

IMPLICATIONS GEOMETRIQUES DE L'EQUATION DE FERMAT

PAR

Gaétan M'BAMA, Ph. D.

Résumé : L'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ est analysée en considérant successivement les variables x , y et z comme étant trois côtés d'un triangle rectangle, d'un triangle obtus, d'un triangle scalène et enfin trois segments de droites.

Dans le 1^{er} cas c'est-à-dire en considérant x , y et z comme étant les côtés d'un triangle rectangle, on arrive au grand théorème de Fermat.

Dans le 2^{ème} cas, lorsqu'on considère x , y et z comme étant trois côtés d'un triangle obtus, on arrive à l'équation $x^\omega + y^\omega = z^\omega$ qui est résoluble dans l'intervalle $]1,2[$. Cette équation exprime le rapport qui existe entre les côtés d'un triangle obtus, z étant le côté opposé à l'angle obtus.

Dans le 3^{ème} cas, quand x , y et z sont considérés comme étant trois côtés d'un triangle scalène, on arrive à l'équation $x^\sigma + y^\sigma = z^\sigma$ qui est résoluble dans l'intervalle $] -48, -0.5[\cup]2, 49[$. Cette équation exprime le rapport qui existe entre les côtés d'un triangle scalène.

Et enfin, quand on considère x , y et z comme étant trois segments quelconques de droite, on arrive à l'équation de Fermat pour $n = 1$ c'est-à-dire à: $x + y = z$.

On trouve que l'équation de Fermat est résoluble pour les valeurs de $n \in] -48, -0.5[\cup]1, 49[$ appelées exposants triangulaires.

Catégorie : 11G

JUIN - 2006

Tél. (242) 557 30 06 - e-mail: gaetanmbama@yahoo.fr

1 - INTRODUCTION

1.1 - THEOREME DE FERMAT

«Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance d'exposant supérieur à deux en deux puissances de même exposant. » Autrement dit, $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour tout $n > 2$.

1.2 - CONTEXTE

Depuis que le mathématicien Anglais Andrew Wiles est arrivé à démontrer ce théorème, des voix se sont élevées çà et là pour se demander, eu égard à l'extrême complexité de cette démonstration qui s'étale sur plus de 200 pages et qui fait intervenir des concepts mathématiques modernes très pointues qui n'existaient pas encore au XVII^{ème} siècle, si Fermat l'avait réellement démontré. Et la question de savoir quelle est la voie que Fermat aurait utilisée pour démontrer ce théorème qui porte son nom, demeure posée. Demeure également posée la question de savoir si ce théorème peut être démontré par une autre voie, plus simple que celle suivie par A. Wiles, fondée sur l'utilisation des outils mathématiques de l'époque de Fermat.

1.3 - OBJECTIF POURSUIVI

C'est pour répondre à cette préoccupation que s'inscrit le présent article qui constitue, en fait, une contribution à la résolution du 10^{ème} problème d'Hilbert dont l'objet est l'étude des méthodes de résolution des équations diophantiennes.

2 - ANALYSE STRUCTURELLE DU THEOREME DE PYTHAGORE ET DU THEOREME DE FERMAT

Un théorème est un énoncé qui est démontré vrai et qui, en calcul propositionnel, se présente symboliquement sous la forme de deux propositions reliées par un connecteur logique qui est généralement une implication et se note:

$$P \Rightarrow Q$$

Cette formule, qui se lit «*P entraîne Q*», veut dire «*si P, alors Q*». Elle est fausse dans l'unique cas où P étant vraie, Q est fausse; dans les autres cas elle est vraie.

2.1 - FORMULE LOGIQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE

Nous connaissons tous le célèbre théorème de Pythagore qui s'énonce : « ***Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit*** ».

Cet énoncé est équivalent à cet autre: « ***si x, y et z sont les trois côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté z, alors se vérifie l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$*** ».

L'analyse de la structure de cet énoncé fait ressortir deux propositions qui sont les suivantes:

$$\begin{aligned} P_2 &\equiv \{x, y \text{ et } z \text{ sont les trois côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté } z\}; \\ Q_2 &\equiv \{x^2 + y^2 = z^2\}. \end{aligned}$$

Cela posé, le théorème de Pythagore symboliquement va s'écrire

$$P_2 \Rightarrow Q_2 \quad (a)$$

2.2 - FORMULE LOGIQUE DU THEOREME DE FERMAT

Qu'en est-il du théorème de Fermat, ci-dessus, énoncé? Sa formulation est équivalente à celle-ci : **«Si $n > 2$, alors l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible ».**

Structurellement, il comporte également deux propositions qui sont:

$$P_n \equiv \{ n > 2 \};$$
$$Q_n \equiv \{ x^n + y^n = z^n \}$$

Cela posé, le théorème de Fermat, symboliquement, a pour formule:

$$P_n \Rightarrow \neg Q_n \quad (\text{lire si } P_n, \text{ alors non } Q_n) \quad (b)$$

3 - REALITE GEOMETRIQUE DES NOMBRES X, Y ET Z DANS LE THEOREME DE PYTHAGORE ET DANS LE THEOREME DE FERMAT

3.1 - DIFFICULTE DU THEOREME DE FERMAT

Posons nous la question suivante: que représentent x, y et z dans le théorème de Pythagore et dans celui de Fermat?

