. Alors N définit un élément du dual de $H^n(M,\mathbb{R})$ si on pose

$$H^n(M,\mathbb{R}) \ni [\omega] \mapsto \int_N i^*\omega$$

Or, par le théorème de Poincaré, cette relation définit une classe $[\eta_N] \in H^{m-n}(M,\mathbb{R})$, qu'on appelle la **classe duale de Poincaré de N**. Un représentant η_N de cette classe vérifie, pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$:

$$\int_N i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_N$$

3.4.3 L'application de Hodge, la codifférentielle et le laplacien

Soit g une métrique riemannienne sur la variété différentiable M, supposée compacte, orientable et sans bord. Alors on sait construire un isomorphisme

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{m-p}(M)$$

qu'on appelle l'**application $*$ de Hodge**. Cette application permet de définir un produit scalaire non dégénéré sur chaque $\Omega^p(M)$ par :

$$(\omega_p, \eta_p) = \int_M \omega_p \wedge *\eta_p$$

On définit l'adjoint $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ de d pour ce produit scalaire : $(d\omega_{p-1}, \eta_p) = (\omega_{p-1}, \delta\eta_p)$. C'est la **codifférentielle**. On peut montrer que $\delta^2 = 0$. L'opérateur $\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ est le **laplacien** sur (M,g). Une p-forme γ_p sur M telle que $\Delta\gamma_p = 0$ est une **forme harmonique**. Elle satisfait alors à $d\gamma_p = 0$ et $\delta\gamma_p = 0$. En effet, on a

$$0 = (\Delta\gamma_p, \gamma_p) = (d\delta\gamma_p, \gamma_p) + (\delta d\gamma_p, \gamma_p) = (\delta\gamma_p, \delta\gamma_p) + (d\gamma_p, d\gamma_p)$$

Comme le produit scalaire est défini positif (car la métrique est riemannienne), on a $(\delta\gamma_p, \delta\gamma_p) \geq 0$ et $(d\gamma_p, d\gamma_p) \geq 0$, ce qui signifie que ces deux termes sont nuls, et donc $\delta\gamma_p = 0$ et $d\gamma_p = 0$.

Le **théorème de décomposition de Hodge** dit que toute p-forme ω_p se décompose de façon unique

$$\omega = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p$$

où $\alpha_{p-1} \in \Omega^{p-1}(M)$, $\beta_{p+1} \in \Omega^{p+1}(M)$ et $\gamma_p \in \Omega^p(M)$ est harmonique. On remarquera que α_{p-1} et β_{p+1} ne sont pas uniques, mais $d\alpha_{p-1}$ et $\delta\beta_{p+1}$ le sont.

Si dans cette décomposition on prend $d\omega_p = 0$, alors

$$0 = (d\omega_p, \beta_{p+1}) = (d\delta\beta_{p+1}, \beta_{p+1}) = (\delta\beta_{p+1}, \delta\beta_{p+1})$$

donc $\delta\beta_{p+1} = 0$ et il reste $\omega_p = d\alpha_{p-1} + \gamma_p$. Comme cette décomposition est unique, nous voyons que dans la classe de cohomologie de ω_p il existe un élément unique γ_p qui est harmonique. Donc nous avons

$$H^p(M,\mathbb{R}) = \mathrm{Harm}^p(M)$$

où $\mathrm{Harm}^p(M)$ est l'espace vectoriel des p-formes harmoniques sur M. Ce résultat ramène le calcul de la cohomologie de M au calcul du noyau du laplacien sur M.

3.5 Cohomologies à supports compacts et à décroissance rapide

3.5.1 Cohomologie à support compact

Une forme différentielle sur une variété différentiable M est à **support compact** si elle est nulle en dehors d'un compact de M. On note $\Omega^*_c(M)$ l'espace vectoriel gradué des formes à supports compacts sur M. Il est facile de voir que c'est une algèbre graduée commutative, et que la différentielle de de Rham y est bien définie.

La cohomologie de cette algèbre différentielle est la **cohomologie de de Rham à support compact de M**, notée $H^*_c(M,\mathbb{R})$.

Cette cohomologie n'est pas la même que la cohomologie de de Rham ordinaire. Dans le cas par exemple de $\mathbb{R}^n$, on a $H^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \delta^{p,0}\ \mathbb{R}$, alors que $H^p_c(M,\mathbb{R}) = \delta^{p,n}\ \mathbb{R}$. Bien sûr, si M est compacte, elles coïncident puisque les algèbres différentielles sont les mêmes.

Il existe une homologie duale de cette cohomologie. Pour la construire, on modifie la définition de l'homologie singulière en considérant les ***p*-chaînes singulières infinies** de M, qui sont des sommes *infinies*

$$c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$$

où $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ et les σ sont des p-simplexes singuliers. On note $\Delta^\infty_p(M)$ l'espace des p-chaînes singulières infinies. On définit sur

$$\Delta^\infty_*(M) = \bigoplus_{p\geq 0} \Delta^\infty_p(M)$$

l'opération bord ∂ comme dans le cas de l'homologie singulière. L'homologie de ce complexe différentiel est l'**homologie singulière infinie de M**, notée $H^\infty_*(M)$.

On peut bien sûr définir l'homologie singulière infinie à valeurs dans n'importe quel groupe abélien G. On note ce complexe $\Delta_*^\infty(M, G)$ et son homologie $H_*^\infty(M, G)$.

Les espaces vectoriels $H_*^\infty(M, \mathbb{R})$ et $H_c^*(M, \mathbb{R})$ sont alors duaux l'un de l'autre par le couplage

$$\langle \omega, c \rangle = \sum_\sigma r_\sigma \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

où, puisque ω est à support compact, cette somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Sur une variété orientable M de dimension m, sans bord, mais pas nécessairement compacte, la dualité de Poincaré est réalisée entre les espaces $H^p(M, \mathbb{R})$ et $H_c^{m-p}(M, \mathbb{R})$.

3.5.2 Suite de Mayer-Vietoris à support compact

Si $j : U \to M$ est l'inclusion de l'ouvert U dans M, alors toute forme à support compact $\omega \in \Omega_c^*(U)$ peut être prolongée par zéro en une forme à support compact $\omega^M = j_* \omega \in \Omega_c^*(M)$.

Si $M = U \cup V$ où U et V sont des ouverts, alors par prolongement des formes à support compact on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega_c^*(U \cap V) & \to & \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) & \to & \Omega_c^*(M) & \to & 0 \\ & & \omega_{U\cap V} & \mapsto & -\omega_{U\cap V}^U \oplus \omega_{U\cap V}^V & & & & \\ & & & & \omega_U \oplus \omega_V & \mapsto & \omega_U^M + \omega_V^M & & \end{array}$$

C'est la **suite de Mayer-Vietoris** pour les formes à support compact. Elle induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H_c^q(U \cap V, \mathbb{R}) \longrightarrow H_c^q(U, \mathbb{R}) \oplus H_c^q(V, \mathbb{R}) \longrightarrow H_c^q(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H_c^{q+1}(U \cap V, \mathbb{R}) \longrightarrow \cdots$$

3.5.3 Cohomologie à décroissance rapide

Dans le cas où la variété M est un espace vectoriel V munie d'une métrique, on peut définir la **cohomologie de de Rham à décroissance rapide**. Pour cela, on considère la cohomologie des formes différentielles qui décroissent rapidement à l'infini, c'est à dire plus vite que n'importe quel polynôme (ω est à décroissance rapide si pour tout polynôme P, $P(x)\omega(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$). On note $H_{\mathrm{dr}}^*(M, \mathbb{R})$ cette cohomologie. On peut montrer qu'elle est isomorphe à la cohomologie à support compact. Par exemple, un générateur de $H_{\mathrm{dr}}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ est la forme à décroissance rapide

$$\left(\frac{1}{\pi t}\right)^{n/2} e^{-(x,x)/t} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}^*$, où (x, x) est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

3.5.4 Classe de Thom d'un fibré vectoriel réel orienté

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel réel orienté de rang n, munie d'une métrique de fibré. On peut considérer la cohomologie des formes sur E qui sont à décroissance rapide *le long des fibres* (pour tout $x \in M$, la restriction de la forme à l'espace vectoriel E_x est à décroissance rapide). On note $H_{\mathrm{dr}}^*(E, \mathbb{R})$ cette cohomologie.

Une p-forme ω à décroissance rapide le long des fibres peut être intégrée sur chaque fibre (on intègre sa restriction à chaque fibre). Le résultat est une $(p-n)$-forme sur M qu'on note $\pi_* \omega \in \Omega^{p-n}(M)$. Cette application commute avec les différentielles, et définit donc une application en cohomologies

$$\pi_* : H_{\mathrm{dr}}^p(E, \mathbb{R}) \to H^{p-n}(M, \mathbb{R})$$

Le **théorème de Thom** dit que cette application est un isomorphisme.

Dans cet isomorphisme, la classe de l'application identiquement égale à 1 sur M, $[1] \in H^0(M, \mathbb{R})$, a un antécédent unique $\pi_*^{-1}[1] = [\phi(E)] \in H_{\mathrm{dr}}^n(E, \mathbb{R})$. La n-forme à décroissance rapide $\phi(E)$ (non unique) qui représente cette classe, est appelée une **forme de Thom** de E, et sa classe la **classe de Thom**.

3.6 Cohomologie de Čech

3.6.1 Le complexe de Čech

La cohomologie de Čech est un moyen purement combinatoire de calculer la cohomologie de de Rham d'une variété. On peut la définir sur toute variété topologique.

Soit X une telle variété topologique, et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un **recouvrement d'ouverts** de X.[3] On se donne sur I un ordre (quelconque) afin de pouvoir écrire $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ pour des $\alpha_i \in I$. Soit G un groupe abélien dont on notera additivement la loi interne.

Soit $C^0(\mathfrak{U}, G)$ l'ensemble des fonctions qui associent à tout ouvert $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ un élément de G. Remarquons tout de suite, car c'est essentiel, qu'on peut interpréter ces fonctions comme des fonctions *constantes* $U_\alpha \to G$, ou encore comme des fonctions $I \to G$. L'espace des p-cochaînes $C^p(\mathfrak{U}, G)$ est l'ensemble des applications qui associent à toute intersection $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \varnothing$ un élément de G. Bien sûr, on identifie $U_\alpha \cap U_\beta$ à $U_\beta \cap U_\alpha$. Pour éviter les éventuelles répétitions de ces ouverts, on utilise l'ordre introduit sur I pour ne retenir que les intersections $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \varnothing$ pour lesquelles $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$. On note $U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}$ cette intersection. Une p-cochaîne peut alors être notée $g = \{g_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}\}_{\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_p}$ avec $g_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} \in G$. On note

$$C^*(\mathfrak{U}, G) = \bigoplus_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{U}, G)$$

l'espace gradué de toutes les cochaînes. Parfois, pour alléger les notations, on pourra avoir besoin de ne pas respecter la règle d'écriture $g_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}$ avec $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$. Dans ce cas, on prend la convention que $g_{\alpha_{\sigma(0)}\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(p)}} = \mathrm{sign}(\sigma) g_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}$ pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, p\}$.

À $g = \{g_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}\}_{\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \in C^p(\mathfrak{U}, G)$ on peut associer une $(p+1)$-cochaîne

$$\{(\delta g)_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p\alpha_{p+1}}\}_{\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_p<\alpha_{p+1}}$$

en posant

$$(\delta g)_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i g_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_i}\dots\alpha_{p+1}}$$

[3] C'est à dire que chaque U_α est un ouvert de X et $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$.

Au second membre, on remarquera qu'on a bien $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{i-1} < \alpha_i < \cdots \alpha_{p+1}$ comme notre convention l'exige. Dans cette définition, on a utilisé explicitement la notation additive de la loi interne de G. Dans le cas où cette loi serait multiplicative, il s'agirait d'un produit sur des $g_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p+1}}$ ou de leur inverse.

Il est alors assez facile de vérifier que $\delta^2 = 0$, et que donc $(C^*(\mathfrak{U}, G), \delta)$ est un complexe différentiel gradué. Sa cohomologie, notée $H^*(\mathfrak{U}, G)$, est la **cohomologie de Čech du couple $(\mathfrak{U}, G)$**.

3.6.2 La cohomologie de Čech

La cohomologie $H^*(\mathfrak{U}, G)$ dépend du choix du recouvrement $\mathfrak{U}$. Nous dirons qu'un recouvrement $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ est **plus fin** que $\mathfrak{U}$ si on peut inclure chaque ouvert V_β dans un U_α. Il existe donc une application $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : J \to I$ telle que $V_\beta \subset U_{\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta)}$. On dira que $(\mathfrak{V}, \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}})$ est un **raffinement** de $\mathfrak{U}$. Dans ce cas, $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}$ induit une application

$$\phi^\sharp_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : C^p(\mathfrak{U}, G) \to C^p(\mathfrak{V}, G)$$

en posant

$$\left(\phi^\sharp_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} g\right)_{\beta_0 \dots \beta_p} = g_{\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta_0) \dots \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(\beta_p)}$$

Il est facile de voir que $\phi^\sharp_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}$ est un morphisme de complexes différentiels gradués. Donc on hérite d'une application en cohomologies

$$\phi^*_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^*(\mathfrak{U}, G) \to H^*(\mathfrak{V}, G)$$

On peut montrer que cette application est indépendante du choix de $\phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : J \to I$ qui fait de $(\mathfrak{V}, \phi_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}})$ un raffinement de $\mathfrak{U}$.

Grâce à cette application, on peut considérer la limite directe des groupes $H^*(\mathfrak{U}, G)$ lorsque $\mathfrak{U}$ parcourt tous les recouvrements de X. Cette limite est construite de la façon suivante. On considère en même temps tous les groupes $H^*(\mathfrak{U}, G)$ pour tous les recouvrements $\mathfrak{U}$, et on introduit l'ensemble

$$\bigcup_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, G)$$

qui est l'union disjointe de ces groupes. Sur cet ensemble (qui n'est pas un groupe), on définit une relation d'équivalence en disant que deux éléments $[g] \in H^*(\mathfrak{U}, G)$ et $[h] \in H^*(\mathfrak{V}, G)$ sont équivalents s'il existe un recouvrement $\mathfrak{W}$ qui soit à la fois un raffinement pour $\mathfrak{U}$ et pour $\mathfrak{V}$, tel que

$$\phi^*_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}([g]) = \phi^*_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}([h]) \in H^*(\mathfrak{W}, G)$$

Cette relation signifie donc qu'en utilisant un raffinement suffisamment fin, les images de $[g]$ et $[h]$ coïncident dans le groupe de cohomologie de ce raffinement. On peut donner une structure de groupe au quotient de $\cup_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, G)$ par cette relation d'équivalence. Notons $\overline{[g]}$ la classe de $[g]$ dans ce quotient. Avec les notations précédentes, mais où cette fois $[g]$ et $[h]$ ne sont plus nécessairement équivalents, on pose $\overline{[g]} + \overline{[h]} = \overline{\phi^*_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}([g]) + \phi^*_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}}([h])}$. On note $H^*_C(X, G)$ le groupe obtenu, c'est la **cohomologie de Čech de X à valeurs dans G**.

3.6.3 Relation avec la cohomologie de de Rham

Dans le cas où $G = \mathbb{R}$, et $X = M$ est une variété différentiable, on peut montrer que la cohomologie de Čech est isomorphe à la cohomologie de de Rham : $H^*(M, \mathbb{R}) \simeq H^*_C(M, \mathbb{R})$. Dans ce qui suit, on va essayer de voir comment ces deux cohomologies sont reliées entre elles.

Tout d'abord, on dira qu'un recouvrement d'ouverts de M est un **bon recouvrement** si tous les ouverts et toutes les intersections finies de ces ouverts sont contractiles (homéomorphes à $\mathbb{R}^m$). On peut montrer que toute variété différentiable admet un bon recouvrement. De plus tout recouvrement admet un recouvrement plus fin qui est un bon recouvrement.

Suite généralisée de Mayer-Vietoris

Pour comprendre le lien entre le complexe de de Rham et le complexe de Čech associé à un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M, il faut passer par la **suite généralisée de Mayer-Vietoris**. Notons

$$\delta : \Omega^*(M) \to \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0})$$

l'application qui à toute forme différentielle $\omega \in \Omega^*(M)$ associe ses restrictions aux ouverts U_{α_0}. La notation $\prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0})$ signifie qu'on prend le produit cartésien de tous les espaces vectoriels $\Omega^*(U_{\alpha_0})$. δ est un morphisme de complexes différentiels, où sur $\prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0})$, on prend les restrictions de la différentielle de de Rham aux ouverts U_{α_0}. Ce morphisme est injectif.

Considérons maintenant $\omega_1 = (\omega_{\alpha_0})_{\alpha_0} \in \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0})$. Notons

$$(\delta\omega_1)_{\alpha_0\alpha_1} = \omega_{\alpha_0 | U_{\alpha_0\alpha_1}} - \omega_{\alpha_1 | U_{\alpha_0\alpha_1}}$$

pour $\alpha_0 < \alpha_1$, où $\omega_{\alpha_0 | U_{\alpha_0\alpha_1}}$ est la restriction de $\omega_{\alpha_0} \in \Omega^*(U_{\alpha_0})$ à l'ouvert $U_{\alpha_0\alpha_1} \subset U_{\alpha_0}$. Alors $\delta\omega_1$ est un élément du produit cartésien $\prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1})$.

On peut généraliser δ en une application

$$\delta : \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \to \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_{p+1}} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}})$$

en posant, pour $\omega_p = (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \in \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$:

$$(\delta\omega_p)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_{p+1} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}}$$

pour tous $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{p+1}$. Par la suite, pour alléger les notations, on écrira les produits cartésiens $\prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ sachant qu'on a toujours $\alpha_0 < \cdots < \alpha_p$.

Il est facile de voir que $\delta^2 = 0$. En réalité, on peut montrer qu'on a plus, puisque

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

est une suite exacte. C'est la **suite généralisée de Mayer-Vietoris**, qui est une suite de complexes différentiels.

Bicomplexe de Čech-de Rham

On peut prolonger les complexes différentiels

$$\prod\Omega^0(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \prod\Omega^1(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \prod\Omega^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \cdots$$

en injectant $C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ dans $\prod\Omega^0(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p})$, puisque tout élément $g \in C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ est une collection de fonctions constantes $U_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \to \mathbb{R}$. On a alors la suite

$$0 \longrightarrow C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{i} \prod\Omega^0(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \prod\Omega^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \cdots$$

On remarquera que $d \circ i : C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \to \prod\Omega^0(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p})$ est nulle.

On peut réécrire maintenant la suite généralisée de Mayer-Vietoris en lui ajoutant le complexe de Čech :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^q(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^q(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^q(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & \prod\Omega^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
\vdots & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] & \cdots & \vdots \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^2(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^2(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^2(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & \prod\Omega^2(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^1(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & \prod\Omega^1(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^0(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod\Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & \prod\Omega^0(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
 & & C^0(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "i"] & C^1(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "i"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & C^p(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "i"] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \cdots & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La colonne non nulle à gauche est le complexe de de Rham de M, et la ligne non nulle du bas est le complexe de Čech.[4] On relie donc la cohomologie de de Rham à la cohomologie de Čech par un bicomplexe ayant deux différentielles d et δ, qu'on note $V^{*,*} = C^*(\mathfrak{U},\Omega^*)$, et qui mélange les structures différentielles et combinatoires. C'est le **bicomplexe de Čech-de Rham**. On sait munir un tel bicomplexe d'une différentielle D obtenue à partir de différentielles d et δ. Puisque chaque ligne est une suite exacte, en utilisant le résultat sur les bicomplexes (page 43), on sait que la cohomologie de ce bicomplexe est exactement la cohomologie de de Rham :

$$H^*(V,D) = H^*(M,\mathbb{R})$$

[4] On notera qu'on peut rajouter en bas à gauche l'espace $\mathbb{R}$, qu'on interprète comme l'espace des fonctions constantes sur M.

D'autre part, si $\mathfrak{U}$ est un bon recouvrement de M, alors chaque colonne est une suite exacte. La cohomologie du complexe est donc aussi la cohomologie du complexe de Čech :

$$H^*(V,D) = H^*(\mathfrak{U},\mathbb{R})$$

Dans le cas d'un bon recouvrement, on a donc montré que

$$H^*(M,\mathbb{R}) = H^*(\mathfrak{U},\mathbb{R})$$

Ce résultat est très fort, car il montre que pour calculer la cohomologie de M, on n'a pas besoin de passer à la limite directe des groupes de cohomologie de Čech, et qu'il suffit de se placer sur un bon recouvrement.

Pour résumer, on peut schématiser tout cela par

$$\begin{tikzcd}
\text{Géométrie différentielle des formes} & 0 \arrow[r] & \Omega^*(M) \arrow[r] & C^*(\mathfrak{U},\Omega^*) \\
 & & & C^*(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \arrow[u] \\
 & & & 0 \arrow[u] \\
 & & & \text{Combinatoire du recouvrement}
\end{tikzcd}$$

Regardons concrètement comment on peut relier la cohomologie de de Rham à la cohomologie de Čech dans ce bicomplexe. Pour cela, on va s'intéresser seulement au second groupe de cohomologie de de Rham. Soit Ω une 2-forme fermée sur M, qui représente une classe de cohomologie dans $H^2(M,\mathbb{R})$. On se donne un bon recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ de M. Alors les restrictions F_i de Ω sur chacun des ouverts U_i satisfont à $dF_i = 0$. La collection des F_i est dans $C^0(\mathfrak{U},\Omega^2)$. Il existe alors sur chaque U_i une 1-forme A_i telle que $dA_i = F_i$ puisque la cohomologie de de Rham sur U_i est triviale. La collection des A_i est dans $C^0(\mathfrak{U},\Omega^1)$. Sur chaque $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, on a $d(A_i - A_j) = 0$, donc il existe des fonctions f_{ij} sur $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, telles que $df_{ij} = A_i - A_j$. La collection des f_{ij} est dans $C^1(\mathfrak{U},\Omega^0)$. Alors les fonctions $a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$ définies sur les $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$ vérifient $da_{ijk} = 0$. Ce sont donc des fonctions constantes. La collection des a_{ijk} est donc dans $C^2(\mathfrak{U},\mathbb{R})$. On a donc associé à toute 2-forme fermée Ω sur M un élément $a \in C^2(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, dont il est facile de voir que $\delta a = 0$. La classe de cohomologie de Čech de a ne dépend pas des choix arbitraires de cette construction.

