2.3 Les modèles à intensité

Les modèles à intensité ont pour objectif de décrire la soudaineté du défaut tout en recherchant une calibration sur les données de marché. Le défaut est décrit comme un processus de Poisson (souvent non-homogène) dont on cherchera à connaître la distribution du temps d'arrivée et dont l'intensité peut être elle-même aléatoire.

Présentons d'abord le cas le plus simple, celui d'un processus de Poisson homogène. Soit $T_1, \ldots, T_n$ une série de variables aléatoires indépendants et identiquement distribués suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On définit pour chaque instant t le processus de sauts :

$$N_t = \sup\{n \geq 0;\ T_1 + \ldots + T_n \leq t\}$$

La quantité N_t représente le nombre de sauts avant l'instant t, et sa loi est :

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On définit le défaut comme l'instant du premier saut, qui intervient à la date τ :

$$\{\tau > t\} = \{N_t = 0\} = \{\lambda t < T_1\}$$

Lorsque le défaut est décrit par un processus de Poisson d'intensité constante λ, on aura donc :

$$P[\tau \geq t] = e^{-\lambda t} = e^{-\int_0^t \lambda \, ds}$$

$$E[\tau] = 1/\lambda$$

Notons qu'il s'agit d'un processus à absence de mémoire dans le sens où

$$P[\tau > t + s | \tau > t] = P[\tau > s]$$

Lorsque le processus de Poisson est non-homogène, cette propriété se perd et la probabilité de survie est légèrement modifiée. Celle ci devient :

$$P[\tau \geq t] = e^{-\int_0^t \lambda_s \, ds} \text{ et } P[\tau > t + \delta t | \tau > t] \sim \lambda_t \delta t \text{ lorsque } \delta t \to 0$$

Nous avons bien sûr supposé ici que l'intensité de défaut était un processus prévisible et l'on pourrait vouloir s'affranchir de cette hypothèse en arguant que le défaut est un événement aléatoire lui-même soumis à des conditions extérieures (situation économique, taux d'intérêt, etc) soumises à des effets aléatoires. Afin de capturer cette dimension, on voudra introduire une intensité de défaut elle-même aléatoire. La probabilité de survie devient alors :

$$P[\tau \geq t] = \underbrace{E\left[\underbrace{E \qquad \underbrace{P[\tau > t | \{\lambda_s \,|\, 0 \leq s \leq t\}]}}_{\text{Connaissant la trajectoire de } \lambda_s \text{, on infère une probabilité de survie conditionnalle}}\right]}_{\text{On intègre sur toutes les trajectoires possibles}} = E\left[e^{-\int_0^t \lambda_s \, ds}\right]$$

Exemple : Imaginons que l'intensité de défaut prend deux valeurs λ_{sup} et λ_{inf} suivant l'état de l'économie : récession ou prospérité. Un moyen simple pour construire un temps de défaut aléatoire dont l'intensité est elle-même aléatoire est d'adapter la formulation précédente ($\{\tau > t\} = \{\lambda t > T_1\}$) comme suit :

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \,;\, \int_0^t \lambda_s \, ds \geq T_1\right\}$$