Dans le théorème de Pythagore, x, y et z sont trois nombres qui représentent une figure géométrique précise, en l'occurrence, le triangle rectangle. Cela est dit dans l'énoncé. C'est ce qui explique pourquoi toutes ou presque toutes les premières démonstrations du théorème de Pythagore, en commençant par le fameux moulin à vent et les autres, partent toutes du triangle

Dans celui de Fermat, par contre, x, y et z sont trois nombres abstraits qui ne se rapportent à aucune figure géométrique. Pourquoi doit-on vouloir à ce que, dans le théorème de Fermat, x, y et z puissent se rapporter à une figure géométrique quelconque ? Par ce que ce théorème, écrit sous forme d'une annotation en marge d'un exemplaire du livre d'arithmétique de Diophante de Bachet, fait face à la célèbre égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Ce fait dénote d'une tentative de généraliser le théorème de Pythagore entreprise par Fermat qui a voulu l'étendre à toutes les puissances supérieures à deux. Pourquoi alors, Fermat, en énonçant son théorème, ne s'était-il pas référé à la réalité géométrique qui sous tend celui de Pythagore? **Voilà où se trouve, à notre sens, le mot de l'énigme du théorème de Fermat.**

3.2 - LE PIEGE DE FERMAT

On sait avec certitude que, Fermat s'était inspiré de Pythagore. On peut, avec un peu d'imagination, se représenter aisément ce qui s'était passé alors: Fermat, après avoir lu cet énoncé dans son livre d'arithmétique, s'était interrogé, le plus simplement du monde, *«si x, y et z sont les côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté z, est-il possible d'étendre cette égalité à toutes les puissances supérieures à deux c'est-à-dire, d'écrire l'égalité $x^n + y^n = z^n$?».*

C'est, justement, en cherchant à répondre à cette interrogation que Fermat est arrivé à formuler son grand théorème qui se singularise par sa forme négative. Quelle méthode, quelle astuce avait-il utilisé alors? Assurément, pas celle utilisée par A. Wiles essentiellement fondée sur la démonstration de la conjecture de Shimura Taniyama-Weil (STW) portant sur le caractère modulaire des courbes elliptiques d'Iwasawa, théorie qui n'existait pas encore au temps de Fermat.

Quelle est donc la méthode que Fermat aurait utilisée?

Nous répondons à cette question en émettant l'hypothèse selon laquelle Fermat, s'étant rendu compte de l'extrême difficulté que présentait la démonstration de son théorème dans le cadre de l'arithmétique, aurait réussi à le faire géométriquement en partant du triangle rectangle puis, l'aurait par la suite reformulé pour qu'il apparaisse comme étant un problème relevant de la théorie des nombres afin de désorienter ses interlocuteurs qu'il se plaisait à éprouver. **Voilà le piège de Fermat!** C'est bien un piège, quand on sait le goût prononcé de Fermat pour les défis mathématiques qu'il aimait à lancer à ses nombreux interlocuteurs. Et on sait aussi que, en mathématiques, il avait pour domaines de prédilection les nombres premiers, les triplets et les triangles rectangles.

Pour comprendre cela, essayons un instant de reformuler le théorème de Pythagore dans l'esprit de Fermat en donnant, par exemple, cette formulation:

« Il existe une multitude de nombres entiers qui élevés à la puissance deux se décomposent en somme de deux autres nombres entiers élevés à la même puissance ».

Il faut avouer que, avec une telle formulation, il est très difficile de voir comment Vecten aurait pu construire son moulin à vent dans la mesure où le rapport entre cette formulation du théorème et le triangle rectangle ne paraît pas évident. Il lui aurait fallu d'abord postuler, intuitivement, cette relation. Nous le voyons bien, toutes les démonstrations de ce théorème ainsi formulé, ne devraient procéder, évidemment, que de la théorie des nombres.

Le premier à « tomber dans le piège » de Fermat fut Euler dont les travaux devaient définitivement orienter vers la théorie des nombres les recherches ultérieures qui allaient se faire sur cette question. Cinquante plus tard, d'autres empruntèrent la même voie consacrant ainsi l'approche arithmétique : Sophie Germain, Legendre, Lebesgue, que sais-je ? Kummer (par sa théorie des nombres idéaux élaborée à d'autres fins)...Gauss s'y essaya, sans trop insister, puis désista. Ainsi, le théorème de Fermat, tel une forteresse assiégée, est demeuré imprenable plus de trois siècles et demi durant, résistant aux assauts répétés de plusieurs générations de mathématiciens, des plus illustres aux amateurs (Fermat fut lui-même un amateur des mathématiques) jusqu'à ce que A. Wiles, par une manœuvre tactique détournée ait pu arriver à le démontrer en l'attaquant de biais.

3.3 - REFORMULATION DU THEOREME DE FERMAT DANS LE CADRE DU TRIANGLE

Ainsi nous disons : pour démontrer simplement le théorème de Fermat il faut d'abord le recadrer dans le contexte du théorème de Pythagore. Pour cela, il faudra, dans la proposition (b) ci-dessus, remplacer P_n par P_2 et $\sqrt[n]{Q_n}$ par Q_n . On obtient la formule suivante:

$$P_2 \Rightarrow Q_n \quad (c)$$

L'énoncé (c) se lit : **« si x, y et z sont les côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté z, alors $x^n + y^n = z^n$ ».**

La démonstration de la proposition (c), comme nous allons le voir, nous conduira droit au théorème de Fermat c'est-à-dire, à la proposition (b).

4 - DEMONSTRATION DU THEOREME DE FERMAT

La suite de cet article sera consacrée à la démonstration du théorème de Fermat par la voie géométrique sans recours aux nombres, plus simple et plus courte que celle utilisée par A. Wiles. Le raisonnement que nous allons conduire sera soutenu par un groupe d'hypothèses constitué de deux axiomes et de trois lois ou propriétés du triangle dont la première et la troisième nous serviront comme règles de comparaison des segments et la deuxième comme artifice de calcul.

4.1 - HYPOTHESES DE DEPART

Axiome n°1:

Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.

Axiome n°2 :

La ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

Propriété du triangle n°1: Règle de comparaison des segments

Dans un triangle, le côté opposé à un angle droit ou à un angle obtus est le côté le plus long.

