A. Equation différentielle :

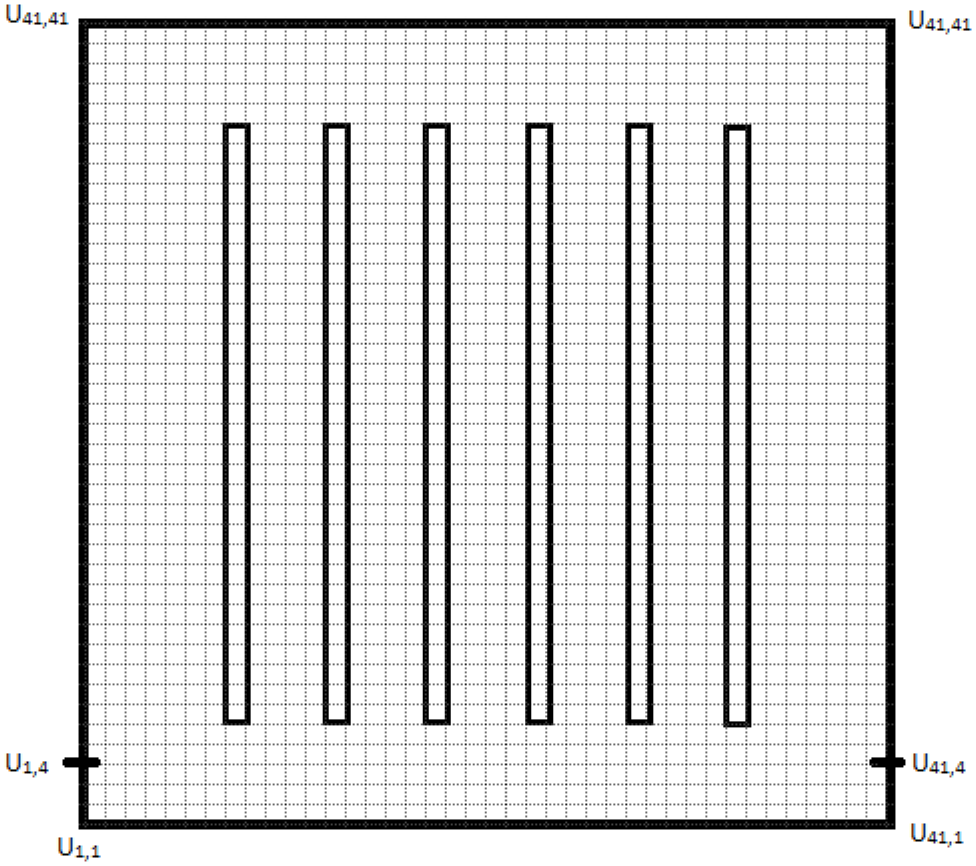
L'eau est incompressible donc : div(U)=0

$$U = \left| \begin{array}{l} U_x \\ U_y \end{array} \right.$$

$$U = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \left| \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial x} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right. \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0}$$ Equation de Laplace

B. Maillage :



C. Pour les points qui n'appartiennent à aucun bord interne ou externe, on a les relations suivantes :

$$P_{i+1,j} = P_{i,j} + \Delta x \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)_{i,j} + O(\Delta x^4)$$

$$P_{i-1,j} = P_{i,j} - \Delta x \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i,j} - \frac{\Delta x^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)_{i,j} + O(\Delta x^4)$$

D'où : $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{i+1,j}+P_{i-1,j}-2P_{i,j}}{\Delta x^2}$

De même : $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-2P_{i,j}}{\Delta y^2}$

Alors on obtient une première équationdifférentielle :

$$\boxed{\frac{P_{i+1,j} + P_{i-1,j} - 2P_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1} - 2P_{i,j}}{\Delta y^2} = 0}$$

D. Aux coins :

$$P_{2,1} = P_{1,1} + \left(\Delta x \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{1,1} + \left(\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{1,1}$$

$$P_{1,2} = P_{1,1} + \left(\Delta y \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{1,1} + \left(\frac{\Delta y^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{1,1}$$

$$P_{2,1} \times \Delta x^2 = P_{1,1} + \left(\Delta x \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{1,1} + \left(\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{1,1}\Big] \times \Delta x^2$$

$$P_{1,2} \times \Delta y^2 = P_{1,1} + \left(\Delta y \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{1,1} + \left(\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{1,1}\Big] \times \Delta y^2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{P_{1,1} = \frac{\Delta x^2 P_{1,2} + \Delta y^2 P_{2,1}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

De même :

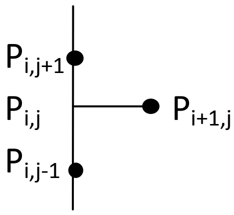
$$\longrightarrow \quad \boxed{P_{1,41} = \frac{\Delta x^2 P_{1,40} + \Delta y^2 P_{2,41}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad \boxed{P_{41,1} = \frac{\Delta x^2 P_{41,2} + \Delta y^2 P_{40,1}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad \boxed{P_{41,41} = \frac{\Delta x^2 P_{41,40} + \Delta y^2 P_{40,41}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

E. Entrée et Sortie :

$P_{1,\,4}=P_{entrée}$

$P_{41,\,4}=P_{sortie}$

F. Pour les points qui appartiennent aux bords verticaux, on a :



Pour i=1	1<j<41, j≠4
Pour i=9	6<j<36
Pour i=14	6<j<36
Pour i=19	6<j<36
Pour i=24	6<j<36
Pour i=29	6<j<36
Pour i=34	6<j<36

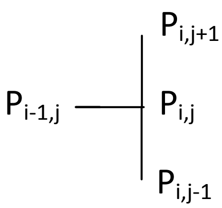
$$P_{i+1,j} = P_{i,j} + \Delta x \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j}$$

Or $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} = 0$

$$P_{i,j} = P_{i+1,j} - \frac{\Delta x^2}{2!}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j}$$

$$\boxed{P_{i,j} = P_{i+1,j} - \frac{\Delta x^2}{2!}\left[\frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right]}$$

De même à droite :

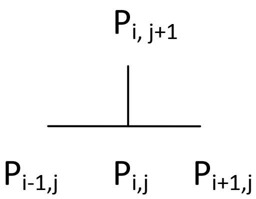


Pour i=41	1<j<41, j≠4
Pour i=8	6<j<36
Pour i=13	6<j<36
Pour i=18	6<j<36
Pour i=23	6<j<36
Pour i=28	6<j<36
Pour i=33	6<j<36

$$\boxed{P_{i,j} = P_{i-1,j} - \frac{\Delta x^2}{2!}\left[\frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right]}$$

G. Pour les points qui appartiennent aux bords horizontaux :

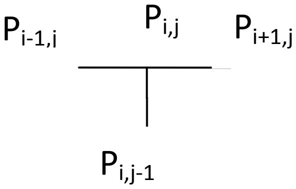
- Pour le bord inferieur :



1<i<41 j=1

$$\boxed{P_{i,j} = P_{i,j+1} - \frac{\Delta y^2}{2!}\left[\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right]}$$

- Pour le bord supérieur :



1<i<41 j=41

$$\boxed{P_{i,j} = P_{i,j-1} - \frac{\Delta y^2}{2!}\left[\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right]}$$