3.6.4 Cohomologie de Čech à valeurs dans des faisceaux

Un **préfaisceau** $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est une application qui associe à chaque ouvert $U \subset X$ un groupe (abélien) $\mathcal{F}(U)$ tel que

1. si $U \subset V$ sont deux ouverts de X, alors il existe un morphisme de groupes $i_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ qu'on appelle le morphisme de restriction de $\mathcal{F}$;

2. si $U \subset V \subset W$ sont trois ouverts de X, alors $i_{UW} = i_{UV} i_{VW}$.

L'ensemble vide s'envoie toujours sur le groupe nul : $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un **faisceau** si en plus

1. si $U = \cup_\alpha U_\alpha$, alors $i_{U_\alpha U}(f) = 0$ pour tout α implique que l'élément $f \in \mathcal{F}(U)$ est nul ;
2. tout point de X admet un voisinage ouvert suffisamment petit U sur lequel il existe une famille d'éléments compatibles $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, pour $U = \cup_\alpha U_\alpha$, qui soient restrictions d'un élément $f \in \mathcal{F}(U)$.

Une famille compatible $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ pour $U = \cup_\alpha U_\alpha$ satisfait à $i_{U_{\alpha\beta} U_\beta}(f_\beta) = i_{U_{\beta\alpha} U_\alpha}(f_\alpha)$.

Un morphisme de préfaisceaux $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une collection de morphismes de groupes $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ qui commutent avec les restrictions respectives de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

On se place dans le cadre des notations déjà utilisées. Soit $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement d'ouverts de X. On définit les 0-cochaînes sur $\mathfrak{U}$ à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des fonctions qui associent à tout ouvert U_α un élément de $\mathcal{F}(U_\alpha)$. On note $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ cet espace de cochaînes. Les p-cochaînes sont les fonctions qui associent à tout $U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}$ un élément de $\mathcal{F}(U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p})$. Un tel élément est noté $a = \{a_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}\}$. On le suppose antisymétrique par rapport aux indices α_i. On note $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ l'espace des p-cochaînes.

La différentielle δ est définie par la relation

$$(\delta a)_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i i_{U_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_i}\dots\alpha_{p+1}} U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}} a_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_i}\dots\alpha_{p+1}}$$

Il est facile de vérifier que $\delta^2 = 0$ en utilisant les propriétés des morphismes de restriction. On note $H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ la cohomologie associée à ce complexe. En utilisant une limite directe des groupes associée à des recouvrements de plus en plus fins, on peut introduire la **cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathcal{F}$**, qu'on note $H^*(X, \mathcal{F})$.

Si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ est une suite exacte courte de préfaisceaux, alors on peut montrer qu'on obtient une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

On va donner quelques exemples de faisceaux. On dit qu'un **faisceau est constant** si $\mathcal{F}(U) = G$ pour tout ouvert U, où G est un groupe abélien, et les restrictions sont toutes l'application identité sur G. Concrètement, les p-cochaînes sont des fonctions *constantes* de $U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}$ dans G. On retrouve donc la définition précédente de la cohomologie de Čech. On note G ce faisceau.

Soit maintenant le faisceau qui associe à tout ouvert U de X l'algèbre des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur U : $\mathcal{F}(U) = \mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$. On note $\mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}$ ce faisceau. C'est un **faisceau de fonctions**. Les morphismes de restriction sont exactement les restrictions des fonctions à des ouverts plus petits. Une p-cochaîne est une collection de fonctions continues $U_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} \to \mathbb{R}$. Ce cas est donc très différent du précédent. On peut généraliser ce faisceau en prenant des fonctions différentiables ($\mathcal{F}(U) = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R}) = \mathscr{F}(U)$), ou bien encore des fonctions holomorphes si on se place par exemple sur une variété complexe.

Une autre généralisation du faisceau précédent consiste à associer à U l'espace des r-formes différentielles sur U : $\mathcal{F}(U) = \Omega^r(U)$. C'est ce faisceau qui a été utilisé dans la construction du bicomplexe de Čech-de Rham.

On peut montrer que *la cohomologie de Čech à valeurs dans un groupe abélien G (faisceau constant G) est isomorphe à la cohomologie ordinaire de l'espace topologique X*. En particulier, elle est isomorphe à la cohomologie de de Rham lorsque X est une variété différentiable.

Étudions brièvement le cas du faisceau des fonctions continues $U \mapsto \mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$. Une 0-cochaîne $f = \{f_\alpha\}$ est un cocycle si sur chaque $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ la fonction $(\delta f)_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ est nulle. On peut toujours introduire sur X une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathfrak{U}$. Ce sont des fonctions $h_\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ continues et à support dans U_α avec $\sum_\alpha h_\alpha = 1$. Alors soit la fonction continue sur X définie par $\hat{f} = h_\alpha f_\alpha$ où f_α est prolongée continûment de façon quelconque sur X tout entier. Calculons $(\delta \hat{f})_\beta = \sum_\alpha (h_\alpha f_\alpha)_{|U_\beta}$. À cause du support de h_α, la fonction $(h_\alpha f_\alpha)_{|U_\beta}$ est non nulle seulement sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Or, par propriété du cocycle, on a $f_\alpha = f_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Donc $(h_\alpha f_\alpha)_{|U_\beta} = h_{\alpha|U_\beta} f_\beta$. $\delta \hat{f}$ devient ainsi $(\delta \hat{f})_\beta = (\sum_\alpha h_\alpha)_{|U_\beta} f_\beta = f_\beta$. On a donc montré que f est un cobord. Cette construction peut être généralisée à tout cocycle de $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}})$, et cela démontre que sa cohomologie est trivial :

$$H^0(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}) = \mathscr{C}^0(X, \mathbb{R}) \text{ et } H^p(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}) = 0$$

pour tout $p \geq 1$.

Cette technique marche ici car il est possible de multiplier les éléments des groupes $\mathcal{F}(U)$ par des fonctions (les h_α).[5] Elle peut être appliquée en particulier à la cohomologie à valeurs dans le faisceau des formes différentielles $U \mapsto \Omega^r(U)$. C'est pourquoi la suite généralisée de Mayer-Vietoris est exacte. Un cas extrêmement important où cette technique est en défaut est celui du faisceau constant $\mathbb{R}$ (on ne peut pas en effet rester dans l'espace des fonctions constantes $U_\alpha \to \mathbb{R}$ si on multiplie par une fonction non constante h_α !). Dans ce cas la cohomologie est non triviale, puisqu'elle s'identifie à la cohomologie de de Rham.

3.6.5 Application aux fibrés en droites complexes

Considérons la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}} \to \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1} \to 0$$

où $\mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1}$ est le faisceau des fonctions à valeurs dans le cercle. Attention, dans ce faisceau, la loi de groupe est multiplicative. Le premier faisceau est un faisceau constant car l'application $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(U, \mathbb{S}^1)$ consiste à exponentier, $f \mapsto \exp(2i\pi f)$, les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$. Le noyau de cette application est l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{Z}$. Or, une telle fonction est nécessairement constante sur U.

Cette suite exacte courte donne la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^p(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^p(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1}) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \cdots$$

On sait que $H^p(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{R}}) = 0$ pour $p > 0$. Donc on a

$$H^p(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1}) \simeq H^{p+1}(X, \mathbb{Z})$$

pour $p \geq 1$. On rappelle que $H^{p+1}(X, \mathbb{Z})$ s'identifie à la cohomologie entière (ordinaire) sur X.

[5] et aussi dans une moindre mesure, parce qu'il est possible d'étendre des fonctions continues

Soit $L \to X$ un fibré en droites complexes au dessus de la variété topologique X. On sait qu'il est possible de réduire son groupe de structure à $U(1) = \mathbb{S}^1$. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un bon recouvrement d'ouverts de X. Alors au dessus de chaque U_i, L est trivial puisque U_i est contractile. Les U_i peuvent donc servir de support à une trivialisation de L. Soient $c = \{c_{ij}\}$ les fonctions de transitions de L, avec $c_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{S}^1$ et $c_{ij}c_{jk}c_{ki} = 1$ au dessus de tout $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$. Ce sont des fonctions continues. Leurs propriétés en font un élément $c \in C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1})$. Lorsqu'on change de trivialisation de L sur $\mathfrak{U}$, on introduit des fonctions continues $d_i : U_i \to \mathbb{S}^1$ et les nouvelles fonctions de transition sont $c'_{ij} = c_{ij}d_id_j^{-1}$, c'est-à-dire $c' = c(\delta d)$, puisque dans la notation multiplicative on a $(\delta d)_{ij} = d_id_j^{-1}$. Ainsi c et c' sont cohomologues. Seule donc la classe de cohomologie de c dépend de L. Réciproquement, la donnée d'un cocycle dans $C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1})$ définit complètement les fonctions de transition d'un fibré en droite L, et donc définit L. Cela signifie que $H^1(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1})$ classe les fibrés en droite complexes au dessus de X. Or, on a vu que $H^1(X, \mathscr{C}^0_{\mathbb{S}^1}) = H^2(X, \mathbb{Z})$.

Pour résumer, on a montré que les fibrés en droites complexes au dessus de X sont complètement classés par le deuxième groupe de cohomologie entière de X.

Bibliographie de ce chapitre

Pour les homologies et les cohomologies associées aux espaces topologiques et aux variétés, il y a les incontournables M. Nakahara 1990 [Nak90] et A. S. Schwarz 1996 [Sch96] dans lesquels des exemples sont donnés et qui sont écrits pour les physiciens, ainsi que le livre de R. Bertlmann 1996 [Ber96]. Il faut cependant les compléter par des livres qui vont plus loin : A. H. Wallace 1973 [Wal73] qui se lit très facilement, G. E. Bredon 1993 [Bre93] qui est nettement plus mathématique, et R. Bott, L. W. Tu 1982 [BT82] et M. Postnikov 1990 [Pos90] qui traite plus spécifiquement des cohomologie de de Rham et de Čech. On trouvera dans N. Teleman 1995 [Tel95] des développements rarement exposés.

Chapitre 4

Homologies, cohomologies et structures algébriques

Les homologies et cohomologies introduites dans ce chapitre sur des structures algébriques sont de natures assez différentes. Elles partagent cependant une même caractéristique, celle d'être intimement liées à l'objet algébrique sur lequel elles reposent. Mathématiquement elles sont donc d'un grand intérêt, puisqu'elles prolongent et approfondissent l'étude de ces structures. Elles éclairent aussi certaines relations qu'entretiennent des objets algébriques entre-eux.

4.1 (Co)homologies d'algèbres de Lie

4.1.1 Homologie d'algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V un module à droite de $\mathfrak{g}$. Sur l'espace vectoriel gradué $V \otimes \bigwedge^* \mathfrak{g}$, on définit la **différentielle** de degré -1 :

$$\partial : V \otimes \bigwedge^p \mathfrak{g} \to V \otimes \bigwedge^{p-1} \mathfrak{g}$$

par

$$\partial(v \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_i (-1)^{i+1} v X_i \otimes X_1 \wedge \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \wedge X_p$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \overset{i}{\vee} \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge X_p$$

pour tous $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$. Alors $(V \otimes \bigwedge^* \mathfrak{g}, \partial)$ est un complexe différentiel décroissant. Son homologie, notée $H_*(\mathfrak{g}, V)$, est l'**homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V**.

Dans le cas du module trivial $V = \mathbb{R}$, $\bigwedge^* \mathfrak{g}$ est une algèbre, mais ∂ n'est pas une antidérivation de cette algèbre car il n'y a pas compatibilité avec le produit. Donc $H_*(\mathfrak{g})$ n'a pas de structure d'algèbre héritée de $\bigwedge^* \mathfrak{g}$. Nous verrons cependant que pour une certaine classe d'algèbres de Lie, cet espace d'homologie est muni d'une structure d'algèbre.

Le cas particulier où $V = \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$, $(\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^* \mathfrak{g}, \partial)$ est appelé le **complexe de Chevalley-Eilenberg** de $\mathfrak{g}$. L'homologie de ce complexe est triviale.

4.1.2 Cohomologie d'algèbres de Lie

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et V un module à gauche de $\mathfrak{g}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $C^n(\mathfrak{g}, V)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires antisymétriques de $\mathfrak{g}$ dans V. Pour $n = 0$, nous prenons $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Il est facile de voir que nous avons $C^n(\mathfrak{g}, V) = \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes V$ lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, ce que nous supposerons par la suite.

Nous définissons une **différentielle** d sur l'espace gradué $C^*(\mathfrak{g}, V) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} C^n(\mathfrak{g}, V)$ en posant, pour tout $\alpha \in C^n(\mathfrak{g}, V)$ et tout $X_0, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$,

$$d\alpha(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X_i \alpha(X_0, \ldots \overset{i}{\vee} \ldots, X_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \ldots \overset{i}{\vee} \ldots \overset{j}{\vee} \ldots, X_n)$$

Ceci définit une application linéaire

$$d : C^n(\mathfrak{g}, V) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$$

de carré nul

$$d^2 = 0$$

La cohomologie du complexe $(C^*(\mathfrak{g}, V), d)$, notée $H^*(\mathfrak{g}, V)$, est la **cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans V**.

On remarquera la similitude entre cette différentielle et la différentielle du complexe de de Rham des formes différentielles sur une variété. Cette dernière est en fait construite sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la variété (qui est de dimension infinie !).

Dans le cas particulier du module trivial $V = \mathbb{R}$, nous avons $C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \bigwedge \mathfrak{g}^*$. Nous notons dans ce cas $d_\mathfrak{g}$ sa différentielle. Alors $(\bigwedge \mathfrak{g}^*, d_\mathfrak{g})$ est une algèbre différentielle graduée commutative. Sa cohomologie est donc une algèbre graduée commutative, notée $H^*(\mathfrak{g})$.

Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont deux algèbres de Lie, alors il est facile de vérifier que $\bigwedge^*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})^* = \bigwedge^* \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge^* \mathfrak{h}^*$. Donc la **formule de Künneth** prend ici la forme

$$H^*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) = H^*(\mathfrak{g}) \otimes H^*(\mathfrak{h})$$

Il est évident que $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ est l'espace vectoriel dual de $\bigwedge^* \mathfrak{g}$. Dans cette dualité, l'adjoint de $-d_\mathfrak{g}$ est ∂ défini auparavant. Soit $\{E_k\}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $\{\theta^k\}$ sa base duale dans $\mathfrak{g}^*$. Les θ^k sont aussi appelées les **formes de Maurer-Cartan** de $\mathfrak{g}$. Si $C^i_{k\ell}$ désignent les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ dans la base $\{E_k\}$, c'est à dire $[E_k, E_\ell] = C^i_{k\ell} E_i$, alors nous avons

$$d_\mathfrak{g} \theta^i = -\frac{1}{2} C^i_{k\ell} \theta^k \wedge \theta^\ell$$

Pour montrer que le carré de $d_\mathfrak{g}$ est nul (ou celui de d dans le cas où la V est non trivial), il faut utiliser de façon essentielle l'**identité de Jacobi**. On peut voir le crochet de Lie comme une application $[\ ,\ ] : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ et la différentielle comme une application $d_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \simeq \left(\bigwedge^2 \mathfrak{g}\right)^*$ (en dimension finie). Cette différentielle est donc une version duale du crochet de Lie, d'où son importance pour étudier l'algèbre de Lie.

Si G est un groupe de Lie connexe (de dimension finie) et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, alors $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ est la sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(G)$ des formes différentielles invariantes à gauche ($\Omega^*(G)$ est l'algèbre différentielle des formes différentielles sur G). Cette propriété est la version duale du fait que $\mathfrak{g}$ est la sous algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. L'inclusion

$$i : \bigwedge\mathfrak{g}^* \to \Omega^*(G)$$

définit un morphisme d'algèbres entre les algèbres cohomologiques

$$i^\sharp : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(G, \mathbb{R})$$

Dans le cas des groupes de Lie compacts connexes, ce morphisme est un isomorphisme.

4.1.3 Algèbres de Lie réductives

Définitions

Les résultats sur l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie réductives sont très importants car ils sont précis et couvrent un grand nombre de cas comme nous allons le constater.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **semi-simple** si l'un des critères suivants (équivalents) est vérifié :

1. la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée ;
2. $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples ;
3. toute représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel de dimension finie est semi-simple.

On rappelle que la forme de Killing est définie sur $\mathfrak{g}$ par $K(X,Y) = \mathrm{Tr}(ad_X ad_Y)$. Une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V est semi-simple si pour tout sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}$-invariant W_1 de V on peut trouver un sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}$-invariant W_2 tel que $W_1 \oplus W_2 = V$. On peut montrer qu'une algèbre de Lie semi-simple satisfait à $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. En d'autres termes, tout élément de $\mathfrak{g}$ est un crochet.

On dira qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est **réductive** si elle se décompose comme somme directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre de Lie abélienne. Compte-tenu de la structure des algèbres de Lie semi-simples, on a $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathscr{Z}_\mathfrak{g}$ où $\mathscr{Z}_\mathfrak{g}$ est le centre de $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie est donc réductive si et seulement si sa représentation adjointe est semi-simple.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **compacte** si elle admet un produit scalaire invariant défini négatif. Une algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact est compacte. On peut montrer que toute algèbre de Lie compacte est réductive. Donc les théorèmes qui vont suivre sur les algèbres de Lie réductives seront valables pour les algèbres de Lie des groupes de Lie compacts connexes.

Une algèbre de Lie est dite **unimodulaire** si $\mathrm{Tr}(ad_X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Toute algèbre de Lie réductive est unimodulaire.

Pour tout $X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \in \bigwedge^k\mathfrak{g}$, on pose

$$L_X(X_1 \wedge \cdots \wedge X_k) = [X, X_1] \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_k + X_1 \wedge [X, X_2] \wedge \cdots \wedge X_k + \cdots + X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge [X, X_k]$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. De même, pour tout $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k\mathfrak{g}^*$, on pose

$$L_X(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = ad_X^*(\alpha_1) \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k + \alpha_1 \wedge ad_X^*(\alpha_2) \wedge \cdots \wedge \alpha_k + \cdots + \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge ad_X^*(\alpha_k)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ où ad_X^* est la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$. Les éléments de $\bigwedge\mathfrak{g}$ ou de $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ annulés pas les L_X pour tout $X \in \mathfrak{g}$ sont appelés des éléments **invariants**. On note $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ et $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ les sous-espaces de ces éléments invariants.

Résultats sur les homologies et les cohomologies

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie unimodulaire de dimension n, et soit $e = \in \bigwedge^n\mathfrak{g}$ un élément non nul. Alors un calcul simple montre que $L_X e = (\mathrm{Tr}(ad_X))e = 0$. Donc e est un élément invariant de $\bigwedge^n\mathfrak{g}$. Un tel élément permet de définir un produit scalaire $(\phi, \psi) = \langle \phi \wedge \psi, e \rangle$ pour tous $\phi, \psi \in \bigwedge\mathfrak{g}^*$. Ce produit scalaire permet l'identification

$$\bigwedge\mathfrak{g}^* \simeq \bigwedge\mathfrak{g}$$

en tant que complexes différentiels. Il induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologies et d'homologies

$$H^{n-p}(\mathfrak{g}) \simeq H_p(\mathfrak{g})$$

C'est l'**isomorphisme de Poincaré**.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive, alors nous avons les résultats suivant :

$$H_*(\mathfrak{g}) = \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad H^*(\mathfrak{g}) = \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$$

Ce résultat couvre en particulier le cas des algèbres de Lie associées à des groupes G de Lie compacts connexes. Dans cette situation, on a donc trois façons différentes de calculer cette cohomologie : en utilisant la topologie du groupe (en calculant l'homologie singulière de G), en utilisant sa géométrie (en calculant sa cohomologie de de Rham), ou en utilisant son algèbre de Lie (en calculant la cohomologie de cette algèbre de Lie). Ainsi on a

$$H^*(\mathfrak{g}) = H^*(G, \mathbb{R}) = \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$$

Dans le cas d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple, il est facile de calculer $H^1(\mathfrak{g})$. En effet, tout cocycle α de degré 1 vérifie $d_\mathfrak{g}\alpha(X,Y) = -\alpha([X,Y]) = 0$. Or dans $\mathfrak{g}$ tout élément est un crochet. Donc α doit s'annuler sur tout $\mathfrak{g}$ pour être un cocycle, donc doit être nul. Puisqu'il n'y a pas de cocycle non nul, $H^1(\mathfrak{g}) = 0$.

Dans le cas d'une algèbre de Lie abélienne (donc réductive), les espaces $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ et $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ sont respectivement $\bigwedge\mathfrak{g}$ et $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ tout entier. Dans ce cas, les espaces $H_*(\mathfrak{g})$ et $H^*(\mathfrak{g})$ sont des algèbres graduées commutatives. Nous allons voir que dans le cas d'une algèbre de Lie réductive, on retrouve une situation analogue.

Soit η est une représentation d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ sur V. On peut montrer que l'inclusion $\mathscr{I}(V) \otimes \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \hookrightarrow \mathscr{I}(V \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*)$[1] induit un isomorphisme $\mathscr{I}(V) \otimes \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \simeq H^*(\mathscr{I}(V \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*))$. Si η est semi-simple, alors l'inclusion $\mathscr{I}(V \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*) \hookrightarrow V \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*$ induit un isomorphisme $H^*(\mathscr{I}(V \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*)) \simeq H^*(\mathfrak{g}, V)$. Donc, dans ce cas on a

$$H^*(\mathfrak{g}, V) \simeq \mathscr{I}(V) \otimes \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$$

Ce résultat est donc tout à fait semblable au précédent.

[1] $\mathscr{I}(V)$ désigne le sous-espace vectoriel des éléments de V annulés par $\eta(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Structures de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ et $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathfrak{g}$ est réductive. Il est évident que $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ et $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ sont des sous-algèbres de $\bigwedge\mathfrak{g}$ et $\bigwedge\mathfrak{g}^*$. Nous allons voir que ces algèbres peuvent être caractérisées plus finement.