Propriété du triangle n°2: Théorème des sinus

Si x , y et z sont les côtés d'un triangle d'angles intérieurs α , β et γ qui leur sont respectivement opposés, alors

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin \beta} = \frac{z}{\sin \gamma} = 2R, \quad R \text{ étant le rayon du cercle circonscrit.}$$

Propriété du triangle n°3: Théorème des cosinus

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma$$

REGLE DE CONCLUSION

Quand nous dirons que Q_n est vraie nous fonderons cette assertion sur le fait que l'énoncé de Q_n ne recèle rien qui puisse contredire l'un des deux axiomes ci-dessus retenus. Dans le cas contraire, Q_n est fausse. Après quoi, on se référera à la table de vérité de l'implication, ci-après, qui nous aidera à établir la valeur de vérité de $P_2 \Rightarrow Q_n$.

Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque:

Si AB, AC et DE sont trois segments de droite

- Le composé AB+AC doit être pris dans le sens de la somme de deux nombres qui représentent respectivement la longueur du segment AB et celle du segment AC;
- L'égalité AB+AC= DE doit être comprise ainsi qu'il suit : la somme du nombre représentant la longueur du segment AB et du nombre représentant la longueur du segment AC donne un nombre qui est égal au nombre qui représente la longueur du segment DE.

Tout ceci étant précisé, nous allons procéder à la démonstration du grand théorème de Fermat.

4.2 - DEMONSTRATION

Considérons un triangle quelconque (**fig. n°1**) dont les côtés ont pour longueur respectivement x , y et z qui sont trois nombres entiers distincts et non nuls.

Examinons maintenant l'égalité de Fermat

$$x^n + y^n = z^n, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

1^{ère} ETAPE : TRANSFORMATION DE L'EGALITE (1)

Transformons l'égalité (1) par un artifice de calcul assez simple qui consiste à faire passer z^n de l'autre côté de l'égalité et après, à mettre en facteur z^{n-1} (ce qui nous est autorisé vu que $z \neq 0$). On obtient

$$z^{n-1} \left(\frac{x^{n-1}}{z^{n-1}} x + \frac{y^{n-1}}{z^{n-1}} y - z \right) = 0$$

On voit bien que l'expression de gauche ne peut s'annuler que quand l'expression qui est entre parenthèses s'annule. On obtient

$$x \left(\frac{x}{z} \right)^{n-1} + y \left(\frac{y}{z} \right)^{n-1} = z \quad (2)$$

En utilisant le théorème des sinus l'égalité (2) prend la forme

$$x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1} = z \quad (3)$$

Pour que l'égalité (3) ait un sens il faudra que soient respectées les trois conditions suivantes :

- 1°) $\sin \gamma \neq 0$;
- 2°) $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ et $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ ne sont pas simultanément égales à l'unité et
- 3°) $\sin \alpha$ et $\sin \beta$ ne sont pas nulles ni séparément, ni simultanément.

La première condition est celle qui s'impose à tout dénominateur de quotient; la condition n°2 exprime la prise en compte de l'axiome n°2 c'est-à-dire, l'impossibilité de l'égalité $x+y=z$ dans un triangle; la condition n°3 prend en compte le fait que z est non nul et distinct de x et de y .

Faisons appel à la proposition P_2 ci-dessus énoncée c'est-à-dire, considérons x , y et z comme étant la longueur des trois côtés d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le côté de longueur z .

Il n'est pas difficile de vérifier que, en adoptant cette proposition, les trois conditions ci-dessus posées sont respectées vu que l'angle γ devient droit et les angles α et β deviennent complémentaires c'est-à-dire $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tout ceci aura pour conséquence la simplification de l'égalité (3) qui prendra alors la forme

$$x \sin^{n-1} \alpha + y \cos^{n-1} \alpha = z \quad (4)$$

L'égalité (4) peut aussi s'écrire sous la forme plus simplifiée suivante

$$\sin^n \alpha + \cos^n \alpha = 1 \quad (4')$$

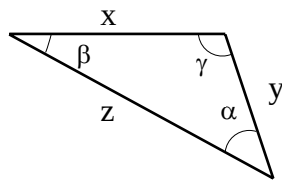


Fig. 1

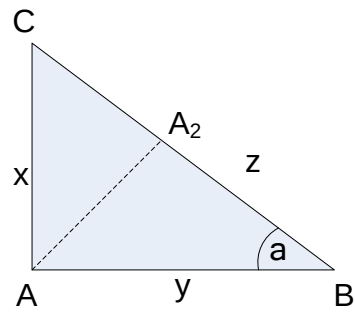


Figure n° 2

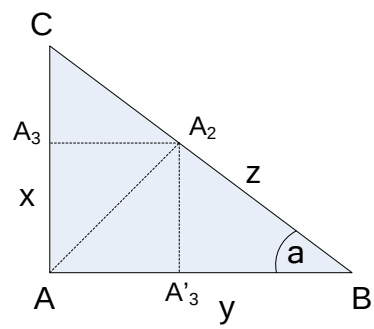


Figure n°3

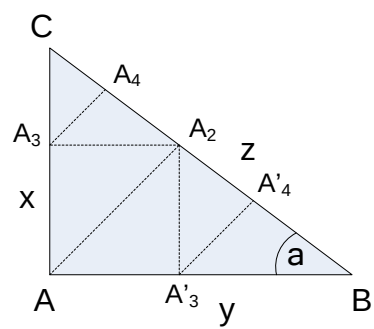


Figure n°4

2^{ème} ETAPE : ANALYSE DE L'EGALITE (4) EN FONCTION DES VALEURS DE n

Analysons l'égalité (4) en considérant les différentes valeurs de n

► **Quand $n = 1$**

En remplaçant n par 1 dans l'égalité (4), celle-ci se ramène à

$$x + y = z \quad (5)$$

Qui peut aussi prendre la forme: $\sin \alpha + \cos \alpha = 1 \quad (5')$

L'égalité (5) n'est pas vraie dans un triangle et est en contradiction avec l'axiome n°2. Ce constat nous amène dresser la table de vérité ci-après:

P_2	Q_1	$P_2 \Rightarrow Q_1$
V	F	F

Lemme n°1: Dans un triangle rectangle l'égalité $x^n + y^n = z^n$ n'est pas résoluble quand $n = 1$.

