Année 2000-2001

Contrôle de Statistiques
Session 1

Documents autorisés : Notes de cours, polycopié et exercices du cours à l'exclusion de tout autre document. Durée 2h30.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 :

Soit une variable aléatoire X continue positive de densité de probabilité f(x) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp[-(x - ?)] & \text{si } x > ? > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer E[X] et V[X].

2) On veut estimer 6 à l'aide d'un échantillon X1, X2, ..., X_n . Trouver un estimateur sans biais T1 de 0 qui soit fonction de X. Quelle est sa variance ?

3) Soit la variable aléatoire $Z = \operatorname{Inf}_{i ? [l,n]} \{ Xi \}$

Quelle est sa loi (fonction de répartition et fonction densité), son espérance, sa variance ? En déduire un autre estimateur T2 sans biais de 6. Quelle est sa variance ?

4) Soit p le coefficient de corrélation linéaire entre T1 et T2. Quel est le meilleur estimateur sans biais de 6 qui soit combinaison linéaire de T 1 et de T2 ? On l'appellera T.

5) Montrer que Z est exhaustif pour 0 ; en déduire la valeur de p.

Exercice 2 :

Le taux d'un certain gaz dans l'atmosphère suit une loi Normale de moyenne m et d'écart-type 6, ces deux paramètres étant inconnus.
On effectue des prélèvements en différents points de l'atmosphère et sur un échantillon de taille n = 10 on a les résultats suivants en cm^3/m^3 :

10,2	9,5	10,7	10,4	11,0	9,9	9,3	11,2	10,1	9,7

1) Donner un intervalle de confiance à 95% du taux moyen de ce gaz dans l'atmosphère. Que devient cet intervalle si on prend un échantillon de taille n=100 en conservant les moyenne et variance d'échantillon obtenues auparavant ?

2) On suppose maintenant que l'écart-type 6 est connu et a pour valeur a = 0,6 ; donner l'intervalle de confiance à 95% du taux moyen de ce gaz dans l'atmosphère en considérant l'échantillon de taille n=10 ci-dessus.

<u>Exercice 3 :</u>

Dans le cadre de la rénovation d'un grand lycée, plusieurs types d'éclairage des salles de cours sont en concurrence (lampes classiques, à économie d'énergie, rampes lumineuses, spots, ...). Pour aider à la décision et finaliser le choix un test est mis en oeuvre.
Chacun des 5 types d'éclairage, notés T 1 a T5, est testé plusieurs fois et les résultats obtenus, à savoir les durées de vie exprimées en heures, figurent dans le tableau ci-dessous :

Types d'éclairage	TI	T2	T3	T4	T5
Durées de vie exprimées en heures	1812	1921	2011	1715	1957
	1784	1857	1916	1789	2008
	1875	1849	1895	1831	1946
	1904	1866	1924	1887	1911
	1825	1903	1881	1818	1851
		1806	1811	1835	1866
			1846	1830	1841
			1812		1902
					1818

On appellera X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie du $i^{ème}$ type d'éclairage, et on supposera que chacune de ces variables aléatoires suit une loi Normale de paramètres m_i et s_i. Pour chacune des variables aléatoires X_i on notera n; le nombre d'observations effectuées.

Peut-on dire, en prenant un risque égal à 5% que ces techniques d'éclairage donnent des résultats équivalents ? On testera successivement, et dans l'ordre qui convient, les deux paramètres de ces lois.

Si la réponse est négative, indiquez les types d'éclairage significativement différents en mettant en œuvre un test et toujours en prenant un risque égal à 5% ; on ne testera que les types d'éclairage qui semblent a priori différents.

<u>Note</u> : Pour chaque test on indiquera clairement les hypothèses (H_0) et (H_I), la variable de décision et sa loi de probabilité ainsi que la région critique.