Soit $\Delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ l'application diagonale $\Delta(X) = X \oplus X$. On peut montrer que $\mathscr{I}(\bigwedge(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})) = \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})\otimes\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$, donc on peut prolonger Δ en $\Delta : \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}) \to \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})\otimes\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$. Pour $a \in \bigwedge^+\mathfrak{g}$,[2] on peut montrer que $\Delta(a) = a\otimes 1+b+1\otimes a$, avec $b \in \mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g})\otimes\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g})$. On dira qu'un élément $a \in \bigwedge^+\mathfrak{g}$ est **primitif** si $\Delta(a) = a\otimes 1 + 1\otimes a$. On note $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ le sous-espace vectoriel des éléments primitifs de $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g})$. Il est alors possible de montrer que :

1. tout élément primitif homogène est de degré impair ;
2. si $a_1, \dots, a_p$ sont primitifs homogènes, linéairement indépendants, alors $a_1\wedge\cdots\wedge a_p \neq 0$;
3. la dimension de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est le rang de $\mathfrak{g}$;
4. $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est l'orthocomplément de l'idéal gradué dans $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ engendré par $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)^2$;
5. pour deux algèbres de Lie réductives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, on a $\mathbb{P}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}) = (\mathbb{P}(\mathfrak{g})\otimes 1) \oplus (1\otimes\mathbb{P}(\mathfrak{h}))$.

Les éléments de $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)^2$ sont appelés des éléments **décomposables**. Les éléments primitifs de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ sont donc les éléments qui s'annulent, pour le produit scalaire de dualité, sur les éléments qui s'écrivent sous forme d'un produit.

On peut étendre l'inclusion $\mathbb{P}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ en une application $\bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ de degré 0 si on munit $\bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ de la graduation induite par la graduation de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Dans le cas d'une algèbre de Lie réductive, on peut montrer que cette application est un isomorphisme d'algèbres graduées. Donc on a
$$\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}) \simeq \bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g})$$

On peut obtenir la structure de la sous-algèbre $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ d'une façon tout à fait analogue. Pour ça, on introduit l'application $\mu : \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\mu(X\oplus Y) = X+Y$, qu'on prolonge en $\mu : \bigwedge\mathfrak{g}\otimes\bigwedge\mathfrak{g} \to \bigwedge\mathfrak{g}$, où elle correspond à la multiplication ordinaire. Cette application se restreint sur les sous-espaces $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})\otimes\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}) \to \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$. On note $\gamma : \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)\otimes\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ son dual. C'est la comultiplication. On peut montrer que pour tout $\phi \in \mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)$, il existe $\psi \in \mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)\otimes\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)$ tel que $\gamma(\phi) = \phi\otimes 1 + \psi + 1\otimes\phi$. Les éléments de $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)$ qui vérifient $\gamma(\phi) = \phi\otimes 1 + 1\otimes\phi$ sont appelés **primitifs**. Ils engendrent un sous-espace vectoriel $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ de $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)$. On peut montrer que :

1. les éléments homogènes de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ sont de degré impair ;
2. si $\phi_1, \dots, \phi_p$ sont primitifs homogènes, linéairement indépendants, alors $\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_p \neq 0$;
3. $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ est l'orthocomplément de l'idéal gradué dans $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ engendré par $\mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g})^2$;

On peut étendre l'inclusion $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*) \hookrightarrow \mathscr{I}(\bigwedge^+\mathfrak{g}^*)$ en une application $\bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ de degré 0 (en munissant comme précédemment $\bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ de la graduation induite par la graduation de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$). Dans le cas d'une algèbre de Lie réductive, cette application est un isomorphisme. Donc on a
$$\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \simeq \bigwedge\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$$
Ce résultat est le **théorème de Hopf**.

En conclusion, dans le cas des algèbres de Lie réductives, les espaces de cohomologie $H_*(\mathfrak{g})$ et $H^*(\mathfrak{g})$ sont des algèbres extérieures sur des sous-espaces ayant une graduation impaire. La structure d'algèbre sur $H_*(\mathfrak{g})$ ainsi obtenue (qui ne provient pas de la structure de l'algèbre $\bigwedge\mathfrak{g}$ puisque ∂ ne la respecte pas), est appelée structure d'**algèbre de Pontrjagin**.

[2] On rappelle que $\bigwedge^+\mathfrak{g} = \oplus_{p\geq 1}\bigwedge^p\mathfrak{g}$.

On peut montrer que le produit scalaire (de dualité) entre $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ et $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g})$ se restreint en un produit scalaire de dualité entre $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ et $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, on a vu que $H^1(\mathfrak{g}) = 0$. Compte-tenu de la structure de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ qui vient d'être décrite, on a aussi $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ (ce résultat est connu sous le nom de **lemme de Whitehead**), et $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ n'admet des éléments qu'à partir du degré 3. On peut facilement décrire un de ces éléments particulier de degré 3. Soit K la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. Posons
$$\phi(X,Y,Z) = K([X,Y],Z) \tag{4.1}$$
Alors en utilisant l'invariance de K sous l'action de ad^*, et l'identité de Jacobi, il est facile de voir que ϕ est un élément invariant de $\bigwedge^3\mathfrak{g}^*$. On peut montrer que c'est un élément de $\mathbb{P}^3(\mathfrak{g}^*)$. Ce type de construction sera généralisé lors de l'étude de l'algèbre de Weil.

4.1.4 Extensions d'algèbres de Lie

Considérons une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui se représente sur un espace vectoriel V par η. Nous voulons définir sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}\oplus V$ un crochet de Lie pour en faire une algèbre de Lie. Une telle algèbre de Lie est un **produit semi-direct** $V \rtimes \mathfrak{g}$. Pour cela, soit $\alpha \in C^2(\mathfrak{g}, V)$. Nous posons, pour tous $X+v, Y+w \in \mathfrak{g}\oplus V$,
$$[X+v, Y+w] = [X,Y] + \eta(X)w - \eta(Y)v + \alpha(X,Y)$$
Alors ce crochet vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si $d\alpha = 0$. Ce résultat est facile à démontrer. Si maintenant nous prenons $\alpha + d\beta$ au lieu de α, avec $\beta \in C^1(\mathfrak{g}, V)$, alors ce crochet devient
$$[X+v, Y+w]_\beta = [X,Y] + \eta(X)w - \eta(Y)v + \alpha(X,Y) + d\beta(X,Y)$$
Or, $d\beta(X,Y) = \eta(X)\beta(Y) - \eta(Y)\beta(X) - \beta([X,Y])$, donc
$$\begin{aligned}[X+v, Y+w]_\beta = [X,Y] - \beta([X,Y]) + \eta(X)w + \eta(X)\beta(Y)\\ - \eta(Y)v - \eta(Y)\beta(X) + \alpha(X,Y)\end{aligned}$$
Nous réécrivons cette expression sous la forme
$$[X - \beta(X) + v, Y - \beta(Y) + w]_\beta = [X,Y] - \beta([X,Y]) + \eta(X)w + -\eta(Y)v + \alpha(X,Y)$$
Considérons alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels
$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{g}\oplus V &\to \mathfrak{g}\oplus V\\ X+v &\mapsto X - \beta(X) + v\end{aligned}$$
Nous constatons que
$$\varphi([X+v, Y+w]) = [\varphi(X+v), \varphi(Y+w)]_\beta$$
Nous avons donc un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g}\oplus V$ muni du crochet défini par α, et $\mathfrak{g}\oplus V$ muni du crochet défini par $\alpha + d\beta$. Les deux structures d'algèbre de Lie qui ont été définies sur $\mathfrak{g}\oplus V$ sont donc les mêmes (à un isomorphisme près). Ceci signifie que l'ajout d'un cobord ne change pas cette structure d'algèbre de Lie.

Ainsi, tout élément de $H^2(\mathfrak{g}, V)$ définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}\oplus V$.

4.1.5 Déformation d'un crochet de Lie

Prenons comme précédemment $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et cette fois $V = \mathfrak{g}$ avec $\eta = ad$. Nous allons nous intéresser aux déformations du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Une **déformation** de ce crochet est par définition une série formelle

$$[X, Y]_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \alpha_k(X, Y)$$

avec

$$\alpha_0(X, Y) = [X, Y]$$

et ϵ un paramètre petit. Pour $\epsilon = 0$, nous avons le crochet d'origine sur $\mathfrak{g}$. Les α_k sont des éléments de $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Intéressons nous plus particulièrement à $k = 1$, c'est à dire au terme linéaire en ϵ. Posons $\alpha_1 = \alpha \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Si nous écrivons l'identité de Jacobi sur le crochet $[\cdot, \cdot]_\epsilon$ et que nous ne retenons que les termes linéaires en ϵ, alors α doit être un cocycle : $d\alpha = 0$. Si maintenant $\alpha = d\beta$ est un cobord, alors la déformation du crochet est triviale, au sens où la nouvelle structure d'algèbre de Lie obtenue est isomorphe à l'ancienne, à l'ordre ϵ, par l'isomorphisme

$$X \mapsto X - \epsilon\beta(X)$$

Donc nous constatons que $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ donne des informations sur les déformations possibles (au premier ordre en ϵ) du crochet de lie de $\mathfrak{g}$.

4.2 (Co)homologies de groupes

4.2.1 Homologie de groupes

Soit G un groupe, et V un espace vectoriel qui est un module à droite sur G (c'est à dire que G se représente à droite sur V). On définit le complexe $C_*(G, V)$ comme l'ensemble des symboles $v \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_p \in C_p(G, V)$ pour $p \geq 1$, et $C_0(G, V) = V$. On définit sur cet espace vectoriel gradué une différentielle décroissante

$$\begin{aligned}\partial(v \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_p) = vg_1 \otimes g_2 \cdots \otimes g_p \\ + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i v \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_p \\ + (-1)^p v \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{p-1}\end{aligned}$$

On peut vérifier que $\partial^2 = 0$, et on peut définir $H_*(G, V)$, l'**homologie de G à valeurs dans V**.

Comme on peut le voir, cette homologie ne dépend pas d'une éventuelle structure topologique ou différentiable sur G. Elle est définie pour tout type de groupe, et n'utilise que la structure algébrique de G. Elle ne doit pas être confondue avec l'homologie d'un groupe topologique (ou de Lie) définie grâce à la topologie du groupe. Nous verrons cependant que cette homologie peut être reliée à l'homologie d'un espace topologique canoniquement associée à G.

4.2.2 Cohomologie des groupes

La cohomologie d'un groupe G est la version duale de l'homologie définie précédemment. Soit donc G un groupe, et V un espace vectoriel qui est un module à gauche sur G (V supporte donc une représentation de G à gauche). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $C^n(G, V)$ l'espace vectoriel des applications

$$f : G^n \to V$$

Nous définissons une **différentielle** d sur l'espace gradué $C(G, V) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} C^n(G, V)$, en posant, pour tout $f \in C^n(G, V)$ et tous $g_1, \ldots, g_{n+1} \in G$,

$$\begin{aligned}df(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'application

$$d : C^n(G, V) \to C^{n+1}(G, V)$$

est de carré nul $d^2 = 0$. La cohomologie $H^*(G, V)$ du complexe $(C^*(G, V), d)$ est la **cohomologie du groupe G à valeurs dans V**. Là encore, cette cohomologie ne dépend que de la structure de groupe, et pas d'une éventuelle structure additionnelle sur G. Il ne faut pas confondre cette cohomologie avec la cohomologie de de Rham d'un groupe de Lie. Si le groupe est topologique, il est possible de considérer un sous-complexe constitué des cochaînes continues sur G.

4.2.3 Extensions de groupes par un groupe abélien

Soient G et K deux groupes. On dit que $\widetilde{G}$ est une **extension du groupe G par le groupe K** si K est un sous-groupe normal de $\widetilde{G}$ et G s'identifie à $\widetilde{G}/K$. En d'autres termes, on a une suite exacte courte de groupes

$$1 \to K \to \widetilde{G} \to G \to 1$$

Par exemple, le produit direct de deux groupes est une extension de l'un des deux facteurs par l'autre.

Le fait que la suite ci-dessus soit exacte ne permet pas de définir complètement $\widetilde{G}$ en fonction de G et K. Puisque K est normal dans $\widetilde{G}$, le groupe $\widetilde{G}$ agit par conjugaison sur K. Si $\mathrm{Aut}(K)$ désigne le groupe des automorphismes de K, on a un morphisme $f : \widetilde{G} \to \mathrm{Aut}(K)$ où $f(\tilde{g})(k) = \tilde{g}^{-1}k\tilde{g}$. Deux éléments $\tilde{g}$ et $\tilde{g}'$ dans la même classe pour le quotient $\widetilde{G}/K$, c'est à dire $\tilde{g}' = h\tilde{g}$ avec $h \in K$, produisent deux automorphismes dans K qui ne diffèrent que par un automorphisme intérieur de K : $f(\tilde{g}')(k) = \tilde{g}^{-1}h^{-1}kh\tilde{g}$. On note $\mathrm{Int}(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(K)$ des automorphismes intérieurs de K. On obtient donc une application $\sigma : G \to \mathrm{Out}(K)$ où $\mathrm{Out}(K) = \mathrm{Aut}(K)/\mathrm{Int}(K)$. La donnée d'une extension $\widetilde{G}$ de G par K induit donc les morphismes f et σ. Le problème de l'extension consiste à trouver (ou construire !) $\widetilde{G}$ à partir des données (G, K, σ). Ce problème n'admet pas toujours de solution.

Deux extensions $\widetilde{G}_1$ et $\widetilde{G}_2$ sont dite équivalentes si il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \widetilde{G}_1 \to \widetilde{G}_2$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{G}_1 \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[r] & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] & 1 \\ & & \widetilde{G}_1 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

On va s'intéresser aux extensions pour lesquelles K est un groupe abélien (dont la loi est notée additivement). Étant donné (G, K, σ), l'ensemble $\widetilde{G}$ s'identifie à $K \times G$. Compte-tenue de la structure générale d'une extension, le produit dans $\widetilde{G}$ s'écrit sous la forme

$$(k', g')(k, g) = (k' + \sigma(g')k + \xi(g', g), g'g)$$

où $\xi : G \times G \to K$. L'associativité de ce produit implique la relation

$$\sigma(g'')\xi(g', g) - \xi(g''g', g) + \xi(g'', g'g) - \xi(g'', g) = 0$$

Cette relation s'écrit $d\xi = 0$ où d est la différentielle sur $C^2(G, K)$, où la structure de module à gauche sur K est définie par le produit $(g, k) \mapsto \sigma(g)k$. Donc ξ est un 2-cocycle dans ce complexe. Il faut noter que ce complexe dépend de σ.

Si ξ_1 et ξ_2 diffèrent par un cobord $d\eta$, $\xi_1 - \xi_2 = d\eta$, alors $\widetilde{G}_1$ et $\widetilde{G}_2$ sont équivalents, avec $\phi(k_1, g_1) = (k_1 + \eta(g_1), g_1)$. Donc le second groupe de cohomologie $H^2(G, K)$ classe les extensions de G par le groupe abélien K, étant donné le morphisme $\sigma : G \to \mathrm{Out}(K)$. Il existe toujours au moins une telle extension, celle qui correspond au 2-cocycle trivial. Dans ce cas, le groupe $\widetilde{G}$ est le produit semi-direct de G par K, dans lequel le produit est donné par $(k', g')(k, g) = (k' + \sigma(g')k, g'g)$.

On notera les fortes similitudes entre ces extensions de groupes et les extensions d'algèbres de Lie construites en 4.1.4.

4.2.4 Représentations projectives

Les représentations projectives jouent un grand rôle en physique quantique. Nous allons montrer en quoi la cohomologie intervient dans ce cadre. Il est hors de question de faire ici un exposé complet sur les représentations projectives.

Une application ρ d'un groupe G sur les automorphismes d'un espace vectoriel complexe V est une **représentation projective** si pour tous $g, h \in G$, on a

$$\rho(g)\rho(h) = e^{i\xi(g,h)}\rho(gh)$$

L'application $e^{i\xi} : G \times G \to U(1)$ doit satisfaire à

$$e^{i(\xi(g_2,g_3) - \xi(g_1g_2,g_3) + \xi(g_1,g_2g_3) - \xi(g_1,g_2))} = 1$$

pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ pour assurer l'associativité du produit $\rho(g_1)\rho(g_2)\rho(g_3)$. La relation ci-dessus peut être interprétée comme une relation de cocycle pour la différentielle d sur

les cochaînes à valeurs dans $U(1)$, où la structure de module est triviale, et où le produit remplace l'addition dans les formules usuelles.

L'ajout d'un cobord $d\gamma$ sur $e^{i\xi}$, pour cette différentielle, avec $\gamma : G \to U(1)$, prend la forme

$$e^{i\xi'(g,h)} = e^{i\xi(g,h)}\gamma(gh)^{-1}\gamma(g)\gamma(h)$$

Il est facile de voir que $e^{i\xi'}$ est associé à la nouvelle représentation $\rho'(g) = \rho(g)\gamma(g)$. Nous dirons que ces deux représentations sont équivalentes. Donc le second groupe de cohomologie $H^2(G, U(1))$ classent les représentations projectives pour cette relation d'équivalence.

4.3 (Co)homologies de Hochschild

4.3.1 Homologie de Hochschild

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre associative et $\mathscr{M}$ un bimodule sur $\mathscr{A}$. Définissons les espaces vectoriels

$$C_n(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \mathscr{M} \otimes \mathscr{T}^n\mathscr{A}$$

avec $C_0(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \mathscr{M}$ et

$$\mathscr{T}^n\mathscr{A} = \underbrace{\mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}}_{n \text{ fois}}$$

Définissons sur l'espace vectoriel gradué

$$C_*(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n(\mathscr{A}, \mathscr{M})$$

l'endomorphisme $\partial : C_n(\mathscr{A}, \mathscr{M}) \to C_{n-1}(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ par

$$\begin{aligned} \partial(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & \\ + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & \end{aligned}$$

En utilisant l'associativité du produit sur $\mathscr{A}$, on vérifie par un calcul simple que $\partial^2 = 0$.

L'homologie de ce complexe différentiel décroissant est l'**homologie de Hochschild de $\mathscr{A}$ à valeurs dans $\mathscr{M}$**, notée $H_*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$. L'homologie de Hochschild est invariante de Morita, c'est à dire que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux algèbres équivalentes de Morita, et si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont respectivement des bimodules sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ qui se correspondent par cette équivalence, alors $H_*(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = H_*(\mathscr{B}, \mathscr{N})$.

Comme bimodule particulier, nous pouvons prendre $\mathscr{A}$. Dans ce cas, nous noterons $C_*(\mathscr{A})$ le complexe associé et $HH_*(\mathscr{A}) = H_*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ son homologie. Cette homologie respecte le produit direct d'algèbres au sens où

$$HH_n(\mathscr{A} \times \mathscr{A}') = HH_n(\mathscr{A}) \oplus HH_n(\mathscr{A}')$$

Dans le cas où l'algèbre $\mathscr{A}$ est le corps de base $\mathbb{C}$ lui-même, on a $HH_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $HH_n(\mathbb{C}) = 0$ pour $n \geq 1$.

Au plus bas degré, on a $\operatorname{Im} \partial = \{ma - am / m \in \mathscr{M},\ a \in \mathscr{A}\}$. Donc $H_0(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \mathscr{M}/\{ma - am/m \in \mathscr{M},\ a \in \mathscr{A}\}$. On pose $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ cet espace. C'est le module des **éléments coinvariants de** $\mathscr{M}$ **par** $\mathscr{A}$. Dans le cas $\mathscr{M} = \mathscr{A}$, on a $HH_0(\mathscr{A}) = \mathscr{A}/[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$ où $[\mathscr{A}, \mathscr{A}] = \{aa' - a'a/a, a' \in \mathscr{A}\}$. Par l'invariance de Morita, on a aussi $HH_0(M(n, \mathscr{A})) = \mathscr{A}/[\mathscr{A}, \mathscr{A}]$.

Soit G est un groupe. On lui associe une algèbre associative canonique $\mathbb{R}G$ de la façon suivante : les éléments de cette algèbre sont les sommes formelles

$$a = \sum_{g \in G} a_g g$$

pour des coefficients $a_g \in \mathbb{R}$ dont un nombre fini seulement sont non nuls. L'élément neutre est $\mathbb{1} = e$, l'élément unité de G. Si un espace vectoriel V est un module à droite sur G, alors on peut le considérer comme bimodule sur $\mathbb{R}G$, où la structure à droite est héritée de façon évidente de la structure de module sur G (en prolongeant par linéarité), et la structure à gauche est triviale. Il est alors facile, en comparant les formules dans 4.2.1 avec les formules ci-dessus, de voir que l'homologie de groupe de G à valeurs dans V est aussi l'homologie de Hochschild de $\mathbb{R}G$ pour le bimodule V. On peut définir de la même façon l'algèbre associative $\mathbb{C}G$.

4.3.2 Cohomologie de Hochschild

La cohomologie de Hochschild est la version duale de l'homologie de Hochschild. Soient $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire et $\mathscr{M}$ un bimodule sur $\mathscr{A}$. Soit $C^n(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ le bimodule des applications linéaires

$$\underbrace{\mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}}_{n \text{ fois}} \to \mathscr{M}$$

Par convention, nous posons $C^0(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \mathscr{M}$.

Soit δ la **différentielle** définie sur le bimodule gradué

$$C(\mathscr{A}, \mathscr{M}) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(\mathscr{A}, \mathscr{M})$$

par $\delta : C^n(\mathscr{A}, \mathscr{M}) \to C^{n+1}(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ en posant

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(a_0, \dots, a_n) = a_0 \omega(a_1, \dots, a_n) \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \omega(a_0, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}a_i, a_{i+2}, \dots, a_n) \\ + (-1)^{n+1} \omega(a_0, \dots, a_{n_1}) a_n\end{aligned}$$

En utilisant l'associativité du produit, il est facile de vérifier que $\delta^2 = 0$. $(C^*(\mathscr{A}, \mathscr{M}), d)$ est le **complexe de Hochschild de l'algèbre** $\mathscr{A}$ **à valeurs dans le bimodule** $\mathscr{M}$. Sa cohomologie $H^*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ est la **cohomologie de Hochschild de** $\mathscr{A}$ **à valeurs dans** $\mathscr{M}$. Cette cohomologie est invariante de Morita.

Nous dirons qu'une cochaîne de $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ est **normalisée** si elle s'annule dès que l'un de ses arguments est multiple de $\mathbb{1}$. On note $\overline{C}^*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ le sous-espace des cochaînes normalisées. Il est facile de voir que $\overline{C}^*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ est stable par δ, et on peut montrer que sa cohomologie

est la même que celle de $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{M})$. Ce résultat permet de réduire le complexe différentiel avec lequel on calcule la cohomologie de Hochschild.

Il est facile de voir que là aussi la cohomologie de Hochschild d'une algèbre de groupe $\mathbb{R}G$ calcule la cohomologie de groupe de G.