► **Quand $n = 2$**

En remplaçant n par 2 dans l'égalité (4), celle-ci devient

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = z \quad (6)$$

L'égalité (6) n'est autre que le théorème des projections qui énonce ici que, dans un triangle la somme de la projection orthogonale des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse est égale à l'hypoténuse. Pour apprécier ce fait, considérons le triangle rectangle **ABC** (**figure n°2**). Abaissons sur **BC** la hauteur issue du sommet **A**. Au point de rencontre avec **BC** on trouve le point **A₂**. On constate que le segment **A₂C** représente la projection du côté **AC** sur **BC** et le segment **A₂B** celle du côté **AB** sur **BC**. Et on peut noter:

$$\begin{aligned} A_2C &= \text{Pr}(AC)_{BC} = x \sin \alpha \\ A_2B &= \text{Pr}(AB)_{BC} = y \cos \alpha \\ BC &= z \\ AC &= x \\ AB &= y \end{aligned} \quad (7)$$

La prise en compte de la notation (7) dans l'égalité (6) nous donne

$$A_2C + A_2B = BC \quad (8)$$

L'égalité (8) est vraie : C'est la relation de Chasles sur un axe. Cette vérité peut se constater sur la **figure n°2**: la longueur du segment **BC** est bien égale à la somme de la longueur du segment **A₂C** et de celle du segment **A₂B**. Ce constat nous amène à établir la table de vérité ci-après

P_2	Q_2	$P_2 \Rightarrow Q_2$
V	V	V

Lemme n°2: Dans un triangle rectangle, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est résoluble quand $n = 2$. C'est le théorème de Pythagore

► **Quand $n = 3$**

En remplaçant n par 3 dans l'égalité (4), celle-ci devient

$$x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = z \quad (9)$$

qui peut s'écrire

$$x \sin \alpha \sin \alpha + y \cos \alpha \cos \alpha = z$$

où bien encore après avoir pris en compte la notation (7)

$$A_2 C \sin \alpha + A_2 B \cos \alpha = z \quad (10)$$

Examinons le triangle de la **figure n°2**. Du point **A₂** abaissons deux perpendiculaires, l'une sur **AC** et l'autre sur **AB**. Au point de rencontre avec **AC** on trouve le point **A₃** et au point de rencontre avec **AB** on trouve **A'₃**. On obtient la **figure n°3**

$$A_2 C \sin \alpha = A_3 C = \text{Pr}(A_2 C)_{AC}$$

$$A_2 B \sin \alpha = A'_3 B = \text{Pr}(A_2 B)_{AB}$$

Prenant en compte la notation ci-dessus, l'égalité (10) prendra la forme

$$A_3 C + A'_3 B = BC \quad (11)$$

La prise en compte de cette égalité (11) et de l'égalité (8), au regard l'axiome n°1, nécessite une comparaison entre $A_3 C + A'_3 B$ et $A_2 C + A_2 B$. Pour ce faire, considérons sur la **figure n°2** le triangle $A_2 C A_3$ et le triangle $A_2 B A'_3$. D'après la règle de comparaison des segments nous établissons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} A_3 C &< A_2 C \\ A'_3 B &< A_2 B \end{aligned} \quad (12)$$

La somme membre à membre de ces deux inégalités nous donnera une égalité qui conservera le même sens. Ainsi, on obtient

$$A_3 C + A'_3 B < A_2 C + A_2 B \quad (13)$$

Au regard de l'inégalité (13), et pour ne pas être en contradiction avec l'axiome n°1, la prise en compte de l'égalité (8) conduit à la fausseté de (11). Ce constat nous amène à la table de vérité suivante:

P ₂	Q ₃	P ₂ ⇒ Q ₃
V	F	F

Lemme n°3: Dans un triangle rectangle l'égalité $x^n + y^n = z^n$ n'est pas résoluble quand $n = 3$.

► **Quand $n = 4$**

En remplaçant n par 4 dans l'égalité (4), celle-ci devient

$$x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = z \quad (14)$$

qui peut s'écrire

$$x \sin \alpha \sin \alpha \sin \alpha + y \cos \alpha \cos \alpha \cos \alpha = z$$

où bien encore après avoir pris en compte la notation (7)

$$A_3C \sin \alpha + A_3B \cos \alpha = z \quad (15)$$

Sur la **figure n°4** on voit que A_4 est la projection du point A_3 sur BC et A'_4 celle du point A'_3 sur BC .

$$\begin{aligned} A_3C \sin \alpha &= A_4C = \text{Pr}(A_3C)_{BC} \\ A'_3B \sin \alpha &= A'_4B = \text{Pr}(A'_3B)_{BC} \end{aligned}$$

Ainsi, prenant cela en compte, l'égalité (15) prendra la forme

$$A_4C + A'_4B = BC \quad (16)$$

La prise en compte de l'égalité (16) avec l'égalité (8) contredit l'axiome n°1 car on aura remarqué sur la figure que $A_4C \angle A_2C$ et $A'_4B \angle A_2B$ ce qui, après sommation membre à membre de ces deux inégalités, nous aura donné: $A_4C + A'_4B \angle A_2C + A_2B$. D'où la table de vérité suivante:

P_2	Q_4	$P_2 \Rightarrow Q_4$
V	F	F

Lemme n°4: Dans un triangle rectangle l'égalité $x^n + y^n = z^n$ n'est pas résoluble quand $n = 4$.



