Université de REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE
Faculté de Science Economique et de Gestion
L2, Probabilités1, 2006-2007

Partiel

EXERCICE 1

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant:

X	-1	2	5	6
$P(X=k)$	a	b	c	d

1) Donner les conditions sur $\{a, b, c, d\}$ pour que X prenne ses valeurs dans $X(\Omega)$ avec:

   i) $X(\Omega) = \{-1, 5\}$

   ii) $X(\Omega) = \{2, 5, 6\}$

   iii) $X(\Omega) = \{-1, 2, 5, 6\}$

2) On suppose maintenant que $X(\Omega) = \{-1, 2, 5, 6\}$ avec $a = d = \dfrac{1}{8}$, et $c = \dfrac{1}{4}$. Calculer l'espérance, la variance de X.

3) Tracer la fonction de répartition de X.

4) Donner la loi de probabilité de la variable $Y = X^2 - 1$.

EXERCICE 2

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité, avec:

$$P(X=0) = P(Y=0) = \frac{1}{3},\ P(X=1) = P(Y=1) = \frac{2}{3}.$$

1) On pose $Z = X + 2Y$, donner $Z(\Omega)$ puis la loi de probabilité de Z.

2) Calculer l'espérance et la variance de Z.

3) Calculer $P(Z = 2\,/Y = 1)$, $P(Z = 2\,/Y = 0)$.

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $M > 0$, on suppose que $X \sim \mathcal{G}^*(p)$, $0 < p < 1$. On pose $T = Max(X, M)$, c'est à dire que pour ω fixé T prend comme valeur le maximum de ce que vaut X et M.

1) Dites dans quel ensemble T prend ses valeurs.

2) Calculer $P(T = M)$ en fonction de M et p.

3) On prend maintenant $M = 2$ et $p = \frac{2}{3}$, donner la loi de probabilité de T.

4) Donner espérance et variance de T.

Rappel Si $X \sim \mathcal{G}^*(p)$, $E[X] = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ et la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$