4.3.3 Cohomologie de Hochschild à valeurs dans les scalaires

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C}$ est un bimodule (trivial) sur $\mathscr{A}$ pour les produits $a\lambda = 0$ et $\lambda a = 0$ pour tous $a \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, le complexe de Hochschild à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $C^*(\mathscr{A})$. $C^n(\mathscr{A})$ est l'espace vectoriel des applications linéaires

$$\underbrace{\mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}}_{n \text{ fois}} \to \mathbb{C}$$

et la différentielle se réduit à

$$(\delta\omega)(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \omega(a_0, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}a_i, a_{i+2}, \dots, a_n)$$

La cohomologie de ce complexe est triviale. En effet, on peut construire une homotopie contractante

$$h : C^n(\mathscr{A}) \to C^{n+1}(\mathscr{A})$$

telle que $h\delta + \delta h = \mathrm{Id}$ en posant

$$(h\omega)(a_1, \dots, a_{n-1}) = \omega(\mathbb{1}, a_1, \dots, a_{n-1})$$

On remarquera que l'unité de $\mathscr{A}$ est essentielle pour construire cette homotopie.

4.3.4 Cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre

Nous allons étudier plus en détails le cas où le bimodule $\mathscr{M}$ est $\mathscr{A}$ lui-même.

Centre et dérivations

Un élément $a \in \mathscr{A} = C^0(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ est un cocycle si et seulement si $(\delta a)(b) = ab - ba = [a, b] = 0$ pour tout $b \in \mathscr{A}$. Ceci signifie que l'ensemble des cocycles d'ordre 0 est le centre de l'algèbre, $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$. Comme il n'y a pas de cobord non nul à cet ordre, nous avons

$$H^0(\mathscr{A}, \mathscr{A}) = \mathscr{Z}(\mathscr{A})$$

Maintenant, soit $X : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ un élément de $C^1(\mathscr{A}, \mathscr{A})$. X est un cocycle si pour tous $a, b \in \mathscr{A}$, nous avons

$$(\delta X)(a, b) = aX(b) - X(ab) + X(a)b = 0$$

c'est-à-dire

$$X(ab) = X(a)b + aX(b)$$

Donc l'ensemble des cocycles de $C^1(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ est $\mathrm{Der}(\mathscr{A})$, l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathscr{A}$. D'autre part, X est un cobord s'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $(\delta a)(b) = X(b)$, c'est-à-dire

$$X(b) = ab - ba = ad_a b$$

L'ensemble des cobords de $C^1(\mathscr{A},\mathscr{A})$ est donc $\mathrm{Int}(\mathscr{A})$, l'algèbre de Lie des dérivations intérieures de $\mathscr{A}$. Ainsi, nous avons

$$H^1(\mathscr{A},\mathscr{A}) = \mathrm{Der}(\mathscr{A})/\mathrm{Int}(\mathscr{A}) = \mathrm{Out}(\mathscr{A})$$

Ceci donne un lien entre la cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre, et les dérivations de cette algèbre.

Le cup produit

Il est possible de définir sur l'espace vectoriel $C^*(\mathscr{A},\mathscr{A})$ un produit, appelé **cup produit**. Par définition, pour $f \in C^m(\mathscr{A},\mathscr{A})$ et $g \in C^n(\mathscr{A},\mathscr{A})$, $f \smile g$ est la cochaîne de $C^{m+n}(\mathscr{A},\mathscr{A})$ définie par

$$(f \smile g)(a_1,\dots,a_{m+n}) = f(a_1,\dots,a_m)g(a_{m+1},\dots,a_{m+n})$$

On peut alors montrer que

$$\delta(f \smile g) = (\delta f) \smile g + (-1)^m f \smile (\delta g)$$

donc $(C^*(\mathscr{A},\mathscr{A}),\delta)$ est une algèbre différentielle graduée.

Par conséquent, le cup produit passe à la cohomologie, et l'on peut montrer que $H^*(\mathscr{A},\mathscr{A})$ devient une algèbre *graduée commutative* pour le cup produit induit, c'est à dire que l'on a

$$[f] \smile [g] = (-1)^{mn}[g] \smile [f]$$

où $[f]$ désigne la classe de cohomologie de f.

Composition de cochaînes

Soient f et g comme ci-dessus. Pour $1 \leq i \leq m$, on pose

$$f \circ_i g(a_1,\dots,a_{m+n-1}) = f(a_1,\dots,a_{i-1},g(a_i,\dots,a_{i+n-1}),a_{i+n},\dots,a_{m+n-1})$$

qui est un élément de $C^{m+n-1}(\mathscr{A},\mathscr{A})$, et on définit la composition de f par g par la relation

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n-1)(i-1)} f \circ_i g$$

Cette loi de composition sur $C^*(\mathscr{A},\mathscr{A})$ permet de définir le **commutateur gradué** de f et g comme

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \circ f$$

où le degré de f et g doit être diminué de 1.

Alors $C^*(\mathscr{A},\mathscr{A})$ muni de ce crochet gradué est une algèbre de Lie graduée. Ce crochet passe en cohomologie, et donne à $H^*(\mathscr{A},\mathscr{A})$ une structure d'algèbre de Lie graduée, compatible avec le cup produit aux sens où $[\cdot,f]$ est une dérivation graduée de $\smile$, de degré $m-1$.

Restreint à $\mathrm{Der}(\mathscr{A}) \subset C^1(\mathscr{A},\mathscr{A})$ et à $\mathrm{Out}(\mathscr{A}) = H^1(\mathscr{A},\mathscr{A})$, ce crochet coïncide avec les crochets d'algèbre de Lie respectifs.

Une **algèbre de Poisson graduée** est une algèbre associative graduée munie d'un crochet de Lie gradué qui induit des dérivations graduées pour le produit associatif. Alors le crochet défini plus haut fait de $H^*(\mathscr{A};\mathscr{A})$ une algèbre de Poisson graduée commutative.

4.3.5 Déformation d'algèbres associatives

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire, et notons $\mu_0 : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ son produit, $\mu_0(a \otimes b) = ab$. Nous voulons étudier les déformations du produit μ_0 au sens suivant. Soit ϵ un paramètre, on pose la série formelle

$$\mu_\epsilon(a \otimes b) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \mu_k(a \otimes b)$$

où $\mu_k : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ sont des applications linéaires. On retrouve bien sûr le produit de départ pour $\epsilon = 0$.

Regardons les conséquences de l'associativité de μ_ϵ à l'ordre $k = 1$. La relation

$$\mu_\epsilon(\mu_\epsilon(a \otimes b) \otimes c) = \mu_\epsilon(a \otimes \mu_\epsilon(b \otimes c))$$

conduit à l'ordre en ϵ, compte tenu de l'associativité de μ_0, à

$$\mu_1(ab \otimes c) + \mu_1(a \otimes b)c = \mu_1(a \otimes bc) + a\mu_1(b \otimes c)$$

Ceci s'interprète comme le fait que μ_1 est un 2-cocycle de Hochschild : $\mu_1 \in Z^2(\mathscr{A},\mathscr{A})$. Ainsi, $\delta\mu_1 = 0$ est équivalente à l'associativité de μ_ϵ à l'ordre ϵ.

Si maintenant μ_1 est un 2-cobord, alors il existe une 1-cochaîne $\beta : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ telle que $\mu_1(a \otimes b) = a\beta(b) - \beta(ab) + \beta(a)b$. Effectuons alors la transformation $a \mapsto a - \epsilon\beta(a)$ entre l'algèbre $(\mathscr{A},\mu_0)$ et l'algèbre $(\mathscr{A},\mu_\epsilon)$. C'est un isomorphisme à l'ordre ϵ de l'espace vectoriel $\mathscr{A}$ sur lui-même. Au premier ordre en ϵ, cette transformation respecte les produits, c'est-à-dire que $\mu_0(a \otimes b)$ est envoyé sur $\mu_0(a \otimes b) - \epsilon\beta(\mu_0(a \otimes b))$. Dans ce cas, nous dirons que la déformation du produit est triviale à l'ordre ϵ.

Ceci permet de conclure que l'espace $H^2(\mathscr{A},\mathscr{A})$ (δ étant défini pour le produit μ_0 sur $\mathscr{A}$) classe les déformations possibles du produit associatif μ_0 sur $\mathscr{A}$.

Si $\mu_1 \in Z^2(\mathscr{A},\mathscr{A})$ est le premier terme de la déformation du produit, alors l'associativité à l'ordre 2 impose

$$\mu_2(a,b)c + \mu_1(\mu_1(a,b),c) + \mu_2(ab,c) - \mu_2(a,bc) - \mu_1(a,\mu_1(b,c)) - a\mu_2(b,c) = 0$$

Posons $\phi(a,b,c) = \mu_1(\mu_1(a,b),c) - \mu_1(a,\mu_1(b,c))$. L'équation ci-dessus se réinterprète alors comme $\delta\mu_2 = \phi$. Il faut que cette relation soit satisfaite dans $C^3(\mathscr{A},\mathscr{A})$. Les obstructions à l'existence de μ_1 se retrouvent donc dans $H^3(\mathscr{A},\mathscr{A})$, à travers la classe de ϕ qui doit y être triviale. Si $H^3(\mathscr{A},\mathscr{A}) = 0$, on peut montrer qu'il n'y a jamais d'obstruction à l'ordre 2, ni aux ordres supérieurs.

Si maintenant nous voulons que l'élément unité $\mathbb{1}$ de $\mathscr{A}$ reste unité pour μ_ϵ, alors on doit avoir $\mu_k(\mathbb{1} \otimes a) = \mu_k(a \otimes \mathbb{1}) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et tout $a \in \mathscr{A}$. Ceci signifie que μ_1 est une cochaîne normalisée de $C^2(\mathscr{A},\mathscr{A})$. Comme la cohomologie de Hochschild est la même si on la calcule sur les cochaînes normalisées, on peut sans perdre en généralité supposer que l'élément unité est stable dans la déformation du produit.

4.3.6 Cohomologie cyclique

La cohomologie cyclique a été introduite par A. Connes en 1981 à partir de considérations sur les traces d'opérateurs et les classes caractéristiques. Nous n'en donnons ici que la définition.

Le complexe de Hochschild $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative. Alors $\mathscr{A}^*$ est un bimodule sur $\mathscr{A}$ en posant, pour $\phi \in \mathscr{A}^*$ et $a, b, c \in \mathscr{A}$,

$$(a\phi b)(c) = \phi(bca)$$

On considère alors le complexe de Hochschild pour ce bimodule. Pour $\phi \in C^n(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$, on note $\phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ la valeur de cette cochaîne sur $a_0 \in \mathscr{A}$, où $\phi(\cdot, a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{A}^*$. On peut donc considérer ces cochaînes comme des applications $(n+1)$-linéaires sur $\mathscr{A}$.

L'opérateur de cobord δ prend alors la forme

$$\begin{aligned}\delta\phi(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) = \phi(a_0 a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \\ + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \phi(a_0, a_1, \dots, a_p a_{p+1}, \dots, a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

La cohomologie cyclique

La cohomologie cyclique est obtenue en considérant un sous-complexe du complexe précédent $(C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*), \delta)$ en ne retenant que les cochaînes qui vérifient une certaine propriété de symétrie. Soit $C^n_\lambda(\mathscr{A})$ l'ensemble des cochaînes $\phi \in C^n(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$ vérifiant la propriété de cyclicité

$$\phi(a_1, \dots, a_n, a_0) = (-1)^n \phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

Alors $C^*_\lambda(\mathscr{A}) = \oplus_{n\geq 0} C^n_\lambda(\mathscr{A})$ est stable par δ. Nous noterons b la **différentielle** δ restreinte à ce complexe. Elle prend la forme

$$b\phi(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \phi(a_0, \dots, a_p a_{p+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, \dots, a_n)$$

La cohomologie de $(C^*_\lambda(\mathscr{A}), b)$ est la **cohomologie cyclique de** $\mathscr{A}$, notée $HC^*(\mathscr{A})$.

Pour $n = 0$, $HC^0(\mathscr{A}) = Z^0_\lambda(\mathscr{A})$ est exactement l'espace vectoriel des traces sur $\mathscr{A}$, c'est à dire des applications $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ telles que $\phi(ab) = \phi(ba)$.

Cette cohomologie n'est pas triviale comme le montre le résultat suivant : pour $\mathscr{A} = \mathbb{C}$, la cohomologie $H^*(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$ est triviale, alors que $HC^{2p}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $HC^{2p+1}(\mathbb{C}) = 0$.

4.4 Calculs différentiels

Un **calcul différentiel** sur une algèbre associative $\mathscr{A}$ est une algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(\mathscr{A}), d)$ telle que $\Omega^0(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ et chaque $\Omega^n(\mathscr{A})$ est construit à partir de $\mathscr{A}$. En d'autres termes, $\mathscr{A}$ suffit à construire $(\Omega^*(\mathscr{A}), d)$. Par exemple, si $\mathscr{A} = \mathscr{F}(M)$ est l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété M, alors les formes différentielles de de Rham constituent un calcul différentiel sur $\mathscr{A}$. Il existe plusieurs calculs différentiels associés à une algèbre $\mathscr{A}$. Dans ce qui suit, on se propose d'en décrire quelques uns, et de montrer leur relations avec les notions cohomologiques.

4.4.1 L'algèbre $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ et le calcul différentiel universel

Parmi tous les calculs différentiels associés à une algèbre $\mathscr{A}$, il en existe un qui est universel au sens où un grand nombre de calculs différentiels sur $\mathscr{A}$ en sont un quotient. C'est donc lui qui est défini en premier dans ce qui suit. La construction proposée l'introduit comme sous-algèbre différentielle d'une algèbre plus grande.

L'algèbre $\mathfrak{T}\mathscr{A}$

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{C}$. En tant qu'espace vectoriel, on définit

$$\mathfrak{T}^n\mathscr{A} = \underbrace{\mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}}_{n+1 \text{ fois}}$$

avec $\mathfrak{T}^0\mathscr{A} = \mathscr{A}$. Les $\mathfrak{T}^n\mathscr{A}$ sont des bimodules sur $\mathscr{A}$, pour la structure qui consiste à multiplier sur les composantes les plus à gauche et les plus à droite du produit tensoriel. On associe à $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \in \mathfrak{T}^n\mathscr{A}$ et $b_0 \otimes \cdots \otimes b_m \in \mathfrak{T}^m\mathscr{A}$ l'élément $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes \cdots \otimes b_m \in \mathfrak{T}^{n+m}\mathscr{A}$. Ceci donne à l'espace

$$\mathfrak{T}\mathscr{A} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{T}^n\mathscr{A}$$

une structure d'algèbre graduée. On prendra garde au fait qu'il ne s'agit pas de l'algèbre tensorielle sur l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{A}$. Dans $\mathfrak{T}\mathscr{A}$, la structure d'algèbre de $\mathscr{A}$ est utilisée pour définir le produit.

On définit maintenant sur cette algèbre une **différentielle** d_U, en posant

$$\begin{aligned}d_U(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \mathbb{1} \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \\ + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \otimes \mathbb{1} \otimes a_p \otimes \cdots \otimes a_n \\ + (-1)^{n+1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mathbb{1}\end{aligned}$$

On montre alors facilement que d_U est une dérivation graduée de degré 1 de l'algèbre graduée $\mathfrak{T}\mathscr{A}$, vérifiant $d_U^2 = 0$. Donc $(\mathfrak{T}\mathscr{A}, d_U)$ est une algèbre différentielle graduée. C'est un calcul différentiel au sens défini plus haut.

Il est aussi possible de définir sur cette algèbre une opération bord b en posant

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_p a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

On peut alors constater que b est une dérivation graduée de degré -1 de l'algèbre graduée $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ qui vérifie $b^2 = 0$ et $d_U b + b d_U = 0$.

La cohomologie de $(\mathfrak{T}\mathscr{A}, d_U)$ est triviale, c'est-à-dire que l'on a $H^0(\mathfrak{T}\mathscr{A}, d_U) = \mathbb{C}$ et $H^n(\mathfrak{T}\mathscr{A}, d_U) = 0$ pour $n \geq 1$.

En effet, on peut prolonger le complexe $(\mathfrak{T}\mathscr{A}, d_U)$ en posant $\mathfrak{T}^{-1}\mathscr{A} = \mathbb{C}$, et prendre $d_U : \mathbb{C} \to \mathscr{A}$ en posant $d_U \lambda = \lambda\mathbb{1}$. Le carré de d_U est encore nul, comme il est facile de le voir. Soit alors $\omega \in \mathscr{A}^*$ tel que $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Définissons $k_\omega : \mathfrak{T}^n\mathscr{A} \to \mathfrak{T}^{n-1}\mathscr{A}$ par

$$k_\omega(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \omega(a_0) a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

pour $n \geq 0$. Alors nous avons $d_U k_\omega + k_\omega d_U = \mathrm{Id}$. Donc k_ω est une homotopie contractante du complexe, d'où la trivialité de la cohomologie.

Le calcul différentiel universel

Nous pouvons extraire de l'algèbre $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ une sous-algèbre différentielle graduée de la façon suivante.

Posons $\Omega^1_U(\mathscr{A})$ le noyau du produit $\mu : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ de l'algèbre $\mathscr{A}$. Par associativité de μ, $\Omega^1_U(\mathscr{A})$ est un sous-bimodule de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} = \mathfrak{T}^1\mathscr{A}$. La différentielle d_U définie sur $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ envoie $a \in \mathscr{A}$ sur $d_U a = \mathbb{1} \otimes a - a \otimes \mathbb{1} \in \operatorname{Ker}\mu$. Donc nous avons $d_U : \mathscr{A} \to \Omega^1_U(\mathscr{A})$. Ce couple $(\Omega^1_U(\mathscr{A}), d_U)$ a la **propriété universelle** suivante : pour toute dérivation X de $\mathscr{A}$ dans un bimodule $\mathscr{M}$, il existe un unique morphisme de bimodules

$$i_X : \Omega^1_U(\mathscr{A}) \to \mathscr{M}$$

tel que $X = i_X \circ d_U$. Une **dérivation X de $\mathscr{A}$ dans un bimodule $\mathscr{M}$** est une application $X : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ vérifiant $X(ab) = X(a)b + aX(b)$.

En effet, en tant que bimodule, $\Omega^1_U(\mathscr{A})$ est engendré par les $d_U a$ pour $a \in \mathscr{A}$. Il suffit donc de poser $i_X(d_U a) = X(a)$, qui est compatible avec les diverses structures, et se prolonge en un unique morphisme de bimodules.

On pose alors $\Omega^0_U(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ et pour $n \geq 1$,

$$\Omega^n_U(\mathscr{A}) = \underbrace{\Omega^1_U(\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{A}} \cdots \otimes_{\mathscr{A}} \Omega^1_U(\mathscr{A})}_{n \text{ fois}} \subset \mathfrak{T}^n\mathscr{A}$$

$\Omega_U(\mathscr{A}) = \oplus_{n\geq 0}\Omega^n_U(\mathscr{A})$ est alors une sous-algèbre graduée et un sous-bimodule de $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ qui est stable par la différentielle d_U. Tout élément $\omega \in \Omega^n_U(\mathscr{A})$ est une somme finie de termes de la forme

$$a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n$$

pour $a_0, \dots, a_n \in \mathscr{A}$. L'écriture sous cette forme n'est pas unique.

L'algèbre différentielle graduée $(\Omega_U(\mathscr{A}), d_U)$ a la **propriété universelle** suivante. Soit $(\Omega = \oplus_{n\geq 0}\Omega^0, \delta)$ une algèbre différentielle graduée. Pour tout morphisme d'algèbres unitaires $\rho : \mathscr{A} \to \Omega^0$, il existe un unique morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\widetilde{\rho} : (\Omega_U(\mathscr{A}), d_U) \to (\Omega, \delta)$$

qui coïncide avec ρ en degré 0.

Pour montrer cette propriété universelle, on remarque que Ω^1 est un bimodule sur $\mathscr{A}$ pour le produit

$$(a, \omega, b) \mapsto \rho(a)\omega\rho(b)$$

L'application $X : \mathscr{A} \to \Omega^1$ définie par $X(a) = \delta\rho(a)$ est alors une dérivation sur ce bimodule. Donc il existe un morphisme de bimodules $i_X : \Omega^1_U(\mathscr{A}) \to \Omega^1$. On pose $\widetilde{\rho} = i_X$ en degré 1. Alors, puisque $\Omega^2_U(\mathscr{A}) = \Omega^1_U(\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{A}} \Omega^1_U(\mathscr{A})$, on pose $\widetilde{\rho}(\alpha \otimes \beta) = \widetilde{\rho}(\alpha)\widetilde{\rho}(\beta)$. En itérant cette construction, on a construit $\widetilde{\rho}$ ayant les propriétés voulues.

Un corollaire immédiat de cette propriété universelle est que si (Ω, δ) est une algèbre différentielle graduée telle que $\Omega^0 = \mathscr{A}$ et Ω^n soit engendrée par les δa avec $a \in \mathscr{A}$, alors (Ω, δ) est isomorphe (en tant qu'algèbre différentielle graduée) à un quotient de $(\Omega_U(\mathscr{A}), d_U)$.

En effet, prenons $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ l'identité. Alors $\widetilde{\rho}$ est surjectif et donc (Ω, δ) est isomorphe au quotient de $(\Omega_U(\mathscr{A}), d_U)$ par le noyau de $\widetilde{\rho}$.

C'est cette propriété qui fait qu'on appelle $(\Omega_U(\mathscr{A}), d_U)$ le **calcul différentiel universel de $\mathscr{A}$**.

Tout comme $\mathfrak{T}\mathscr{A}$, $(\Omega_U(\mathscr{A}), d_U)$ a une cohomologie triviale.

Donnons un exemple simple de ce calcul différentiel universel. Prenons $\mathscr{A} = C(X)$ l'algèbre commutative des fonctions continues sur un espace topologique X. On peut considérer que le produit tensoriel $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ s'identifie aux fonctions de deux variables $f(x, y)$. Les éléments de $\Omega^1_U(\mathscr{A})$ sont les fonctions de deux variables x et y qui s'annulent sur la diagonale $x = y$. La différentielle d'une fonction $f \in \mathscr{A}$ est la fonction de deux variables $d_U f(x, y) = f(y) - f(x)$. La différentielle est donc ici une différence finie. Dans le cas où $\mathscr{A} = C^\infty(X)$ pour une variété différentiable X, toutes les fonctions sont dérivables, et cette différence finie se développe en $f(y) - f(x) = \partial_\mu f(x)(y^\mu - x^\mu) + \dots$ où les ∂_μ sont les dérivées partielles par rapport à des coordonnées locales x^μ. Par la propriété universelle de $\Omega^1_U(\mathscr{A})$, l'espace des 1-formes différentielles de de Rham s'obtient par quotient de $\Omega^1_U(\mathscr{A})$. Dans ce quotient, la différence finie $f(y) - f(x)$ s'envoie sur $\partial_\mu f(x) dx^\mu$, la différentielle de de Rham de f. Bien sûr, le complexe $(\Omega_U(C^\infty(X)), d_U)$ n'est pas du tout le complexe des formes différentielles puisque la cohomologie du premier est triviale, ce qui n'est pas toujours le cas du second.