D'une manière générale quand $n > 2$

Ici, il s'agira d'établir la valeur de vérité de l'égalité (4) $x \sin^{n-1} \alpha + y \cos^{n-1} \alpha = z$. Pour cela, nous devons la comparer avec l'égalité (6) $x \sin \alpha + y \cos \alpha = z$ dont la valeur de vérité vraie a été attestée pour $n=2$.

Rappelons que l'angle α ne peut jamais être nul ni droit sinon, on sortirait du cadre du triangle.

Ainsi, $\forall \alpha \in]0, \pi/2[$ et $\forall n$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k < n$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$\sin \alpha > \sin^2 \alpha > \dots > \sin^k \alpha > \sin^{k+1} \alpha > \dots > \sin^{n-1} \alpha > \sin^n \alpha \quad (17)$$

$$\cos \alpha > \cos^2 \alpha > \dots > \cos^k \alpha > \cos^{k+1} \alpha > \dots > \cos^{n-1} \alpha > \cos^n \alpha \quad (18)$$

Après avoir multiplié les inégalités (17) et (18) respectivement par x et par y , leur sommation membre à membre donnera l'inégalité suivante qui conservera le même sens :

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha > x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha > \dots > x \sin^{n-1} \alpha + y \cos^{n-1} \alpha > x \sin^n \alpha + y \cos^n \alpha \quad (19)$$

Au vu de cette inégalité (19), comme l'égalité (6) avait été prouvée vraie, donc l'égalité (4) est fausse obligatoirement. D'où la table de vérité ci-après:

P_2	Q_n	$P_2 \Rightarrow Q_n$
V	F	F

Lemme n°5: Dans un triangle rectangle d'hypoténuse z , l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible quand $n > 2$. **CQFD**

Ainsi, comme on s'en rend compte, nous sommes parvenu à démontrer cet autre **théorème** : **Dans un triangle rectangle d'hypoténuse z, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible quand $n \neq 2$.**

5 – EXAMEN DE L'EGALITE DE FERMAT DANS LE CADRE DE LA DROITE

Considérons maintenant x, y et z comme n'étant pas les côtés d'un triangle. Supposons, par exemple, qu'ils représentent trois segments de droite distincts disposés de manière quelconque de telle sorte que la longueur de l'un soit égale à la somme des longueurs des deux autres c'est-à-dire: $x + y = z$.

Posons :

$P_1 \equiv \{x, y \text{ et } z \text{ sont trois segments de droite tels que } x + y = z\}$;

$Q_n \equiv \{x^n + y^n = z^n\}$

Cela posé, vérifions la proposition $P_1 \Rightarrow Q_n$.

A cet effet, examinons l'égalité de Fermat en la considérant dans sa forme (2) ci-après :

$$x \left(\frac{x}{z} \right)^{n-1} + y \left(\frac{y}{z} \right)^{n-1} = z$$

Cette égalité est fausse quand l'égalité $x + y = z$ est vraie. On peut le montrer simplement de la manière suivante:

Si $x + y = z$ alors $x < z$ et $y < z$ ceci entraîne $\frac{x}{z} < 1$ et $\frac{y}{z} < 1$

Cela posé, les inégalités suivantes seront vraies

$$x > x \left(\frac{x}{z} \right) > x \left(\frac{x}{z} \right)^2 > \dots x \left(\frac{x}{z} \right)^{n-1} > x \left(\frac{x}{z} \right)^n \quad (19)$$

$$y > y \left(\frac{y}{z} \right) > y \left(\frac{y}{z} \right)^2 > \dots y \left(\frac{y}{z} \right)^{n-1} > y \left(\frac{y}{z} \right)^n \quad (20)$$

La somme membre à membre de ces deux inégalités nous conduira à l'inégalité suivante qui conservera le même sens

$$x + y > x \left(\frac{x}{z} \right)^{n-1} + y \left(\frac{y}{z} \right)^{n-1} \quad (21)$$

Donc, au vu de l'axiome n°1, si l'égalité $x + y = z$ est vraie, alors, l'égalité

$x \left(\frac{x}{z} \right)^{n-1} + y \left(\frac{y}{z} \right)^{n-1} = z$ ne peut pas être vraie. D'où, la table de vérité ci-après :

P_1	Q_n	$P_1 \Rightarrow Q_n$
V	F	F

THEOREME: Sur la droite, l'égalité de Fermat est impossible quand $n > 1$.

6 - REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'EGALITE DE FERMAT

Considérons l'égalité de Fermat dans sa forme (4) suivante

$$x \sin^{n-1} \alpha + y \cos^{n-1} \alpha = z$$

Notons l'expression qui est à gauche par la fonction

$$f_1(n) = x \sin^{n-1} \alpha + y \cos^{n-1} \alpha \quad (22)$$

Et l'expression de droite par la fonction

$$f_2(n) = z \quad (23)$$

Le problème, ici, est ramené à un problème de recherche des points d'intersection entre la courbe $f_1(n)$ et la droite $f_2(n)$. Les valeurs de n , pour lesquelles $f_1(n)$ et $f_2(n)$ se coupent, seront les valeurs pour lesquelles l'égalité de Fermat $x^n + y^n = z^n$ sera résoluble.

Analysons ces deux fonctions.

La fonction $f_1(n)$ est une fonction continue dans $\mathbb{R}$; elle est strictement décroissante et concave. Elle décroît de $+\infty$ à 0 vers lequel elle tend asymptotiquement.