Relation entre $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ et les cochaînes de Hochschild

Les deux algèbres différentielles $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ et $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ sont reliées par une application canonique définie de la façon suivante.

Soit $\Psi : \mathfrak{T}\mathscr{A} \to C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ l'application définie par

$$\Psi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 b_1 a_1 \cdots b_n a_n$$

Alors Ψ est un morphisme d'algèbres différentielles graduées.

Le morphisme Ψ induit un morphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\Omega_U(\mathscr{A})$ et $C^*_0(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ (cet morphisme coïncide avec le morphisme universel relevant l'application identité sur $\mathscr{A}$).

On peut montrer que dans le cas où $\mathscr{A} = M(n, \mathbb{C})$, l'algèbre des matrices complexes de dimension n, Ψ réalise un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ et $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$. Grâce à cet isomorphisme, on a les identifications

$$\mathfrak{T}M(n, \mathbb{C}) \simeq M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathscr{T}M(n, \mathbb{C})^*$$
$$\Omega_U(M(n, \mathbb{C})) \simeq M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathscr{T}\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*$$

où dans les seconds membres, on a des produits tensoriels d'algèbres associatives déjà rencontrées.

4.4.2 Calcul différentiel de Kähler

Algèbres commutatives.

Théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

4.4.3 Calcul différentiel basé sur les dérivations

Bibliographie de ce chapitre

Pour les homologies et cohomologies associées aux groupes et algèbres de Lie, je conseille J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierro 1995 [dAI95], qui est un excellent moyen d'aborder le sujet, en particulier pour les applications à la physique. Le livre de K. S. Brown 1982 [Bro82] est plus mathématique.

Pour les homologies et cohomologies associées aux algèbres associatives, on peut consulter N. Jacobson 1985 [Jac85] et M. Gerstenhaber, S. D. Schack 1988 [GS88] pour la cohomologie de Hochschild, J.-L. Loday 1995 [Lod95] et A. Connes 1994 [Con94] qui introduisent l'homologie et la cohomologie cyclique. Le calcul différentiel universel est exposé dans A. Connes 1994 [Con94], et on peut le retrouver dans ma thèse T. Masson 1995 [Mas95] où des références plus précises sont données.

Chapitre 5

Cohomologies et actions de groupes

5.1 Opérations algébriques

La notion d'opération d'une algèbre de Lie sur une algèbre différentielle graduée commutative tire son origine de l'étude des fibrés principaux avec connexions. Le formalisme purement algébrique qui a ainsi été construit a été dégagé par les mathématiciens H. Cartan, C. Chevalley, J.-L. Koszul et A. Weil dans les années 1940-50.

L'idée de base est simple : elle consiste à ne conserver que l'aspect algébrique des objets définis sur un fibré principal. Par exemple, dans un premier temps, nous verrons comment remplacer l'action d'un groupe de Lie connexe G sur un fibré principal P par une opération de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(P)$ des formes différentielles.

5.1.1 Opérations de Cartan

Définitions

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre différentielle graduée commutative unitaire, et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Nous dirons que nous avons une **opération** de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{A}$ (ou encore que $\mathscr{A}$ est une **$\mathfrak{g}$-opération**), s'il existe une application linéaire

$$i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{-1}(\mathscr{A}) = \{\text{dérivations de degré } -1 \text{ de } \mathscr{A}\}$$

dérivations que nous noterons $i_X : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, telle que

$$i_X i_Y + i_Y i_X = 0$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ et telle que l'application

$$L_X = i_X d + d i_X : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

vérifie

$$[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$$
$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Il faut noter que L_X est une dérivation de degré 0 sur $\mathscr{A}$ qui commute avec la différentielle,

$$L_X d = d L_X$$

puisque $d^2 = 0$. Nous noterons $(\mathscr{A}, \mathfrak{g}, i)$ une telle opération.

Dans l'algèbre $\mathscr{A}$, nous avons alors des sous-espaces vectoriels canoniquement associés à cette opération :
- $\mathscr{I}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \;/\; L_X a = 0 \;\; \forall X \in \mathfrak{g}\}$, ensemble des éléments **invariants** de $\mathscr{A}$. Il est facile de vérifier que c'est une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathscr{A}$.
- $\mathscr{B}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \;/\; i_X a = 0 \text{ et } L_X a = 0 \;\; \forall X \in \mathfrak{g}\}$, ensemble des éléments **basiques** de $\mathscr{A}$. Il est là aussi facile de vérifier que c'est une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathscr{A}$, et même plus précisément de $\mathscr{I}(\mathscr{A})$.
- $\mathscr{H}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \;/\; i_X a = 0 \;\; \forall X \in \mathfrak{g}\}$, ensemble des éléments **horizontaux** de $\mathscr{A}$. C'est une sous-algèbre graduée invariante par L_X, mais *a priori* non munie d'une différentielle.

Soit $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées commutatives. Nous dirons que φ est un **morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations** si, étant données deux $\mathfrak{g}$-opérations i et i' sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, nous avons

$$\varphi \circ i_X = i'_X \circ \varphi$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Nous avons alors $\varphi \circ L_X = L'_X \circ \varphi$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi(\mathscr{I}(\mathscr{A})) \subset \mathscr{I}(\mathscr{A}')$, $\varphi(\mathscr{B}(\mathscr{A})) \subset \mathscr{B}(\mathscr{A}')$ et $\varphi(\mathscr{H}(\mathscr{A})) \subset \mathscr{H}(\mathscr{A}')$.

Soient $(\mathscr{A}, \mathfrak{g}, i)$ et $(\mathscr{A}', \mathfrak{g}, i')$ deux $\mathfrak{g}$-opérations. On définit sur l'algèbre différentielle graduée commutative $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}'$ une $\mathfrak{g}$-opération en posant $i^{\otimes}_X(a_p \otimes a') = (i_X a_p) \otimes a' + (-1)^p a_p \otimes (i'_X a')$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $a_p \in \mathscr{A}^p$ et $a' \in \mathscr{A}'$. On a alors $L^{\otimes}_X(a \otimes a') = (L_X a) \otimes a' + a \otimes (L'_X a')$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathscr{A}$ et $a' \in \mathscr{A}'$. On appelle cette opération l'**opération produit tensoriel**.

Cohomologies associées

Nous pouvons associer à une opération $(\mathscr{A}, \mathfrak{g}, i)$ trois cohomologies :
- $H(\mathscr{A}, d)$ la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $(\mathscr{A}, d)$;
- $H_{\mathscr{I}}(\mathscr{A}, d)$ la **cohomologie invariante**, qui est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $(\mathscr{I}(\mathscr{A}), d)$;
- $H_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}, d)$ la **cohomologie basique**, qui est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $(\mathscr{B}(\mathscr{A}), d)$.

Si $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations, alors φ induit des morphismes $\varphi^\sharp$ entre les diverses cohomologies introduites.

5.1.2 Connections et courbures algébriques

La théorie des fibrés principaux utilise de façon essentielle la notion de connexion. Dans ce qui suit, nous en donnons un équivalent algébrique.

Notations

Nous allons manipuler des objets dans $\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g}$ où $(\mathscr{A}, \mathfrak{g}, i)$ est une opération. Nous utiliserons les notations suivantes : $\{E_k\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, $\omega = \omega^k \otimes E_k \in \mathscr{A}^n \otimes \mathfrak{g}$, avec $\omega^k \in \mathscr{A}^n$, et

$$\begin{aligned} i_X \omega &= i_X \omega^k \otimes E_k \\ L_X \omega &= L_X \omega^k \otimes E_k \\ [X, \omega] &= \omega^k \otimes [X, E_k] \\ d\omega &= d\omega^k \otimes E_k \\ [\omega, \omega'] &= \omega^k \omega'^\ell \otimes [E_k, E_\ell] \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $\omega' \in \mathscr{A} \otimes \mathfrak{g}$.

Connexion algébrique

Soit $(\mathscr{A}, \mathfrak{g}, i)$ une opération. Une **connexion algébrique** sur cette opération est un élément $\omega \in \mathscr{A}^1 \otimes \mathfrak{g}$ tel que

1. $i_X \omega = \mathbb{1} \otimes X \in \mathscr{A}^0 \otimes \mathfrak{g}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$;
2. $L_X \omega = -ad_X \omega = -[X, \omega]$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Soit $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ un morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations. Supposons que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ soient munies chacune d'une connexion algébrique ω et ω'. Nous dirons que φ est un **morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions** si

$$\varphi(\omega) = \omega'$$

où $\varphi(\omega) = \varphi(\omega^k) \otimes E_k$.

Courbure algébrique

Nous définissons la **courbure algébrique** de la connexion ω par

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \mathscr{A}^2 \otimes \mathfrak{g}$$

Il est alors facile de vérifier que Ω satisfait à

$$\begin{aligned} i_X \Omega &= 0 \\ L_X \Omega &= -[X, \Omega] \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, et

$$d\Omega + [\omega, \Omega] = 0$$

Cette dernière relation est l'**identité de Bianchi** .

5.1.3 L'algèbre des formes sur un fibré principal

Soit $P(M, G)$ un fibré principal, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie connexe G. Ce groupe agit à droite sur P. Nous notons $(p, g) \mapsto p \cdot g$ cette action pour $p \in P$ et $g \in G$. Cette action permet d'associer à tout vecteur $X \in \mathfrak{g}$ un champ de vecteur vertical X^v sur P par la relation habituelle

$$X \mapsto X^v_{|p} = \left(\frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{|t=0}$$

qui permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\Gamma(P)$ des champs de vecteurs sur P.

Soit $\mathscr{A} = \Omega^*(P)$ l'algèbre différentielle graduée commutative des formes différentielles sur P. Nous définissons une opération de $\mathfrak{g}$ sur $\Omega^*(P)$ en posant

$$i_X = i_{X^v}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Au second membre, i_{X^v} est l'opérateur d'insertion habituel d'un champ de vecteurs sur les formes différentielles. Alors $L_X = i_X d + d i_X$ est la dérivée de Lie habituelle L_{X^v} dans la direction du champ de vecteurs X^v.

Dans ce contexte, $\mathscr{H}(\Omega^*(P))$ est la sous-algèbre des formes horizontales sur P au sens habituel du terme sur un fibré, d'où le nom de l'espace $\mathscr{H}(\mathscr{A})$ dans le cas général. Les formes invariantes $\mathscr{I}(\Omega^*(P))$ sont les formes invariantes par l'action induite de G sur les formes, d'où le nom de l'espace $\mathscr{I}(\mathscr{A})$. Enfin, l'espace des formes basiques $\mathscr{B}(\Omega^*(P))$ s'identifie à l'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur la variété base M, d'où le nom de $\mathscr{B}(\mathscr{A})$. La cohomologie basique de $\Omega^*(P)$ est donc la cohomologie de de Rham de la variété base M.

Une connexion algébrique est une connexion au sens des fibrés, comme il est facile de le constater.

Plus généralement, si G opère à gauche différentiablement sur une variété M, on peut construire une $\mathfrak{g}$-opération sur $\Omega^*(M)$. Pour cela, à tout $X \in \mathfrak{g}$, on associe le **champ de vecteurs fondamental** X_M sur M défini par

$$X^M_{|x} = \left(\frac{d}{dt} \exp(-tX) \cdot x \right)_{|t=0}$$

pour tout $x \in M$. On définit i_X sur $\Omega^*(M)$ par $i_X = i_{X_M}$. La dérivation L_X est alors la dérivée de Lie dans la direction de X_M.

5.1.4 Les opérations de $\mathscr{A}_{\mathsf{Lie}}$ sur $\mathfrak{T}\mathscr{A}$, $\Omega_U(\mathscr{A})$ et $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$

On peut définir la notion d'opération de Cartan sur une algèbre différentielle graduée, même si elle n'est pas graduée commutative. Cependant, on ne peut pas y définir de notion de connexion. Nous donnons ici des exemples de telles opérations.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre associative unitaire. À tout $a \in \mathscr{A}_{\text{Lie}}$ on associe un opérateur $i_a : \mathfrak{T}\mathscr{A} \to \mathfrak{T}\mathscr{A}$ défini par

$$i_a(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_p a a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_p$$

pour $n \geq 1$, et $i_a a_0 = 0$. Alors un calcul simple montre que i_a est une dérivation graduée de degré -1 sur $\mathfrak{T}\mathscr{A}$, et $L_a = i_a d_U + d_U i_a$ est la dérivation graduée de degré 0 sur $\mathfrak{T}\mathscr{A}$ donnée par

$$L_a(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n} a_0 \otimes \cdots \otimes [a, a_p] \otimes \cdots \otimes a_n$$

Ces dérivations graduées définissent une opération de Cartan de $\mathscr{A}_{\mathrm{Lie}}$ sur $\mathfrak{T}\mathscr{A}$.

Cette opération se restreint à l'algèbre différentielle graduée $\Omega_U(\mathscr{A})$, et prend la forme :

$$\begin{aligned} i_a(a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n) &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} a_0 d_U a_1 \dots d_U a_{p-1} [a, a_p] d_U a_{p+1} \dots d_U a_n \\ L_a(a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n) &= [a, a_0] d_U a_1 \dots d_U a_n \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n} a_0 d_U a_1 \dots d_U a_{p-1} d_U [a, a_p] d_U a_{p+1} \dots d_U a_n \end{aligned}$$

Pour tout élément $a \in \mathscr{A}_{\mathrm{Lie}}$, nous définissons l'opérateur

$$i_a : C^m(\mathscr{A}, \mathscr{A}) \to C^{m-1}(\mathscr{A}, \mathscr{A})$$

en posant, pour $f \in C^m(\mathscr{A}, \mathscr{A})$,

$$(i_a f)(a_1, \dots, a_{m-1}) = \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} f(a_1, \dots, a_{p-1}, a, a_p, \dots, a_{m-1})$$

On remarquera que $i_a f$ n'est autre que $f \circ a$ où a est considéré comme élément de $C^0(\mathscr{A}, \mathscr{A})$. Alors i_a est une dérivation graduée de degré -1 sur $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$, et $L_a = i_a \delta + \delta i_a$ est une dérivation graduée de degré 0 sur $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ donnée par

$$(L_a f)(a_1, \dots, a_m) = [a, f(a_1, \dots, a_m)] - \sum_{p=1}^{m} f(a_1, \dots, a_{p-1}, [a, a_p], a_{p+1}, \dots, a_m)$$

i_a et L_a définissent une opération de Cartan de $\mathscr{A}_{\mathrm{Lie}}$ sur $C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$.

Ces opérations sont visiblement caractéristiques de l'aspect non commutatif de $\mathscr{A}$, puisque L_a est nulle dès que $a \in \mathscr{Z}(\mathscr{A})$.

Il est facile de voir que le morphisme $\Psi : \mathfrak{T}\mathscr{A} \to C^*(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ est un morphisme de $\mathscr{A}_{\mathrm{Lie}}$-opérations.

5.1.5 L'opération de $\mathfrak{g}$ sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$

Nous allons décrire maintenant une opération particulière qui nous sera utile par la suite.

Prenons l'algèbre différentielle graduée commutative $\mathscr{A} = \bigwedge \mathfrak{g}^*$, l'algèbre extérieure du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, pour laquelle la différentielle est le prolongement du dual du crochet de Lie, notée $d_{\mathfrak{g}}$.

Pour $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ et $X \in \mathfrak{g}$, posons

$$i_X(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{q=1}^{p} (-1)^{q+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{q-1} \alpha_q(X) \wedge \alpha_{q+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

Si nous regardons $\mathfrak{g}$ comme l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche, et $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ comme l'espace des formes différentielles invariantes à gauche sur un groupe de Lie connexe, alors i_X coïncide avec le produit intérieur habituel du champ de vecteurs X sur une forme.

Sur $\mathfrak{g}^*$, on peut montrer que L_X s'identifie à ad^*_X, le dual de la représentation adjointe. Donc L_X sur tout $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ est la dérivation induite par ad^*_X. Il est facile de vérifier que le tout définit une opération de $\mathfrak{g}$ sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$.

La **forme de Maurer-Cartan** $\theta \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ définie par

$$\theta = \theta^k \otimes E_k$$

où $\{\theta^k\}$ est la base duale dans $\mathfrak{g}^*$ de $\{E_k\}$, est une connexion algébrique. En effet, par définition, nous avons $i_X \theta = X$, et il est facile de montrer que $L_X \theta = -[X, \theta]$ en utilisant l'**équation de structure de Maurer-Cartan** :

$$d_{\mathfrak{g}} \theta + \frac{1}{2} [\theta, \theta] = 0$$

Cette équation de structure nous dit en plus que la courbure de θ est nulle.

Réinterprétation de la courbure algébrique

Il est possible d'interpréter la courbure algébrique en termes d'algèbres différentielles en utilisant l'opération avec connexion $(\bigwedge \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}, i, \theta)$. Pour cela, nous devons considérer une connexion algébrique $\omega = \omega^k \otimes E_k \in \mathscr{A}^1 \otimes \mathfrak{g}$ comme une application

$$\widetilde{\omega} : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}^1$$

en posant, pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^*$,

$$\widetilde{\omega}(\alpha) = \omega^k \alpha(E_k) \in \mathscr{A}^1$$

Comme $\mathscr{A}$ est une algèbre graduée commutative, nous avons $\widetilde{\omega}(\alpha)\widetilde{\omega}(\alpha) = 0$ dans $\mathscr{A}^2$. Par la propriété universelle de l'algèbre extérieure, nous pouvons prolonger $\widetilde{\omega}$ de façon unique en

$$\widetilde{\omega} : \bigwedge \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}$$

en posant, pour $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$,

$$\widetilde{\omega}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \widetilde{\omega}(\alpha_1) \cdots \widetilde{\omega}(\alpha_p)$$

Il est alors possible de vérifier, grâce aux conditions qui font de ω une connexion algébrique, que

$$\begin{aligned} i_X \widetilde{\omega}(\varphi) &= \widetilde{\omega}(i_X \varphi) \\ L_X \widetilde{\omega}(\varphi) &= \widetilde{\omega}(L_X \varphi) \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \bigwedge \mathfrak{g}^*$ et tout $X \in \mathfrak{g}$. Dans les premiers membres, il s'agit de l'opération de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{A}$, et dans les seconds membres, de l'opération de $\mathfrak{g}$ sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ décrite auparavant. $\widetilde{\omega}$ commute donc avec i_X et L_X, mais en général ne commute pas avec les différentielles d sur $\mathscr{A}$ et $d_{\mathfrak{g}}$ sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$.

Nous définissons donc tout naturellement

$$\widetilde{\Omega} : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}^2$$

en posant

$$\widetilde{\Omega}(\alpha) = d\widetilde{\omega}(\alpha) - \widetilde{\omega}(d_{\mathfrak{g}}\alpha)$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Par définition, $\widetilde{\Omega}$ mesure l'obstruction au fait que $\widetilde{\omega}$ soit un morphisme d'algèbres *différentielles.*

Calculons $\widetilde{\Omega}$. Nous avons

$$d_{\mathfrak{g}}\theta^i = -\frac{1}{2}C^i_{k\ell}\theta^k \wedge \theta^\ell$$

où les $C^i_{k\ell}$ sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ dans la base $\{E_k\}$. Donc

$$\widetilde{\omega}(d_{\mathfrak{g}}\theta^i) = -\frac{1}{2}C^i_{k\ell}\omega^k\omega^\ell$$

D'autre part, $d\widetilde{\omega}(\theta^i) = d\omega^i$, donc

$$\widetilde{\Omega}(\theta^i) = d\omega^i + \frac{1}{2}C^i_{k\ell}\omega^k\omega^\ell$$

Comme pour ω, nous pouvons identifier $\widetilde{\Omega}$ à un élément $\widehat{\Omega} \in \mathscr{A}^2 \otimes \mathfrak{g}$, en posant, pour $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^k \otimes E_k$ ($\widehat{\Omega}^k \in \mathscr{A}^2$), et pour $\alpha \in \mathfrak{g}^*$,

$$\widetilde{\Omega}(\alpha) = \widehat{\Omega}^k\alpha(E_k)$$

Alors, avec $\alpha = \alpha_i\theta^i$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}(\alpha) &= \alpha_i d\omega^i + \frac{1}{2}\alpha_i C^i_{k\ell}\omega^k\omega^\ell \\ &= (d\omega^i)\alpha(E_i) + \frac{1}{2}\omega^k\omega^\ell\alpha([E_k, E_\ell])\end{aligned}$$

On tire de cette expression que

$$\widehat{\Omega} = d\omega^i \otimes E_i + \frac{1}{2}\omega^k\omega^\ell \otimes [E_k, E_\ell]$$

c'est à dire que $\widehat{\Omega}$ n'est autre que la courbure algébrique Ω associée à ω.

La courbure algébrique peut donc être réinterprétée comme l'obstruction pour que ω soit un morphisme d'algèbres différentielles.

On remarquera que dans le cas de l'algèbre $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ et de la connexion $\omega = \theta$, l'application

$$\widetilde{\theta} : \bigwedge\mathfrak{g}^* \to \bigwedge\mathfrak{g}^*$$

est l'identité. Comme les deux différentielles sont égales, $\widetilde{\theta}$ est un morphisme d'algèbres différentielles, donc sa courbure est nulle, ce que nous dit déjà l'équation de structure de Maurer-Cartan.

5.2 L'algèbre de Weil

L'algèbre de Weil joue un rôle important dans l'étude des opérations d'algèbres de Lie. Elle renferme de plus une richesse intrinsèque qui permet de prolonger les résultats déjà obtenus sur les homologies et les cohomologies de algèbres de Lie réductives.

5.2.1 Construction de l'algèbre de Weil

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie comme ci-dessus. Nous définissons l'**algèbre de Weil** de $\mathfrak{g}$ comme le produit tensoriel

$$\mathscr{W}(\mathfrak{g}) = \bigvee\mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge\mathfrak{g}^*$$

où nous rappelons que $\bigvee\mathfrak{g}^*$ est une algèbre graduée en degrés pairs. $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ est ainsi une algèbre graduée commutative.

Munissons cette algèbre d'une différentielle. Pour cela, soit $\{E_k\}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $\{\theta^k\}$ sa base duale dans $\mathfrak{g}^*$. Définissons les éléments

$$\begin{aligned}A^i &= \mathbb{1} \otimes \theta^i \in \mathscr{W}^1(\mathfrak{g}) \\ F^i &= \theta^i \otimes \mathbb{1} \in \mathscr{W}^2(\mathfrak{g})\end{aligned}$$

de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$. Alors il est facile de voir que $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre connexe libre graduée commutative[1] engendrée en degré 1 par les A^i et en degré 2 par les F^i. Soient maintenant les éléments A et F de $\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ définis par

$$\begin{aligned}A &= A^i \otimes E_i \\ F &= F^i \otimes E_i\end{aligned}$$

Nous définissons une différentielle $d_{\mathscr{W}}$ sur $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ en posant $d_{\mathscr{W}}A^i$ et $d_{\mathscr{W}}F^i$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}d_{\mathscr{W}}A &= F - \frac{1}{2}[A, A] \\ d_{\mathscr{W}}F &= -[A, F]\end{aligned}$$

où, comme auparavant, pour $w_1 = w_1^i \otimes E_i$ et $w_2 = w_2^i \otimes E_i$ dans $\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$, nous posons $[w_1, w_2] = w_1^i w_2^j \otimes [E_i, E_j]$. En développant sur la base $\{E_k\}$, ces relations conduisent à

$$\begin{aligned}d_{\mathscr{W}}A^i &= F^i - \frac{1}{2}C^i_{k\ell}A^kA^\ell \in \mathscr{W}^2(\mathfrak{g}) \\ d_{\mathscr{W}}F^i &= -C^i_{k\ell}A^kF^\ell \in \mathscr{W}^3(\mathfrak{g})\end{aligned}$$

Alors $d_{\mathscr{W}}$ se prolonge en une unique dérivation de degré $+1$ sur $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, de carré nul, $d^2_{\mathscr{W}} = 0$, puisque $d^2_{\mathscr{W}}A^i = 0$ et $d^2_{\mathscr{W}}F^i = 0$ comme il est facile de le vérifier. Donc $(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}})$ est une algèbre différentielle graduée commutative.

[1] Nous rappelons qu'une algèbre graduée commutative est **libre** si elle n'admet pas d'autres relations entre ses générateurs que celles lui donnant sa commutativité graduée.

Définissons maintenant, pour $X \in \mathfrak{g}$, $X = X^i E_i$, la dérivation i_X de degré -1 sur $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, en posant

$$\begin{aligned} i_X A^i &= X^i \\ i_X F^i &= 0 \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que $(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}, i)$ est une opération, et que $A \in \mathscr{W}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ en est une connexion algébrique de courbure algébrique F.

5.2.2 Propriété universelle

L'algèbre de Weil joue un rôle important dans la théorie des opérations algébriques grâce au résultat suivant :

Propriété universelle de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$: soit $\mathscr{A}$ une $\mathfrak{g}$-opération avec connexion, alors il existe un unique morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ sur $\mathscr{A}$.

En effet, soit $\omega = \omega^i \otimes E_i$ la connexion sur $\mathscr{A}$ et $\Omega = \Omega^i \otimes E_i$ sa courbure algébrique. Tout morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions, φ, doit vérifier $\varphi(A^i) = \omega^i$ et $\varphi(F^i) = \Omega^i$. Or, comme A^i et F^i engendrent librement $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, ces relations définissent φ sur tout $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, de manière unique. Il est facile de voir que ce morphisme est bien un morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions.

Nous dirons que ce morphisme est le **morphisme canonique** de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ sur $\mathscr{A}$ pour la connexion algébrique ω.

Dans le cas de la $\mathfrak{g}$-opération avec connexion $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ décrite précédemment (où la connexion est la forme de Maurer-Cartan), le morphisme canonique $\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \bigwedge \mathfrak{g}^*$ prend la forme d'une projection de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$, où on identifie $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ au sous-espace $\mathbb{1} \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^*$ de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$. En effet, la courbure sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ est nulle, donc $F^i \in \mathscr{W}^2(\mathfrak{g})$ est envoyé sur 0. Cette projection est donc en particulier un morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations.

5.2.3 Calcul des cohomologies associées à $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$

Nous allons calculer les cohomologies de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, $\mathscr{I}\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ (éléments invariants de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$) et $\mathscr{B}\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ (éléments basiques de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$) associées à la $\mathfrak{g}$-opération $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$.

Remarquons qu'un autre système de générateurs (libres également) de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ est donné par l'ensemble des A^i et des $d_{\mathscr{W}} A^i$. Ceci nous permet de définir

$$h : \mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{W}(\mathfrak{g})$$

comme l'unique dérivation de degré -1 qui prolonge sur tout $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} h(A^i) &= 0 \\ h(d_{\mathscr{W}} A^i) &= A^i \end{aligned}$$

Alors nous avons $(d_{\mathscr{W}} h + h d_{\mathscr{W}})A^i = A^i$ et $(d_{\mathscr{W}} h + h d_{\mathscr{W}}) d_{\mathscr{W}} A^i = d_{\mathscr{W}} A^i$. Donc, pour tout $w \in \mathscr{W}(\mathfrak{g})$, $(d_{\mathscr{W}} h + h d_{\mathscr{W}})w$ est proportionnel à w. Le coefficient de proportionnalité est le nombre total de générateurs A^i et $d_{\mathscr{W}} A^i$ apparaissant dans w. h est donc une homotopie contractante. Donc, si $w \in \mathscr{W}^+(\mathfrak{g})$ est un cocycle, alors $(d_{\mathscr{W}} h + h d_{\mathscr{W}})w = d_{\mathscr{W}} h w = \lambda w$ ($\lambda \in \mathbb{N}$), c'est à dire $w = \frac{1}{\lambda} d_{\mathscr{W}} h w$, ce qui signifie que w est un cobord. D'autre part, $\mathscr{W}^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} H^0(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) &= \mathbb{R} \\ H^k(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) &= \{0\} \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

La cohomologie de $(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}})$ est donc triviale.

Remarquons maintenant que $hL_X = L_X h$ puisque cette relation est vraie sur les générateurs A^i et $d_{\mathscr{W}} A^i$. Donc si $w \in \mathscr{I}\mathscr{W}^+(\mathfrak{g})$ est un cocycle, alors $hw \in \mathscr{I}\mathscr{W}^+(\mathfrak{g})$ et $(d_{\mathscr{W}} h + h d_{\mathscr{W}})w = d_{\mathscr{W}} h w = \lambda w$ prouvent que w est un cobord de $(\mathscr{I}\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}})$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} H^0_{\mathscr{I}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) &= \mathbb{R} \\ H^k_{\mathscr{I}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) &= \{0\} \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

La cohomologie de $(\mathscr{I}\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}})$ est donc elle aussi triviale.

Cherchons maintenant la cohomologie basique de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$. Pour cela, identifions d'abord la sous-algèbre $\mathscr{B}\mathscr{W}(\mathfrak{g})$.

$\mathbb{1} \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^* \subset \mathscr{W}(\mathfrak{g})$ n'est pas stable par la différentielle $d_{\mathscr{W}}$. Celle-ci ne coïncide donc pas avec la différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ précédemment introduite sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$. Néanmoins, les dérivations $L_X = d_{\mathscr{W}} i_X + i_X d_{\mathscr{W}}$ coïncident sur $\mathbb{1} \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^*$ avec celles introduites auparavant, c'est à dire celles induites par l'action ad^*_X. De même, nous pouvons vérifier que $\bigvee \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{1}$ est stable par les L_X définis sur $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$, et que les L_X ainsi induites sur $\bigvee \mathfrak{g}^*$ sont les dérivations induites elles aussi par l'action ad^*_X.

En tant qu'espaces vectoriels, nous savons que $\bigvee \mathfrak{g}^* \simeq \mathsf{S}\mathfrak{g}^* \simeq \mathscr{P}(\mathfrak{g})$ où $\mathscr{P}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}$. Il est facile de voir qu'en tant qu'algèbres graduées et commutatives, $\bigvee \mathfrak{g}^* \simeq \mathscr{P}(\mathfrak{g})$, où les degrés se correspondent par $\bigvee^{2k} \mathfrak{g}^* \simeq \mathscr{P}^k(\mathfrak{g})$ (polynômes de degrés k). Un élément $w \in \bigvee^{2k} \mathfrak{g}^*$ s'écrit sous la forme $P(F, \dots, F) = P(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}) F^{i_1} \cdots F^{i_k}$ pour un $P \in \mathscr{P}^k(\mathfrak{g})$. Dans l'identification $\omega \mapsto P$, la dérivée de Lie devient

$$(L_X P)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

pour tous $X_1, \dots, X_k, X \in \mathfrak{g}$.

Notons $\mathscr{I}\bigvee \mathfrak{g}^* \subset \bigvee \mathfrak{g}^*$ la sous-algèbre des éléments invariants par les dérivations L_X. Par l'identification précédente, il est facile de constater que cette sous-algèbre s'identifie à la sous-algèbre graduée et commutative des **polynômes invariants** sur $\mathfrak{g}$, que nous notons $\mathscr{P}_I(\mathfrak{g}) \subset \mathscr{P}(\mathfrak{g})$. Rappelons qu'un polynôme invariant de degré k est un polynôme $P : \mathfrak{g}^k \to \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} P(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) = 0$$

pour tous $X_1, \dots, X_k, X \in \mathfrak{g}$.

Par définition de i_X, il est facile de voir qu'on a l'identification entre les algèbres

$$\mathscr{H}\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \simeq \bigvee \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{1}$$

La sous-algèbre $\mathscr{BW}(\mathfrak{g})$ des éléments basiques de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ s'identifie donc à

$$\mathscr{BW}(\mathfrak{g}) = \mathscr{I}\bigvee\mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{1}$$

Remarquons alors que $\mathscr{BW}^{2k+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pour tout $k \geq 0$ à cause de la graduation de $\bigvee\mathfrak{g}^*$. Donc nous avons

$$d_{\mathscr{W}} : \mathscr{BW}^{2k}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{BW}^{2k+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$$

et

$$d_{\mathscr{W}} : \{0\} = \mathscr{BW}^{2k-1}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{BW}^{2k}(\mathfrak{g})$$

d'où il est immédiat que

$$H_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) = \mathscr{BW}(\mathfrak{g})$$

c'est à dire

$$H^{2k}_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) = \mathscr{BW}^{2k}(\mathfrak{g}) = \mathscr{I}\bigvee^{2k}\mathfrak{g}^* \simeq \mathscr{P}^k_I(\mathfrak{g})$$

et

$$H^{2k+1}_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) = \{0\}$$

La cohomologie basique de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ n'est donc pas triviale, et s'identifie en degrés pairs aux polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$.

5.2.4 Transgressions

Soit $P \in \mathscr{P}^k_I(\mathfrak{g})$ un polynôme invariant de degré $k \geq 1$ sur $\mathfrak{g}$. Par les résultats précédents, on peut l'identifier à un élément invariant de l'algèbre $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ de degré $2k$, qu'on note $\widetilde{P} \in \mathscr{I}(\bigvee^{2k}\mathfrak{g}^*) \subset \mathscr{IW}^{2k}(\mathfrak{g})$. La cohomologie de $\mathscr{IW}(\mathfrak{g})$ étant triviale, il existe un élément $w \in \mathscr{IW}^{2k-1}(\mathfrak{g})$ tel que $d_{\mathscr{W}}w = \widetilde{P}$. Projetons cet élément sur $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ par la projection canonique $\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \bigwedge\mathfrak{g}^*$ (le morphisme canonique de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ sur $\bigwedge\mathfrak{g}^*$ décrit auparavant). On obtient un élément $w_\wedge \in \bigwedge^{2k-1}\mathfrak{g}^*$ qui est nécessairement invariant. Un rapide calcul montre que cet élément de dépend pas de l'arbitraire dans le choix de l'élément w tel que $d_{\mathscr{W}}w = \widetilde{P}$. On a ainsi défini une application

$$\rho : \mathscr{P}^k_I(\mathfrak{g}) \simeq \mathscr{I}(\bigvee^{2k}\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigwedge^{2k-1}\mathfrak{g}^*)$$

pour $k \geq 1$. On peut donner une expression explicite de ρ. Soit P un polynôme invariant de degré k sur $\mathfrak{g}$. Alors pour tous $X_1, \dots, X_{2k-1} \in \mathfrak{g}$, on a

$$\rho(P)(X_1, \dots, X_{2k-1}) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^{k-1}(2k-1)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2k-1}} \operatorname{sign}(\sigma) P(X_{\sigma(1)}, [X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}], \dots, [X_{\sigma(2k-2)}, X_{\sigma(2k-1)}])$$

On dira qu'un élément $\alpha \in \mathscr{I}(\bigwedge^\ell\mathfrak{g}^*)$ est **transgressif** s'il est l'image dans la projection $\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \bigwedge\mathfrak{g}^*$ d'un élément $w \in \mathscr{IW}^\ell(\mathfrak{g})$ dont le cobord $d_{\mathscr{W}}w$ est dans $\bigvee^{\ell+1}\mathfrak{g}^*$, donc dans $\mathscr{I}(\bigvee^{\ell+1}\mathfrak{g}^*)$. Par exemple tout $\rho(P)$ est transgressif.

On peut montrer que tout élément transgressif est de degré impair. En effet, si α est de degré pair, alors $d_{\mathscr{W}}w$ est de degré impair. Or $d_{\mathscr{W}}w \in \bigvee\mathfrak{g}^*$ qui est nulle en degrés impairs. Donc $d_{\mathscr{W}}w = 0$. Cela signifie qu'il existe $v \in \mathscr{IW}(\mathfrak{g})$ tel que $d_{\mathscr{W}}v = w$, d'où $\alpha = w_\wedge = d_{\mathfrak{g}}v_\wedge$. Comme $v_\wedge \in \mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$, on a $d_{\mathfrak{g}}v_\wedge = 0$, d'où $\alpha = 0$.

On note $\mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ des éléments transgressifs. Ce sous-espace est donc engendré en degrés impairs. En fait, on peut voir que $\mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ s'identifie à l'image de ρ. Si $\{\alpha_i\}$ est une base de $\mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$, on lui associe une base d'éléments originaux dans $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$, $\{P_i\}$, et on pose $P_i = \tau(\alpha_i)$. Chaque élément P_i est appelé une cochaîne de transgression de α_i. On obtient ainsi une application $\tau : \mathscr{T}(\bigwedge^{2k-1}\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigvee^{2k}\mathfrak{g}^*)$. Une telle application

$$\tau : \mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$$

pour laquelle $\rho \circ \tau$ est l'identité sur $\mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ est appelée une **transgression**. Il n'y a pas unicité de la transgression. En d'autres termes, τ scinde (en tant qu'espaces vectoriels) la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker}\rho \to \mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*) \simeq \mathscr{P}^k_I(\mathfrak{g}) \to \mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \to 0$$

Dans le cas des algèbres de Lie réductives, on connaît la structure de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$ en fonction du sous-espace $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ des éléments primitifs. On peut montrer que dans ce cas, l'image de l'application ρ est justement $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$. En d'autres termes, dans le cas d'une algèbre de Lie réductive, on a

$$\mathscr{T}(\bigwedge\mathfrak{g}^*) \simeq \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*) \simeq \operatorname{Im}\rho$$

Le noyau de ρ est de plus formé des éléments décomposables de $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$. Cela signifie qu'on peut considérer, dans une certaine mesure, $\operatorname{Im}\rho$ comme une base de polynômes indécomposables. Pour toute transgression $\tau : \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*) \to \mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$, l'image de τ engendre l'algèbre commutative $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$, et les transformés des éléments d'une base homogène de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ sont linéairement indépendant dans $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$. On pose $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathfrak{g}^*)$ l'espace vectoriel gradué en degrés pairs défini par $\widetilde{\mathbb{P}}^k(\mathfrak{g}^*) = \mathbb{P}^{k-1}(\mathfrak{g}^*)$. Alors on a

$$\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*) \simeq \bigvee\widetilde{\mathbb{P}}(\mathfrak{g}^*)$$

C'est un isomorphisme d'algèbres graduées. En conclusion, $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$ a une structure d'algèbre de polynômes dont le nombre de variables est le rang de $\mathfrak{g}$. Ce résultat donne une structure à $\mathscr{I}(\bigvee\mathfrak{g}^*)$ tout à fait analogue à celle du théorème de Hopf donnant la structure de $\mathscr{I}(\bigwedge\mathfrak{g}^*)$.

Dans le cas $k = 2$, on a $\rho(P)(X, Y, Z) = -\frac{1}{2}P([X, Y], Z)$ pour tout polynôme invariant P de degré 2. On retrouve ainsi la formule (4.1) utilisée pour associer à la forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple un élément primitif de degré 3.

5.2.5 Le morphisme de Weil

Soit $\mathscr{A}$ une $\mathfrak{g}$-opération avec connexions. Prenons ω_0 et ω_1 deux connexions algébriques sur $\mathscr{A}$. Nous savons qu'à chacune est associé un morphisme de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions

$$\varphi_0 : (\mathscr{W}(\mathfrak{g}), A) \to (\mathscr{A}, \omega_0)$$
$$\varphi_1 : (\mathscr{W}(\mathfrak{g}), A) \to (\mathscr{A}, \omega_1)$$

En particulier, nous savons que si $w \in \mathscr{BW}(\mathfrak{g})$, alors $\varphi_a(w) \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ pour $a = 1, 2$ et donc φ_a induit un morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\varphi^{\mathscr{B}}_a : \mathscr{BW}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{B}(\mathscr{A})$$

qui induit à son tour un morphisme

$$\varphi_a^{\mathscr{B}\sharp} : H_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) = \mathscr{B}\mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to H_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}, d)$$

entre les cohomologies basiques. Nous allons montrer que

$$\varphi_0^{\mathscr{B}\sharp} = \varphi_1^{\mathscr{B}\sharp}$$

Pour cela, posons $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ pour $t \in [0,1]$. Alors ω_t est une connexion algébrique sur $\mathscr{A}$ dont la courbure sera notée Ω_t et dont le morphisme canonique associé sera noté φ_t. Écrivons un élément $w \in \mathscr{B}\mathscr{W}^{2k}(\mathfrak{g}) = \mathscr{I}\bigvee^{2k}\mathfrak{g}^*$ sous la forme $w = P(F, \dots, F) = P(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})F^{i_1}\cdots F^{i_k}$ où $P \in \mathscr{P}_I^k(\mathfrak{g})$ est un polynôme invariant de degré k sur $\mathfrak{g}$. Alors

$$\varphi_t^{\mathscr{B}}(w) = P(\Omega_t, \dots, \Omega_t)$$

Calculons la dérivée de $\varphi_t^{\mathscr{B}}(w)$ par rapport à t. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_t}{dt} &= d(\omega_1 - \omega_0) + \frac{1}{2}[\omega_1 - \omega_0, \omega_t] + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_1 - \omega_0]\\ &= d(\omega_1 - \omega_0) + [\omega_t, \omega_1 - \omega_0]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_t^{\mathscr{B}}(w) &= \frac{d}{dt}P(\Omega_t, \dots, \Omega_t)\\ &= \sum_{j=1}^k P(\Omega_t, \dots, \frac{d\Omega_t}{dt}, \dots, \Omega_t)\\ &= \sum_{j=1}^k P(\Omega_t, \dots, d(\omega_1 - \omega_0) + [\omega_t, \omega_1 - \omega_0], \dots, \Omega_t)\\ &= kP(d(\omega_1 - \omega_0) + [\omega_t, \omega_1 - \omega_0], \Omega_t, \dots, \Omega_t)\end{aligned}$$

puisque P est symétrique et que les éléments de degré 2 commutent entre eux.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}dP(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t) = P(d(\omega_1 - \omega_0), \Omega_t, \dots, \Omega_t) - P(\omega_1 - \omega_0, d\Omega_t, \dots, \Omega_t)\\ - \cdots - P(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, d\Omega_t)\end{aligned}$$

On peut ajouter à ce second membre la quantité nulle (car P est invariant)

$$\begin{aligned}P([\omega_t, \omega_1 - \omega_0], \Omega_t, \dots, \Omega_t) - P(\omega_1 - \omega_0, [\omega_t, \Omega_t], \dots, \Omega_t)\\ - \cdots - P(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, [\omega_t, \Omega_t]) = 0\end{aligned}$$

En regroupant correctement les termes, en utilisant la multilinéarité de P et l'identité de Bianchi sur Ω_t, on obtient

$$\begin{aligned}dP(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t) &= P(d(\omega_1 - \omega_0) + [\omega_t, \omega_1 - \omega_0], \Omega_t, \dots, \Omega_t)\\ &= \frac{1}{k}\frac{d}{dt}\varphi_t^{\mathscr{B}}(w)\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^{\mathscr{B}}(w) = d(kP(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t))$$

Dans cette expression, on peut vérifier que $P(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ car $\omega_1 - \omega_0$ est horizontale. Donc

$$\varphi_1^{\mathscr{B}}(w) - \varphi_0^{\mathscr{B}}(w) = d\int_0^1 kP(\omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots, \Omega_t)dt$$

ce qui montre que $\varphi_1^{\mathscr{B}}(w)$ et $\varphi_0^{\mathscr{B}}(w)$ ont même image dans $H_{\mathscr{B}}^{2k}(\mathscr{A}, d_{\mathscr{W}})$ puisqu'ils diffèrent par un cobord, c'est à dire que l'on a finalement $\varphi_0^{\mathscr{B}\sharp} = \varphi_1^{\mathscr{B}\sharp}$.

Ainsi, si ω est une connexion algébrique sur $\mathscr{A}$, de morphisme canonique associé $\varphi : \mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$, alors l'application

$$\varphi^{\mathscr{B}\sharp} : H_{\mathscr{B}}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) \to H_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}, d)$$

est indépendante du choix de ω. Comme $H_{\mathscr{B}}^{2k}(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}}) \simeq \mathscr{P}_I^k(\mathfrak{g})$, nous avons un morphisme

$$\chi_{\mathscr{A}} : \mathscr{P}_I(\mathfrak{g}) \to H_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}, d)$$

entre l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$ et la cohomologie basique de $\mathscr{A}$. C'est le **morphisme de Weil** de la $\mathfrak{g}$-opération avec connexion $\mathscr{A}$. Il faut remarquer que ce morphisme est indépendant de la connexion, mais il n'existe que si une telle connexion existe.