► **Quand $n < 2$,**

La fonction $f_1(n)$ est partout supérieure à z avec notamment $f_1(0) = 2z$ et $f_1(1) = x + y$.

► **Quand $n = 2$,** $f_1(n) = z$.

Pour les autres valeurs de $n > 2$, $f_1(n)$ est inférieure à z .

La fonction $f_2(n)$ est une fonction constante dans $\mathbb{R}$ dont le graphique est la droite parallèle à l'axe des n .

Comme la fonction $f_1(n)$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}$, elle ne pourra rencontrer la fonction $f_2(n)$ qu'une seule fois. En prenant n'importe quel triangle rectangle et en calculant les valeurs de $f_1(n)$ correspondant aux différentes valeurs de n pour ce triangle, on aura vite fait de se rendre compte que $f_1(2) = z$ et cela, quelque soit le triangle choisi. Ainsi, pour $n = 2$, $f_1(n) = f_2(n)$ donc, l'égalité $x^n + y^n = z^n$, d'où est déduite l'égalité (4), est résoluble. Pour les autres valeurs de n , $f_1(n)$ et $f_2(n)$ ne se croisent pas. C'est ce qui, semble-t-il, énonce le théorème de Fermat.

7 – EXAMEN DE L'EGALITE DE FERMAT DANS LE CADRE D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

Il est tentant de vouloir savoir quel sens revêt l'équation de Fermat quand x , y et z représentent les côtés d'un triangle quelconque. Pour ce faire, examinons l'égalité de Fermat dans sa forme (3) suivante :

$$x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1} = z$$

Notons :

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1} \\ f_2(n) &= z \end{aligned} \quad (24)$$

Qui peuvent encore s'écrire:

$$f_1(n) = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^n + \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^n \quad (24')$$

$$f_2(n) = 1$$

Analysons la fonction (24). Deux cas se présentent :

7.1 - Premier cas : $\gamma > 90^\circ$, $\gamma > \alpha$ et $\gamma > \beta$ c'est-à-dire le triangle est obtus en γ . Nous aurons:

$$\sin \gamma > \sin \alpha \text{ et } \sin \gamma > \sin \beta \text{ ce qui donne } \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} < 1 \text{ et } \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} < 1$$

La fonction (24) aura la même allure que la fonction (22) c'est-à-dire, elle est continue, strictement décroissante et concave; elle décroît de $+\infty$ à 0 vers lequel elle tend asymptotiquement.

► **Quand** $n < 2$,

La fonction $f_1(n)$ est partout supérieure à z avec notamment, $f_1(0) = 2z$ et $f_1(1) = x + y$.

► **Quand** $n = 2$, on montre que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est impossible vu que $f_1(n) < z$. En effet, en géométrie, on sait que, quand le triangle n'est pas rectangle, z doit être calculé, d'après le théorème des cosinus, par la formule $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}$. Dans cette formule, quand $\gamma > 90^\circ$, $\cos \gamma < 0$ et le signe «-» se change en signe«+»; ce qui fait que la valeur de z calculée par le théorème de Pythagore sera inférieure à celle calculée par le théorème des cosinus c'est-à-dire

$$f_1(2) = x \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + y \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{x^2 + y^2} < z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}$$

► **Quand** $n > 2$

$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} < 1$, $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} < 1$ étant donnés, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} > \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^2 > \dots > \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^k > \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{k+1} > \dots > \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} > \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^n \quad (42)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} > \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^2 > \dots > \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^k > \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{k+1} > \dots > \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1} > \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^n \quad (43)$$

En faisant la sommation membre à membre des inégalités (42) et (43) après les avoir multiplié respectivement par x et par y , nous établissons l'inégalité suivante

$$x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1} < x \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + y \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \text{ c'est-à-dire } f_1(n) < f_1(2) < z$$

Quand n tend vers l'infini, $f_1(n)$ tendra vers zéro.

Après tout ceci, une question demeure. Cette question est celle de savoir, pour quelle valeur de n la courbe $f_1(n)$ et la droite $f_2(n) = z$ vont-elles se croiser? Au vu des résultats obtenus, nous pouvons dire avec certitude que $f_1(n)$ et $f_2(n) = z$ vont se croiser pour une valeur de $n = \omega$ située entre $n = 1$ et $n = 2$ vu que:

$$f_1(1) = x + y > z \text{ et } f_1(2) < z.$$

Ainsi, on peut énoncer:

Théorème 1 : Dans un triangle obtus (x,y,z) ayant pour côté opposé à l'angle obtus le côté z, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible quand $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2 : A tout triangle obtus (x,y,z) ayant pour côté opposé à l'angle obtus le côté z, on associe un réel $w \in]1,2[$ tel que $x^w + y^w = z^w$.

7.2 - Deuxième cas: x, y et z sont les côtés d'un triangle scalène avec $\gamma < 90^\circ$, $\alpha + \beta > 90^\circ$, $\gamma > \alpha$ et $\gamma > \beta$.

Nous aurons les inégalités ci-après:

$$\sin \gamma > \sin \alpha \text{ et } \sin \gamma > \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} < 1 \text{ et } \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} < 1$$

$$f_1(n) = x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1}$$

$$f_2(n) = z$$

► **Quand** $n < 2$,

La fonction $f_1(n)$, comme dans le 1^{er} cas, est décroissante et partout supérieure à z avec notamment, $f_1(0) = 2z$ et $f_1(1) = x + y$.

► **Quand** $n = 2$, on montre que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est impossible vu que $f_1(2) > z$. En effet, en géométrie, on sait que, quand le triangle n'est pas rectangle, z doit être calculé d'après le théorème des cosinus par la formule $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}$. Dans cette formule, quand $\gamma < 90^\circ$, $\cos \gamma > 0$ et par conséquent, la valeur de z calculée par le théorème de Pythagore sera supérieure à celle calculée par le théorème des cosinus c'est-à-dire:

$$f_1(2) = x \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + y \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{x^2 + y^2} > z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}$$

► **Quand** $n > 2$, on montre, comme dans le cas précédent, que $f_1(n) < f_1(2)$, quand $n \rightarrow +\infty$, $f_1(n) \rightarrow 0$ et que dans l'intervalle $]2, +\infty[$ on trouvera, obligatoirement, un nombre $n = \sigma_1$ tel que $f_1(\sigma_1) = z$ vu que $f_1(2) > z$. Pour approcher ce nombre, nous allons procéder de la manière suivante : Commençons d'abord par adopter une échelle de mesure des angles dont la plus petite graduation est égale à 1° .

Dans cette échelle, les triangles scalènes les plus proches des triangles équilatéraux et isocèles sont ceux qui ont pour angles intérieurs (α, β, γ) le triplet $(59^\circ, 60^\circ, 61^\circ)$. Le calcul par la formule (24') nous indique que $\sigma_1 \in]48, 49[$ vu que $f_1(48) > 1$ et $f_1(49) < 1$.

D'autre part, dans la même échelle, les triangles scalènes les plus proches des triangles rectangles et isocèles sont ceux qui ont pour angles intérieurs (α, β, γ) le triplet $(3^\circ, 88^\circ, 89^\circ)$. Le calcul par la même formule (24') nous indique que $\sigma_1 \in]2, 3[$ vu que $f_1(2) > 1$ et $f_1(3) < 1$.

On trouve, par ailleurs, que les autres triangles scalènes ont leur triplets d'angles (α, β, γ) situés entre ces deux extrêmes, leurs exposants σ_1 se trouvant dans l'intervalle $]2, 49[$. Ce qui est remarquable c'est que, ces nombres ne sont pas des entiers et varient d'un triangle scalène à un autre. Tout se passe comme si, à tout groupe de triangles scalènes (α, β, γ) répondant aux conditions ci-dessus, on associe un nombre non entier et un seul $n = \sigma_1 > 2$ tel que $x^{\sigma_1} + y^{\sigma_1} = z^{\sigma_1}$ avec, $\sigma_1 \in]2, 49[$. On trouve que, les plus grandes valeurs de ce nombre sont caractéristiques des triangles scalènes qui, par la valeur de leurs angles, se rapprochent des triangles équilatéraux et, les plus petites valeurs sont caractéristiques de ceux qui se rapprochent des triangles rectangles.

7.3 - Considérons maintenant le cas où x, y et z sont les côtés d'un triangle scalène avec, $\alpha + \beta > 90^\circ$, $\gamma < \alpha$ et $\gamma < \beta$.

Nous aurons les inégalités ci-après:

$$\sin \gamma < \sin \alpha \text{ et } \sin \gamma < \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} > 1 \text{ et } \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} > 1$$

$$f_1(n) = x \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^{n-1} + y \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^{n-1}$$

$$f_2(n) = z$$

On montre que :

► Dans l'intervalle $]-\infty, 0]$, $f_1(n)$ est strictement croissante.

Quand $n \rightarrow -\infty$, $f_1(n) \rightarrow 0$ et $f_1(0) = 2z$.

► Dans l'intervalle $]0, 1]$, $f_1(n)$ est strictement décroissante.

$$f_1(1) = x + y$$

► Quand $n = 2$, $f_1(2) > z$

► Quand $n > 2$, $f_1(n)$ est strictement croissante.

$f_1(n) > f_1(2)$, quand $n \rightarrow +\infty$, $f_1(n) \rightarrow +\infty$

On montre, également, que dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ on trouvera, obligatoirement, un nombre $n = \sigma_2$ tel que $f_1(\sigma_2) = z$ vu que $f_1(0) = 2z > z$. Ce nombre qui varie d'un triangle scalène à un autre n'est pas non plus un entier et se situe précisément dans l'intervalle $]-48, -0.5[$. Tout se passe comme si, à tout groupe de triangles scalènes (α, β, γ) répondant aux conditions ci-dessus, on associe un nombre non entier et un seul $n = \sigma_2 < 0$ tel que $x^{\sigma_2} + y^{\sigma_2} = z^{\sigma_2}$ avec, $\sigma_2 \in]-48, -0.5[$. On trouve que, les plus petites valeurs de ce nombre sont caractéristiques des triangles scalènes qui, par la valeur de leurs angles, se rapprochent des triangles équilatéraux et, les plus grandes valeurs sont caractéristiques de ceux qui se rapprochent des triangles rectangles.

Par la méthode des parties proportionnelles, on peut approcher avec précision ces nombres (qu'on appellera **exposants triangulaires**) avec la formule, ci après:

$$\sigma = n + \frac{1}{k+1}$$

avec,

$$k = \frac{1 - f_1(n+1)}{f_1(n) - 1} \quad , \quad f_1(n) \succ 1 \text{ et } f_1(n+1) \prec 1$$

Si on trouve $f_1(\sigma) \neq 1$, on calcul un nouveau k'

Par la formule

$$k' = \frac{1 - f_1(\sigma)}{f_1(n) - 1}, \text{ si } f_1(\sigma) \prec 1$$

Ou par cette autre

$$k' = \frac{1 - f_1(n+1)}{f_1(\sigma) - 1}, \text{ si } f_1(\sigma) \succ 1$$

Ainsi de suite, jusqu'à trouver $f_1(\sigma) = 1$.