5.3 Fibrés et classes caractéristiques

Par définition, les fibrés admettent une action (libre) d'un groupe de Lie. Nous allons voir comment utiliser ce groupe et cette action pour donner des renseignements d'ordre topologique sur le fibré.

5.3.1 Fibré universel classifiant

Soit G un groupe topologique. Il existe un fibré principal de groupe de structure G, $EG \to BG$, qui a la **propriété universelle** suivante : pour tout fibré principal $P \to X$ de groupe de structure G, où X est une variété topologique compacte, il existe une application continue $f_P : X \to BG$ telle que P soit le pull-back[2] du fibré EG par f_P, $P = f_P^* EG$. Le fibré $EG \to BG$ est appelé le **fibré universel classifiant de G**. On peut montrer que EG est un espace contractile. Cela signifie que $\pi_n(EG) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Même si EG est contractile, le fibré $EG \to BG$ est loin d'être trivial, et contient en un certain sens tous les fibrés principaux de groupe de structure G. L'application $f_P : X \to BG$ sélectionne la façon dont le fibré principal P est « tordu ». Le pull-back d'un fibré est en général moins « tordu » que le fibré d'origine. Par exemple, prenons le cas extrême de l'application constante $f : X \to X$, qui envoie X sur un point unique. Par pull-back, elle transforme tout fibré sur X en le fibré trivial !

[2]Le pull-back $P = f^*Q \to X$ d'un fibré $Q \to Y$ par une application continue $f : X \to Y$ est défini fibre à fibre en posant $P_x = Q_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

On peut montrer que deux fibrés principaux $P \to X$ et $P' \to X$ au dessus de la même variété topologique compacte X sont isomorphes si et seulement si les deux applications f_P et $f_{P'}$ sont homotopes.[3] On peut donc classer les fibrés principaux à isomorphisme près au dessus d'une variété topologique compacte X par l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $X \to BG$, qu'on note $[X, BG]$. C'est pourquoi le fibré $EG \to BG$ est appelé « classifiant ».

Dans ce qui vient d'être fait, on peut en réalité considérer des fibrés de groupes de structure quelconque, en particulier les groupes discrets ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, *etc.*). Dans ce cas, les fibrés sont en fait des revêtements.

En topologie algébrique, on ne s'intéresse aux espaces qu'à homotopie près. C'est pourquoi on peut construire de différentes façons le fibré $EG \to BG$, et obtenir des espaces différents, mais homotopes entre eux.

Les espaces EG et BG sont intimement liés au groupe G, et ils dépendent essentiellement de sa structure de groupe. On peut montrer qu'ils existent pour tout groupe G, et on a à notre disposition différentes constructions possibles pour les réaliser sous forme d'espaces topologiques, parfois (et souvent !) en dimension infinie. L'espace topologique BG a bien sûr une homologie et une cohomologie $H_*(BG, \mathbb{Z})$ et $H^*(BG, \mathbb{Z})$. Or, dans le cas des groupes discrets, on peut montrer que cette homologie $H_*(BG, \mathbb{Z})$ est isomorphe à l'homologie de groupe introduite en 4.2.1, et de même sa cohomologie est isomorphe à la cohomologie de groupe. Cette identification est quasiment triviale lorsqu'on utilise une des constructions possibles de BG (celle qui utilise une approche simpliciale, basée sur la structure de groupe de G). On ne développera pas plus dans cette direction, et on renvoie à des livres de topologie algébrique pour de plus amples détails. On peut montrer que dans ce cas $\pi_1(BG) = G$ et les autres groupes d'homotopie sont triviaux. Comme d'autre part EG est homotopiquement trivial, cela signifie que EG est le recouvrement universel de BG.

5.3.2 Construction de fibrés classifiants

Nous allons donner une construction explicite de fibrés universels classifiants, dans le cas des groupes compacts $U(n)$, $O(n)$ et $SO(n)$. Ce sont les cas les plus intéressants, en particulier $SO(n)$, puisque le fibré tangent d'une variété riemannienne orientée admet un tel groupe de structure. On peut montrer que si $K \subseteq G$ est une sous-groupe compact maximal, alors BG et BK sont homotopes. Les cas que nous allons développer recouvrent donc aussi les groupes $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$ et $GL^+(n, \mathbb{R})$.

Plaçons nous dans le cas $G = O(n)$. L'inclusion naturelle $\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ pour $N \leq N'$, induit l'inclusion $G(n, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow G(n, \mathbb{R}^{N'})$ des variétés de Grassmann réelles. On définit $G(n, \mathbb{R}^\infty)$ comme la limite directe de ces inclusions. En d'autres termes, $G(n, \mathbb{R}^\infty)$ est l'espace de tous les sous-espaces vectoriels de dimensions n de $\mathbb{R}^\infty$. On pose

$$BO(n) = G(n, \mathbb{R}^\infty)$$

[3] C'est à dire s'il existe une application continue $F[0,1] \times X \to BG$ telle que $F(0, x) = f_P(x)$ et $F(1, x) = f_{P'}(x)$.

Soit maintenant $E \to X$ un fibré vectoriel réel de rang n au dessus d'une variété topologique compacte X. On sait alors (théorème de Swan) qu'il existe un second fibré vectoriel $E' \to X$ tel que $E \oplus E' \simeq X \times \mathbb{R}^N$ pour N assez grand. Donc chaque fibre E_x de E peut être considérée par cet isomorphisme comme un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbb{R}^N$. Définissons $f : X \to G(n, \mathbb{R}^N)$ en posant $f(x) = E_x \in G(n, \mathbb{R}^N)$. Alors il est facile de voir que $f^*E(n, \mathbb{R}^N) = E$, où $E(n, \mathbb{R}^N)$ est le fibré vectoriel canonique au dessus de $G(n, \mathbb{R}^N)$ (page 33). L'application f peut être composée avec l'inclusion $G(n, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow G(n, \mathbb{R}^\infty)$ pour donner $f_E : X \to G(n, \mathbb{R}^\infty)$.

On sait que tout fibré principal $P \to X$ de groupe de structure $O(n)$ est le fibré des bases orthonormales d'un certain fibré vectoriel $E \to X$. Dans le cas de $E(n, \mathbb{R}^N)$, le fibré des bases orthonormales n'est autre que $V(n, \mathbb{R}^N)$, la variété de Stiefel. Définissons le fibré principal $EO(n)$ comme la limite directe des inclusions de fibrés $V(n, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow V(n, \mathbb{R}^{N'})$. Pour tout fibré principal $P \to X$, en utilisant la méthode précédente pour $E \to X$ tel que P soit le fibré des bases orthonormales de E, on a une application continue $f_P : X \to G(n, \mathbb{R}^\infty)$ telle que $f_P^* EO(n) = P$.

$EO(n) \to BO(n)$ est donc bien un fibré universel classifiant. On remarquera que ces deux espaces sont de dimensions infinies.

Dans le cas $G = U(n)$, on considère les variétés de Grassmann complexes et leurs fibrés vectoriels canoniques. Les limites directes pour l'inclusion $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{N'}$ $(N \leq N')$ définissent $BU(n) = G(n, \mathbb{C}^\infty)$ et $E(n, \mathbb{C}^\infty)$. On pose $EU(n)$ la limite directe des fibrés des bases orthonormales des fibrés vectoriels $E(n, \mathbb{C}^N)$.

Dans le cas $G = SO(n)$, on considère les variétés de Grassmann réelles des sous-espaces vectoriels orientés de $\mathbb{R}^N$, et les bases orthonormées directes de ces sous-espaces vectoriels. On définit ainsi $BSO(n)$ et $ESO(n)$.

Voici d'autres exemples de fibrés universels classifiants. Pour $G = \mathbb{Z}$, on a $EG = \mathbb{R}$ et $BG = \mathbb{S}^1$. On reconnaît en EG le revêtement universel de $\mathbb{S}^1$. Pour $G = \mathbb{Z}^n$, on a $EG = \mathbb{R}^n$ et $BG = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^n$, le tore de dimension n. Pour $G = \mathbb{Z}_2$, on a $EG = \mathbb{S}^\infty$, la sphère dans $\mathbb{R}^\infty$ (qui est bien contractile, contrairement au cas de la dimension finie), et $BG = \mathbb{RP}^\infty$. On sait que les surfaces orientées sont classées par leur genre g. Une telle surface M_g^2 a pour groupe d'homotopie $G = \pi_1(M_g^2)$ le groupe engendré par $2g$ générateurs $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ et la relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e$. Pour $g \geq 2$, le revêtement universel de M_g^2 est le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$, qui est contractile. Dans ce cas, $BG = M_g^2$.

En physique, on s'intéresse aussi à des groupes de Lie de dimensions infinies, comme par exemple le groupe $\mathscr{G}$ des transformations de jauges locales d'un fibré principal $\pi : P \to X$ de groupe de structure G. Dans ce cas, l'espace $\mathcal{A}$ des connexions de Yang-Mills sur P joue souvent le rôle du fibré universel classifiant, avec $\mathcal{A}/\mathscr{G}$ sa base (pour l'action habituelle du groupe de jauges sur les connexions). $\mathcal{A}$ est contractile car c'est un espace affine. Cet exemple n'est cependant pas satisfaisant car l'action de $\mathscr{G}$ sur $\mathcal{A}$ admet des points fixes. $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathscr{G}$ n'est donc pas un fibré principal. Le fibré universel classifiant de $\mathscr{G}$ peut être construit de la façon suivante. Soit $\mathscr{F}_G(P, EG)$ les applications $f : P \to EG$ telles que $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ pour tout $p \in P$ et tout $g \in G$. Soit $\mathscr{F}_G(X, BG)$ les applications $f_X : X \to BG$ telles que $f_X^* EG$ soit isomorphe à P. À tout $f \in \mathscr{F}_G(P, EG)$, on peut associer $f_X \in \mathscr{F}_G(X, BG)$ en posant $f_X(x) = \pi_{EG}(f(p))$ pour n'importe quel $p \in \pi^{-1}(x)$, où $\pi_{EG} : EG \to BG$ est la projection de fibré. Le groupe de jauge $\mathscr{G}$ agit à droite sur $\mathscr{F}_G(P, EG)$ par composition : si $w \in \mathscr{G}$, avec

$w : P \to P$ telle que $w(p \cdot g) = w(p) \cdot g$ pour tous $p \in P$ et $g \in G$, et si $f \in \mathscr{F}_G(P, EG)$, alors $(fw)(p) = (f \circ w)(p)$. On peut alors montrer que l'application $\mathscr{F}_G(P, EG) \to \mathscr{F}_G(X, BG)$ définie ci-dessus fait de $\mathscr{F}_G(P, EG)$ un fibré principal de groupe de structure $\mathscr{G}$ au dessus de $\mathscr{F}_G(X, BG)$. Ce fibré principal est le fibré universel de $\mathscr{G}$. Comme on peut le voir, ce fibré principal n'est pas facile à manipuler concrètement, contrairement au candidat $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathscr{G}$ évoqué auparavant.

5.3.3 Classes caractéristiques

Soit $P \to X$ un fibré principal de groupe de structure G. Nous avons vu que P est classé, à isomorphisme près, par la classe d'homotopie de l'application continue $f_P : X \to BG$. Or, il est difficile, voire impossible, de calculer l'espace de ces classes d'homotopie, et donc d'obtenir une classification complète des fibrés principaux de groupe G au dessus de X.

Cependant, grâce à f_P, on peut associer à P des classes de cohomologie dans X. Pour cela, soit $[c]$ une classe de cohomologie dans $H^*(BG, \mathbb{R})$. Alors $f_P^*[c]$ est une classe de cohomologie dans $H^*(X, \mathbb{R})$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f_P, et donc que de la classe d'isomorphie de P. Cette classe est appelée une **classe caractéristique de P**. Remarquons que si E est un fibré vectoriel de groupe de structure G au dessus de X, on peut définir une classe caractéristique de E comme une classe caractéristique de son fibré principal des bases. On note $c(P)$ ou $c(E)$ cette classe caractéristique. Par la suite, on confondra parfois la classe de cohomologie elle-même avec un de ses représentants.

Pour obtenir toutes les classes caractéristiques de P, il faut connaître la cohomologie $H^*(BG, \mathbb{R})$. Or, cette cohomologie a été calculée dans le cas des groupes les plus courants. Voici les résultats, où nous notons $\mathbb{R}[a_1, \dots, a_p]$ l'algèbre graduée commutative engendré par les p éléments $a_1, \dots, a_p$:

$$H^*(BU(n), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1, c_2, \dots, c_n]$$

où le degré de c_k est $2k$. La classe de c_k est la **k-ième classe de Chern**. La classe $c = 1 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$ est la **classe totale de Chern**. Elle vérifie $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$ pour tous fibrés vectoriels E, E'.

$$H^*(BSU(n), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_2, \dots, c_n]$$

où, comme ci-dessus, le degré de c_k est $2k$.

$$H^*(BO(n), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[p_1, p_2, \dots, p_{[n/2]}]$$

où le degré de p_k est $4k$ et où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$. La classe de p_k est la **k-ième classe de Pontrjagin**. La classe $p = 1 + p_1 + p_2 + \dots + p_{[n/2]}$ est la **classe totale de Pontrjagin**. Elle vérifie $p(E \oplus E') = p(E)p(E')$ pour tous fibrés vectoriels E, E'.

$$H^*(BSO(2m+1), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[p_1, p_2, \dots, p_m]$$

où, comme ci-dessus, le degré de p_k est $4k$.

$$H^*(BSO(2m), \mathbb{R}) = \mathbb{R}[p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, e]$$

où, comme ci-dessus, le degré de p_k est $4k$ et où le degré de e est $2m$. La classe de e est la **classe d'Euler**, elle vérifie $e(E \oplus E') = e(E)e(E')$ pour tous fibrés vectoriels E, E'.

Par complexification, on a un morphisme $O(n) \to U(n)$ qui induit une application $BO(n) \to BU(n)$. En cohomologie, cette application envoie c_{2k+1} sur 0 et c_{2k} sur $(-1)^k p_k$. On peut en fait définir la k-ième classe de Pontrjagin d'un fibré vectoriel réel en utilisant cette relation et en complexifiant le fibré : $p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E \otimes \mathbb{C})$. L'inclusion $U(n) \hookrightarrow SO(2n)$ induit une application $BU(n) \to BSO(2n)$ qui induit à son tour une application en cohomologies qui envoie e sur c_n.

Toutes les classes données ici sont entières dans $H^*(BG, \mathbb{R})$.

La construction des classes caractéristique qui vient d'être donnée fonctionne pour la cohomologie à valeurs dans n'importe quel groupe abélien. Il existe donc d'autres familles de classes caractéristiques que celles présentées ci-dessus. C'est par exemple le cas si on prend le groupe abélien $\mathbb{Z}_2$ pour les fibrés classifiants $EO(n) \to BO(n)$ et $ESO(n) \to BSO(n)$. Dans ce cas, il est possible de montrer que

$$H^*(BO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$$

où le degré de w_k est k. La classe de w_k est la **k-ième classe de Stiefel-Whitney**. La classe $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ est la **classe totale de Stiefel-Whitney**. Elle vérifie $w(E \oplus E') = w(E)w(E')$ pour tous fibrés vectoriels E, E'.

$$H^*(BSO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_n]$$

où comme ci-dessus le degré de w_k est k.

Certaines de ces classes caractéristiques renseignent sur le fait qu'une variété est orientable ou non (en prenant ces classes pour le fibré vectoriel tangent).

Grâce à la cohomologie de Čech, nous avons vu (page 70) comment associer à un fibré en droites complexes au dessus d'une variété M une classe entière dans $H^2(M, \mathbb{R})$. Cette classe n'est autre que la 1re classe de Chern. Dans ce cas, comme le groupe de structure est $U(1)$, il n'y a que cette classe. Nous voyons donc qu'elle suffit pour classer tous les fibrés en droites complexes.

On peut montrer de façon plus générale que si G est un groupe de Lie compact connexe, on a

$$H^*(BG, \mathbb{R}) = \mathscr{P}_I(\mathfrak{g})$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G et où nous rappelons que $\mathscr{P}_I(\mathfrak{g})$ est l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$ dont nous avons décrit la structure (page 103). Regardons cet isomorphisme dans les cas présentés ci-dessus.

Pour $X \in \mathfrak{u}(n)$, considérons l'expression

$$\det(\lambda \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} X) = \lambda^n + f_1(X)\lambda^{n-1} + f_2(X)\lambda^{n-2} + \dots + f_n(X)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Grâce à l'invariance du déterminant sous l'action adjointe de $U(n)$, on peut constater que les fonctions f_k sont des polynômes invariants sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$, f_k étant de degré k. On peut alors montrer que les $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendants et engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{u}(n)$. On peut identifier cette algèbre de polynômes à l'algèbre $H^*(BU(n), \mathbb{R})$ en identifiant f_k à c_k. Dans cette identification, un polynôme de degré k devient une classe de cohomologie de degré $2k$.

De même, pour $X \in \mathfrak{o}(n)$, avec $n = 2m$ ou $n = 2m+1$, posons

$$\det(\lambda \mathbb{1} - \frac{1}{2\pi} X) = \lambda^n + g_1(X)\lambda^{n-2} + g_2(X)\lambda^{n-4} + \cdots + g_m(X)\lambda^{n-2m}$$

Dans cette expression, les coefficients des puissances de λ dont la parité est différente de celle de n sont nuls. Ceci est dû au fait que la transposée de $\lambda\mathbb{1} - \frac{1}{2\pi}X$ est $\lambda\mathbb{1} + \frac{1}{2\pi}X$, et que les déterminants de ces deux expressions doivent être égaux. Les polynômes invariants g_k (où g_k est de degré $2k$) sur $\mathfrak{o}(n)$ sont linéairement indépendants et engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{o}(n)$. En identifiant g_k à p_k, on identifie cette algèbre à $H^*(BO(n), \mathbb{R})$.

Pour $SO(n)$, la situation est légèrement plus compliquée. Si $n = 2m+1$, alors les g_k définis ci-dessus engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{so}(2m+1)$. Par contre, si $n = 2m$, il existe un polynôme invariant h de degré m, unique au signe près, tel que $h^2 = g_m$. Alors $g_1, \ldots, g_{m-1}, h$ sont linéairement indépendants et engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{so}(2m)$. On peut donner une expression explicite de h. Soit $X \in \mathfrak{so}(2m)$. Alors X est une matrice $2m \times 2m$ antisymétrique. On pose

$$h(X) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{i_1,\ldots,i_{2m}} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2m-1} i_{2m}} X_{i_1 i_2} \ldots X_{i_{2m-1} i_{2m}}$$

où $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2m-1} i_{2m}}$ est complètement antisymétrique en les indices i_k et $\epsilon_{12\ldots 2m} = 1$. L'expression $(2\pi)^m h(X)$ est appelée le **Pfaffian de X**. Le polynôme g_m est proportionnel au déterminant : $g_m(X) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \det(X)$. Le Pfaffian est donc une racine carrée du déterminant. En identifiant g_k à p_k et h à e, on identifie l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{so}(2m)$ à $H^*(BSO(2m), \mathbb{R})$.

Finalement, il faut retenir de tous ces développements qu'il n'existe en gros que deux cohomologies possibles pour un groupe de Lie compact : celle en tant que variété, qui peut aussi être calculée à l'aide de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et celle de son espace classifiant universel BG, qui utilise plus la structure de groupe (il faut se souvenir que cette cohomologie est reliée à la cohomologie de groupe dans le cas des groupes discrets). Les quelques résultats sur les cohomologies de BG nous montrent que ces deux cohomologies sont intimement reliées, puisque leur structure repose sur le même espace des éléments primitifs $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$.

5.3.4 Connexions et classes caractéristiques

Nous venons de voir que la cohomologie de $H^*(BG, \mathbb{R})$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes invariants sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G lorsque G est compact et connexe. Ceci nous donne un moyen très simple de construire des représentants dans $\Omega^*(M)$ des classes caractéristiques d'un fibré principal (différentiable) $P \to M$.

Soit ω une connexion sur P, de courbure Ω. Grâce à un système de trivialisations locales de P, on peut associer à Ω une collection de 2-formes locales sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Deux telles formes locales de courbure F et F', définies sur deux ouverts U et U' de M, tels que $U \cap U' \neq \varnothing$ se raccordent suivant la relation

$$F' = g_{UU'}^{-1} F g_{UU'}$$

où $g_{UU'} : U \cap U' \to G$ est la fonction de transition entre les deux trivialisations de P au dessus de U et U'.

Soit p un polynôme invariant sur $\mathfrak{g}$, de degré k. Alors $p(F, \ldots, F)$ est une $2k$-forme sur U. Comme p est invariant par l'action adjointe de G, on a $p(F', \ldots, F') = p(F, \ldots, F)$ au dessus de $U \cap U'$. On peut donc recoller les expressions $p(F, \ldots, F)$ en une $2k$-forme globale $p(\Omega)$ sur M. On peut montrer, en utilisant l'invariance de p et l'identité de Bianchi sur F, que $p(\Omega)$ est fermée, et définit donc un élément de $H^{2k}(M, \mathbb{R})$. Cet élément est une classe caractéristique de P, qui correspond à la classe donnée par p dans l'identification de $H^*(BG, \mathbb{R})$ avec les polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$.

Dans la définition des polynômes invariants f_k, g_k et h, les facteurs contenant 2π ont été introduits de telle façon que les classes caractéristiques ainsi construites soient entières.

5.3.5 Classes caractéristiques et algèbre de Weil

Nous avons montré que la cohomologie basique de l'algèbre de Weil $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ s'identifiait à l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}$. Dans le cas où le groupe de Lie G est compact et connexe, ceci nous permet de considérer l'algèbre de Weil comme un **modèle algébrique** des espaces topologiques EG et BG. En effet, d'un point de vue purement cohomologique,

$$H^*(\mathscr{W}(\mathfrak{g})) = H^*(EG, \mathbb{R}) \text{ sont triviales}$$

(car EG est contractile), et

$$H^*(\mathscr{B}\mathscr{W}(\mathfrak{g})) = H^*(BG, \mathbb{R}) = \mathscr{P}_I(\mathfrak{g})$$

Pour un fibré principal $P \to M$ de groupe de structure G, et pour une connexion ω sur P fixée, le morphisme canonique de $\mathfrak{g}$-opérations avec connexions

$$(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), A) \to (\Omega^*(P), \omega)$$

venant de la propriété universelle de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ remplace l'application $f_P : M \to BG$ qui identifie P à $f_P^* EG$.

Au niveau des cohomologies basiques, le morphisme de Weil associe à tout polynôme invariant sur $\mathfrak{g}$ une classe de cohomologie dans $H^*(M, \mathbb{R})$, puisqu'ici la base de $\Omega^*(P)$ est $\Omega^*(M)$. Ces classes de cohomologie sont bien sûr les classes caractéristiques de P. Ceci est immédiat compte-tenu de la construction présentée auparavant de ces classes à partir de polynômes invariants et d'une connexion sur P.

5.3.6 La classe d'Euler

La classe d'Euler d'un fibré principal de groupe de structure $SO(2m)$ est une classe très riche du point de vue mathématique. On a vu qu'elle était définie grâce au Pfaffian d'une matrice antisymétrique. Nous allons décrire d'autres façons de la calculer sur un fibré vectoriel réel orienté E de rang $2m$ au dessus d'une variété compacte orientée M.

On peut montrer que la classe d'Euler est le pull-back de la classe de Thom sur E par la section nulle $s_0 : M \to E : e(E) = s^*[\phi(E)]$. En particulier, si le rang de E est strictement supérieur à la dimension de M, la classe d'Euler est nulle.

Une section $s : M \to E$ est dite **transverse** si son image $S = s(M) \subset E$ intersecte l'image de la section nulle $S_0 = s_0(M)$ de façon transverse, c'est à dire que les deux plans tangents $T_x S$ et $T_x S_0$, pour tout $x \in S \cap S_0$, vérifient

$$T_x S + T_x S_0 = T_x E$$

On remarquera que cette somme n'est pas nécessairement directe.

Soit alors M_0 le sous-espace de M des zéros d'une section transverse $s : M \to E$. Alors on peut montrer que la classe d'Euler de E est la classe duale de Poincaré de M_0.

La classe d'Euler d'une variété différentiable compacte orientée M de dimension paire $2m$ est par définition la classe d'Euler de son fibré tangent. On la note $e(M) = e(TM)$. C'est une $2m$-forme. On peut donc l'intégrer sur M. On peut montrer que le résultat obtenu est la **caractéristique d'Euler-Poincaré** de M :

$$\chi(M) = \int_M e(M)$$

D'après ce que nous venons de voir, on peut relier la classe d'Euler de M aux zéros d'une section $X : M \to TM$, qui ici est un champ de vecteurs. Nous allons voir que $\chi(M)$ est elle aussi directement reliée aux zéros de X. Pour cela, nous devons définir l'indice de X en un de ses zéros.

On suppose que X n'a que des zéros isolés. Soit p un tel zéro. Autour de p, on introduit un système de coordonnées $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^{2m}$, avec $p \in U$ et $\phi(p) = 0 \in V$. En utilisant ce système de coordonnées, on identifie X à un champ de vecteurs sur l'ouvert V. On suppose U choisi assez petit pour que X ne s'annule qu'en $0 \in V$. Posons alors

$$n(x) = \frac{1}{\|X(x)\|} X(x)$$

pour tout $x \in V \setminus \{0\}$. $n(x)$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{2m}$, donc un élément de la sphère $\mathbb{S}^{2m-1}$. En restreignant n à une sphère $\mathbb{S}_u^{2m-1} = \{x \in V \ / \ \|x\| = u\}$ pour u assez petit, on obtient une application différentiable entre sphères

$$n : \mathbb{S}_u^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$$

On appelle **indice de X en p** le degré de cette application n. On le note $\nu(X, p)$. On peut montrer que cet entier est indépendant des choix arbitraires faits dans cette construction. On peut alors montrer que si X n'a que des zéros isolés,

$$\chi(M) = \sum_{p \text{ zéro de } X} \nu(X, p)$$

C'est le **théorème de Poincaré-Hopf**.

Enfin, mentionnons qu'en munissant M d'une métrique riemannienne, la caractéristique d'Euler Poincaré de M est l'indice de l'opérateur elliptique $d+\delta : \Omega^{2*}(M) \to \Omega^{2*+1}(M)$, c'est à dire

$$\chi(M) = \dim \operatorname{Ker}(d+\delta) - \dim \operatorname{Coker}(d+\delta)$$

5.4 Cohomologie équivariante

5.4.1 L'approche topologique

Soit G un groupe de Lie compact qui agit à gauche sur une variété différentiable M. On suppose que l'action est différentiable, et on la note $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Alors on sait que

les orbites de G partitionnent M par des sous-espaces disjoints. Pour tout $x \in M$, posons $\alpha : G \to G \cdot x$, $\alpha(g) = g \cdot x$. C'est une application continue. Si le sous-groupe d'isotropie de x est trivial, alors α est une bijection, et comme G est compact, α réalise un difféomorphisme entre G et $G \cdot x$. Si tous les sous-groupes d'isotropie sont triviaux, c'est à dire si l'action de G est **libre**, alors toutes les orbites sont difféomorphes à G, et M devient un fibré principal de groupe de structure G et de base $B = M/G$, l'espace des orbites, qui est une variété différentiable dans ce cas. On peut donc étudier la topologie de l'espace des orbites par les méthodes homotopiques, homologiques et cohomologiques habituelles. Par exemple, dans ce cas, on a une suite exacte longue en homotopie

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(G) \longrightarrow \pi_n(M) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \dots$$

Cette suite permet de relier la topologie de la base B aux topologies de l'espace total M et du groupe G.

Dans ce cas de l'action libre, la **cohomologie équivariante de M pour l'action de G** est définie comme la cohomologie de $B = M/G$.

Si l'action de G sur M n'est pas libre, alors M/G n'est pas une variété, et on ne peut pas calculer sa cohomologie en utilisant le complexe de de Rham par exemple. Comme on ne s'intéresse aux espaces qu'à homotopie près, on peut très bien remplacer M par $M \times EG$ où $EG \to BG$ est le fibré universel classifiant de G. Puisque EG est contractile, M est homotope à $M \times EG$. Maintenant, G agit librement sur $M \times EG$ pour l'action $(x, e) \mapsto (g \cdot x, e \cdot g^{-1})$ où $g \in G$, $x \in M$ et $e \in EG$ (sur EG, G agit à droite). Alors l'espace des orbites $(M \times EG)/G$ est une variété, dont on peut calculer la cohomologie par diverses méthodes. La cohomologie de $(M \times EG)/G$ est par définition la **cohomologie équivariante de M pour l'action de G**. On la note $H^*_{G,\mathrm{top}}(M)$.

On remarquera que l'espace $(M \times EG)/G$ est par construction un fibré au dessus de BG, de fibre M.

La cohomologie équivariante est loin d'être triviale, comme le montre l'exemple de $M = \{*\}$. Dans ce cas, l'action de G n'est pas libre (puisque le stabilisateur de $*$ est G lui-même !), et $(M \times EG)/G = BG$, dont la cohomologie est loin d'être triviale.

On peut montrer que si G agit librement sur M, alors les deux variétés M/G et $(M \times EG)/G$ sont homotopes. Les deux définitions de la cohomologie équivariante coïncident donc dans ce cas.

5.4.2 Le modèle de Weil

Nous avons déjà vu que les espaces EG et BG sont bien souvent de dimensions infinies. Ceci rend les calculs de cohomologie très difficiles à mener. Il se trouve que pour calculer la cohomologie de $(M \times EG)/G$, on peut utiliser un modèle algébrique, en remplaçant, comme nous l'avons déjà fait dans le cadre des classes caractéristiques, l'espace EG par l'algèbre de Weil $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Nous cherchons donc à construire un complexe différentiel utilisable en pratique dont la cohomologie est celle de $(M \times EG)/G$.

Pour cela, considérons l'algèbre différentielle $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_t)$ où $d_t = d_{\mathscr{W}} + d$ est la différentielle du produit tensoriel de ces deux algèbres différentielles. Nous savons que sa cohomologie est le produit tensoriel des cohomologies de $(\Omega^*(M), d)$ et $(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_{\mathscr{W}})$. Cette dernière étant triviale, il reste

$$H^*(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g})) = H^*(\Omega^*(M), d) = H^*(M, \mathbb{R})$$

Comme G agit sur M, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ opère sur $\Omega^*(M)$. Considérons alors l'opération produit tensoriel de $(\Omega^*(M), \mathfrak{g}, i)$ et $(\mathscr{W}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}, i^{\mathscr{W}})$ que nous notons $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}, i^t)$. Nous notons aussi $L^t_X = i^t_X d_t + d_t i^t_X = L_X + L^{\mathscr{W}}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Introduisons alors l'algèbre basique pour cette opération, $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}))_{\text{Basique}}$, et posons

$$H^*_{G,\text{alg}}(M) = H^*\left((\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}))_{\text{Basique}}\right)$$

la cohomologie de cette algèbre. C'est la **cohomologie équivariante de M dans le modèle de Weil**.

Si le groupe compact G est connexe, on peut montrer que

$$H^*_{G,\text{alg}}(M) = H^*_{G,\text{top}}(M)$$

5.4.3 Le modèle de Cartan

Il existe un autre modèle algébrique pour calculer la cohomologie équivariante de M. Soit comme d'habitude $\{E_k\}$ une base de $\mathfrak{g}$, et A^k les éléments générateurs de degrés 1 de $\mathscr{W}(\mathfrak{g})$. Alors l'opération $i_A = A^k i_{E_k} : \Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g})$ est de degré total 0. Son exponentielle

$$e^{i_A} = e^{A^k i_{E_k}} : \Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}) \to \Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g})$$

qui est aussi de degré total 0, est un morphisme d'algèbres graduées commutatives inversible (son inverse est e^{-i_A}), introduit par Kalkman. Ce morphisme transforme l'opération $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_t, \mathfrak{g}, i^t)$ en une nouvelle opération $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_K, \mathfrak{g}, i^K)$ avec

$$\begin{aligned} d_K &= e^{i_A} d_t e^{-i_A} \\ i^K &= e^{i_A} i^t e^{-i_A} \\ L^K &= e^{i_A} L^t e^{-i_A} \end{aligned}$$

Un calcul montre alors que

$$\begin{aligned} d_K &= d_{\mathscr{W}} + d + A^k L_{E_k} - F^k i_{E_k} = d_t + L_A - i_F \\ i^K &= i^{\mathscr{W}} \\ L^K &= L^t = L^{\mathscr{W}} + L \end{aligned}$$

Comme les deux opérations sont isomorphes, leurs cohomologies associées sont isomorphes aussi. Considérons l'algèbre basique de $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{W}(\mathfrak{g}), d_K, \mathfrak{g}, i^K)$. Il est facile de voir que l'algèbre des éléments horizontaux est $\Omega^*(M) \otimes \bigvee \mathfrak{g}^*$. L'algèbre basique est donc $(\Omega^*(M) \otimes \bigvee \mathfrak{g}^*)_{\text{Inv}}$. Sur cette algèbre, la différentielle d_K se réduit à $d_C = d - i_F$. L'algèbre différentielle graduée $((\Omega^*(M) \otimes \bigvee \mathfrak{g}^*)_{\text{Inv}}, d_C)$ est le **modèle de Cartan** de la cohomologie équivariante. Sa cohomologie est par construction $H^*_{G,\text{alg}}(M)$.

Dans ce modèle, une forme équivariante est un polynôme sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\Omega^*(M)$, équivariant pour les actions de G sur $\mathfrak{g}$ et M.

Bibliographie de ce chapitre

Les notions d'opérations de Cartan et d'algèbre de Weil sont exposées dans H. Cartan 1951 [Car51], mais on lui préférera peut-être l'exposition plus récente de M. Dubois-Violette 1986 [DV86]. On peut aussi les retrouver dans S. Cordes, G. Moore, S. Ramgoolam 1994 [CMR94]. La réinterprétation de la courbure d'une connexion algébrique en terme de morphisme d'opérations avec connexions nous a été expliquée par M. Dubois-Violette. Les classes caractéristiques peuvent être introduites de différentes façons. On peut consulter le tome 2 de B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko 1982 [DNF82], D. Husemoller 1994 [Hus94], l'annexe B de H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn 1989 [LM89], le livre plus difficile de J. Milnor, J. Stasheff 1974 [MS74], et quelques paragraphes de J.-L. Loday 1995 [Lod95]. Des utilisations et développements plus « physiques » sur ces classes caractéristiques sont donnés dans B. Booss, D. D. Bleecker 1985 [BB85], N. Berline, E. Getzler, M. Vergne 1992 [BGV92] et H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn 1989 [LM89]. La cohomologie équivariante est abordée de façon mathématique dans N. Berline, E. Getzler, M. Vergne 1992 [BGV92] et un peu plus physique dans S. Cordes, G. Moore, S. Ramgoolam 1994 [CMR94].

Annexe A

Résultats d'homologies et de cohomologies

Cette annexe est un catalogue de résultats courants d'homologie et de cohomologies. Il ne comporte aucune démonstration. Nous renvoyons aux références citées pour des compléments.

A.1 Espaces topologiques

Les homologies et cohomologies présentées ici sont les (co)homologies simpliciales ou les cohomologies de de Rham.

Groupes de cohomologie de plus haut degré

M^n variété compacte connexe de dimension n, G groupe abélien :

$$H^n(M^n, G) = \begin{cases} G & \text{si } M^n \text{ est orientable} \\ G/2G & \text{si } M^n \text{ est non orientable} \end{cases}$$

M^n variété connexe de dimension n :

$$H^n_{\mathrm{c}}(M^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M^n \text{ est orientable} \\ 0 & \text{si } M^n \text{ est non orientable} \end{cases}$$

M^n variété connexe de dimension n non compacte :

$$H^n(M^n, \mathbb{R}) = 0$$

Espaces euclidiens, disques, points

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &H_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, & &H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = 0 \text{ pour } k \geq 1 \\ &H^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, & &H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = 0 \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

Mêmes résultats pour le disque D^n et le point.

Sphères

Pour $n \geq 1$ et tout groupe abélien G :

$$H_0(\mathbb{S}^n, G) = H_n(\mathbb{S}^n, G) = G, \quad H_k(\mathbb{S}^n, G) = 0 \text{ pour } k \neq 0, n$$

Identifications : $SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$, $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$.

Tores

Pour $n \geq 1$:

$$H^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) = \bigwedge(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ où } \deg(\alpha_i) = 1$$

Espaces projectifs réels

Pour $n \geq 1$ pair :

$$H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pour } k \text{ impair, } 0 < k < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$ impair :

$$H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0, n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pour } k \text{ impair, } 0 < k < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Globalement :

$$H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \text{ où } \deg(\alpha) = 1$$

Identifications : $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$.

Espaces projectifs complexes

Pour $n \geq 1$:

$$H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \text{ où } \deg(\alpha) = 2$$

Espaces lenticulaires

Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$:

$$H^0(\mathbb{L}_p^{2n+1}, \mathbb{R}) = H^{2n+1}(\mathbb{L}_p^{2n+1}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad H^k(\mathbb{L}_p^{2n+1}, \mathbb{R}) = 0 \text{ pour } k \neq 0, 2n+1$$

Identifications : $\mathbb{L}_2^{2n+1} \simeq \mathbb{R}P^{2n+1}$.

Surfaces orientables

M_g^2 est la surface orientable de genre g :

$$H_0(M_g^2, \mathbb{Z}) = H_2(M_g^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(M_g^2, \mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g}$$

Surfaces non orientables

M^2_μ est la surface non orientable de genre g :

$$H_0(M^2_\mu,\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\quad H_1(M^2_\mu,\mathbb{Z})=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{\mu-1}\oplus\mathbb{Z}_2,\quad H_2(M^2_\mu,\mathbb{Z})=0$$

Variétés de Stiefel

Pour $n\geq 1$ et $0\leq k\leq n$:

$$H^*(V(n-k,\mathbb{C}^n),\mathbb{R})=\bigwedge(\alpha_{2k+1},\alpha_{2k+3},\dots,\alpha_{2n-1})\text{ où }\deg(\alpha_i)=i$$

Identifications : $U(n)\simeq V(n,\mathbb{C}^n)$.

Groupes et algèbres de Lie usuels

Pour $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}
H^*(U(n),\mathbb{R})&=\bigwedge(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\text{ où }\deg(\alpha_k)=2k-1\\
H^*(SU(n),\mathbb{R})&=\bigwedge(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)\text{ où }\deg(\alpha_k)=2k-1\\
H^*(SO(2n+1),\mathbb{R})&=\bigwedge(\alpha_2,\alpha_4,\dots,\alpha_{2n})\text{ où }\deg(\alpha_k)=2k-1\\
H^*(SO(2n),\mathbb{R})&=\bigwedge(\alpha_2,\alpha_4,\dots,\alpha_{2n-2},\alpha_n)\text{ où }\deg(\alpha_k)=2k-1\\
H^*(Sp(2n),\mathbb{R})&=\bigwedge(\alpha_2,\alpha_4,\dots,\alpha_{2n})\text{ où }\deg(\alpha_k)=2k-1
\end{aligned}$$

Identifications : ce sont aussi les cohomologies des algèbres de Lie correspondantes.

Bases des fibrés universels classifiants

Pour $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}
H^*(BU(n),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[c_1,c_2,\dots,c_n]\text{ où }\deg(c_k)=2k\\
H^*(BSU(n),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[c_2,\dots,c_n]\text{ où }\deg(c_k)=2k\\
H^*(BO(n),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[p_1,p_2,\dots,p_{[n/2]}]\text{ où }\deg(p_k)=4k\ ([n/2]=\text{partie entière de }n/2)\\
H^*(BSO(2n+1),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[p_1,p_2,\dots,p_n]\text{ où }\deg(p_k)=4k\\
H^*(BSO(2n),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[p_1,p_2,\dots,p_{n-1},e]\text{ où }\deg(p_k)=4k\text{ et }\deg(e)=2n\\
H^*(BSp(n),\mathbb{R})&=\mathbb{R}[c_1,\dots,c_n]\text{ où }\deg(c_k)=4k\\
H^*(BO(n),\mathbb{Z}_2)&=\mathbb{Z}_2[w_1,\dots,w_n]\text{ où }\deg(w_k)=k\\
H^*(BSO(n),\mathbb{Z}_2)&=\mathbb{Z}_2[w_2,\dots,w_n]\text{ où }\deg(w_k)=k
\end{aligned}$$

Identifications : ce sont aussi les cohomologies basiques des algèbres de Weil correspondantes.

A.2 Groupes

Les (co)homologies présentées ici sont les (co)homologies de groupe.

Groupe discret quelconque

Groupes des entiers

Groupes des entiers modulo n

A.3 Algèbres associatives

Algèbre tensorielle

Algèbre de polynômes

Bibliographie

[BB85] B. Booss et D. D. Bleecker. *Topology and Analysis, The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics.* Universitext. Spinger-Verlag, 1985.

[Ber96] R. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory.* Oxford Science Publications, 1996.

[BGV92] N. Berline, E. Getzler, et M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators.* Springer-Verlag, 1992.

[Bou62] N. Bourbaki. *Algèbre, Chapitre 2, Algèbre linéaire.* Hermann, 1962.

[Bre93] G. E. Bredon. *Topology and Geometry.* Numéro 139 dans GTM. Springer-Verlag, 1993.

[Bro82] K. S. Brown. *Cohomology of Groups.* Numéro 87 dans GTM. Springer-Verlag, 1982.

[BT82] R. Bott et L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Numéro 82 dans GTM. Springer-Verlag, 1982.

[Car51] H. Cartan. Notions d'algèbres différentielles ; application aux groupes de lie et aux variétés où opère un group de lie. Dans *Colloque de Topologie (Bruxelles 1950).* Masson, 1951.

[CBDM82] Y. Choquet-Bruhat et C. DeWitt-Morette. *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland, 1982.

[CMR94] S. Cordes, G. Moore, et S. Ramgoolam. Lectures on 2d yang-mills theory, equivariant cohomology and topological field theories. Dans *Les Houches Session LXII.* North Holland, 1994.

[Con94] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1994.

[dAI95] J. A. de Azcàrraga et J. M. Izquierro. *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and some Applications in Physics.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1995.

[Die70] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse.* Gauthier-Villars, 1970.

[DNF82] B. Doubrovine, S. Novikov, et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine, Méthodes et applications, tomes I, II & III.* Mir, 1982.

[DV86] M. Dubois-Violette. The Weil-B.R.S. algebra of a lie algebra and the anomalous terms in gauge theory. *Journal of Geometry ans Physics*, 3 :525–565, 1986.

[GS88] M. Gerstenhaber et S. D. Schack. Algebraic cohomology and deformation theory. Dans M. Hazewinkel et M. Gerstenhaber, éditeurs, *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, pages 11–264, Dordrecht, 1988. Kluwer.

[Hus94] D. Husemoller. *Fibre Bundles.* Numéro 20 dans GTM. Springer-Verlag, third édition, 1994.

[Jac85] N. Jacobson. *Basic Algebra, vol. I & II.* Freeman, 1985.

[KMS93] I. Kolář, P. W. Michor, et J. Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag, 1993.

[KN63] S. Kobayashi et K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, vol. I & II.* Interscience Publishers, 1963.

[Lan62] S. Lang. *Introduction to Differentiable Manifolds.* Interscience Publishers, 1962.

[LM89] H. B. Lawson et M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry.* Princeton University Press, 1989.

[Lod95] J.-L. Loday. From diffeomorphism groups to loop spaces via cyclic homology. Dans *Les Houches Session LXIV.* North Holland, 1995.

[Mas95] T. Masson. *Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs.* Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1995.

[MS74] J. Milnor et J. Stasheff. *Characteristic Classes.* Numéro 76 dans Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1974.

[Nak90] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* Graduate Student Series in Physics. Adam Hilger, 1990.

[Pie82] R. S. Pierce. *Associatives Algebras.* Numéro 88 dans GTM. Springer-Verlag, 1982.

[Pos90] M. Postnikov. *Leçons de géométrie, variétés différentiables.* Mir, 1990.

[Sch96] A. S. Schwarz. *Topology for Physicists.* Springer-Verlag, 1996.

[Spa66] E. H. Spanier. *Algebraic Topology.* MacGraw-Hill, 1966.

[Ste51] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[Ste83] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry.* AMS, second édition, 1983.

[Tel95] N. Teleman. From index theory to non-commutative geometry. Dans *Les Houches Session LXIV.* North-Holland, 1995.

[Wal73] A. H. Wallace. *Introduction à la topologie algébrique.* Gauthier-Villars, 1973.

Index