En essayant d'approcher, par exemple, l'exposant du triangle scalène ($3^\circ, 88^\circ, 89^\circ$), situé à la frontière avec les triangles équilatéraux et isocèles, on trouve que ce nombre paraît irrationnel et qu'il se situe dans l'intervalle

$$2,3217408385 < \sigma < 2,321740838599999999999999999999$$

Théorème 3 : A tout triangle scalène (x,y,z) ayant pour côté opposé à l'angle obtus le côté z , on associe un réel non entier $\sigma \in]-48, -0.5[\cup]2, 49[$ tel que $x^\sigma + y^\sigma = z^\sigma$.

L'exposant n ($n \in \mathbb{R}$) dans l'équation de Fermat apparaît comme un indice qui permet d'ordonner les triangles. On trouve que l'équation de Fermat est résoluble pour les valeurs de $n \in]-48, -0.5[\cup]1, 49[$ qu'on qualifiera d'**exposants triangulaires**.

	n						
	-48÷ -0.5	0	0÷1	1	1÷2	2	2÷49
Triangles scalènes $\gamma < 90^\circ, \gamma < \alpha, \gamma < \beta, \alpha + \beta > 90^\circ$							
Segments de droite $\gamma < 90^\circ, \gamma < \alpha, \gamma < \beta, \alpha + \beta > 90^\circ$							
Triangles obtus $\gamma > 90^\circ, \gamma > \alpha, \gamma > \beta$							
Triangles rectangles $\gamma > 90^\circ, \gamma > \alpha, \gamma > \beta$							
Triangles scalènes $\gamma > \alpha, \gamma > \beta, \alpha + \beta > 90^\circ$							

$$f_1(n) = \sin^n \alpha + \cos^n \alpha$$



Figure n°5: Représentation graphique du théorème de Fermat pour 3 valeurs de α

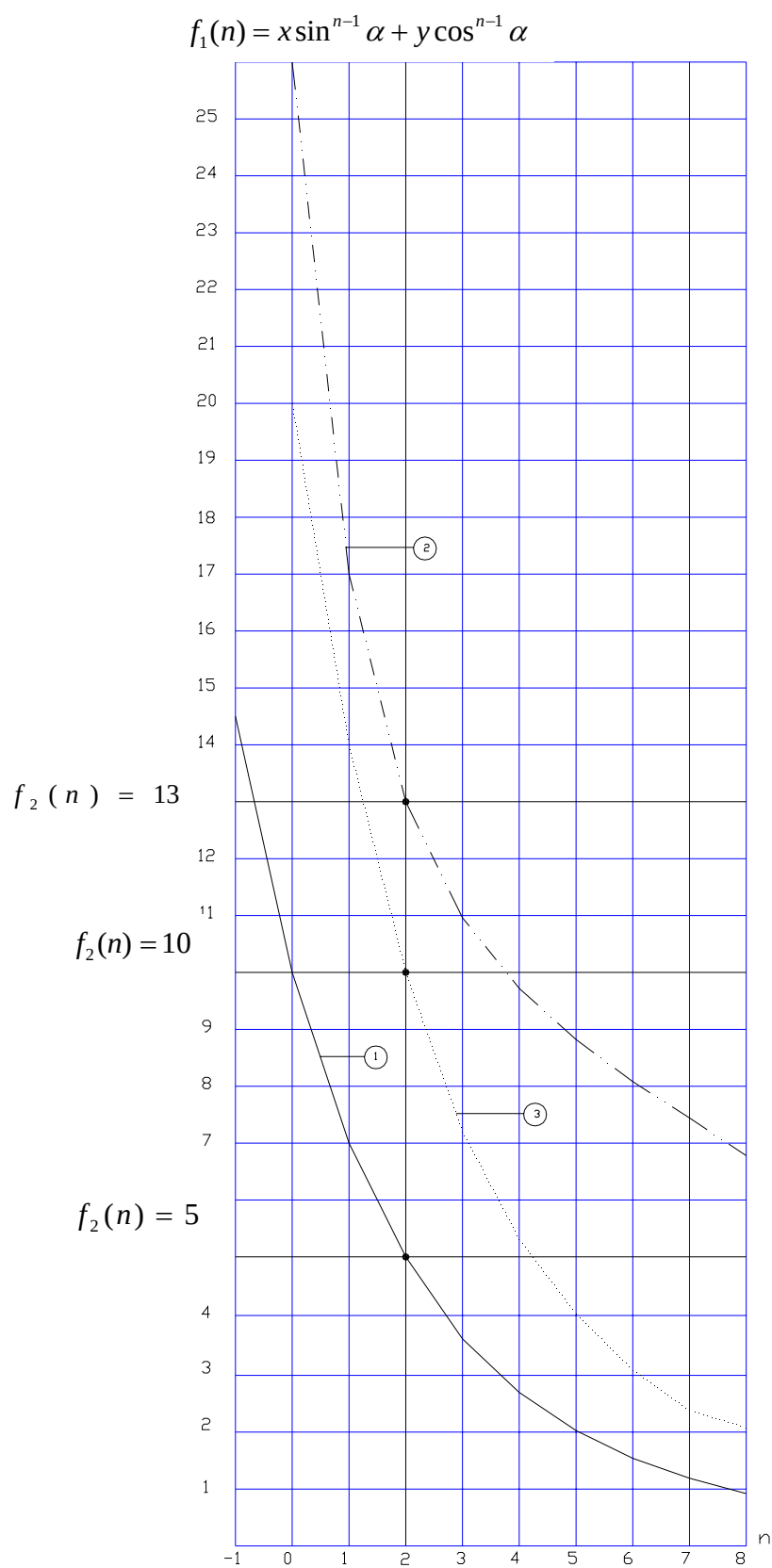


Figure n°4: Représentation graphique du théorème de Fermat pour 3 triangles: n°1: (3,4,5); n° 2: (5,12,13) et n° 3: (6,8,10)