# $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

<u>Lemme</u>

Soient $a$ et $b$ deux réels avec $a < b$.

$$\text{Si } b - a > 1, \text{ alors } \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } a < p < b$$

(Entre deux réels distants d'au moins une unité, on peut toujours intercaler un entier)

<u>Démonstration du lemme</u> :

Considérons l'ensemble $F$ des entiers supérieurs à $b$ :

$$F = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geqslant b\}$$

$F$ est non vide (car $\mathbb{R}$ est Archimédien) et minoré (par $a$) donc admet un plus petit élément $n$.

Posons $p = n - 1$. On a donc : $\quad p \notin F \text{ et } p + 1 \in F$

C'est-à-dire : $\quad p < b \text{ et } p \geqslant b - 1 > a$

Donc : $\quad \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } a < p < b$

<u>Proposition</u>

$$\forall (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tel que : } x < r < y.$$

(On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

<u>Démonstration</u> :

On "agrandit" l'intervalle $[x\,;\,y]$ de façon qu'il contienne un entier :

$$\exists q \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } q(y - x) > 1 \text{ (toujours possible car } \mathbb{R} \text{ est Archimédien)}$$

C'est-à-dire : $\quad qy - qx > 1$

D'après le lemme, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que : $\quad qx < p < qy$

En divisant par $q$ ($> 0$) et en posant $r = \dfrac{p}{q}$, on obtient :

$$x < r < y \text{ où } r \in \mathbb{Q}$$

Ceci prouve que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On note : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

<u>Exercice</u> : montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationnels) est dense dans $\mathbb{R}$.

Déjà, on sait qu'il existe un irrationnel $\mathbf{e}$.

Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x < y$.

Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que : $q(y - x) > \mathbf{e}$.

Posons $z = x + \dfrac{\mathbf{e}}{q}$. Il est clair que : $\quad x < z < y$

En outre, $z$ est nécessairement irrationnel (sinon $\mathbf{e}$ serait rationnel)

Entre deux rationnels $x$ et $y$, on peut donc intercaler un irrationnel.

Donc entre deux réels aussi d'où : $\quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Autre démonstration de "$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$" :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ :

$$a_n = \frac{1}{10^n} E(10^n x) \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$$

Par exemple, avec $x = \pi$, on a : $a_0 = 3$ et $b_0 = 4$ ; $a_1 = 3{,}1$ et $b_1 = 3{,}2$ ; $a_2 = 3{,}14$ et $b_2 = 3{,}15$ etc ...

La suite $(a_n)$ est la suite du développement décimal de $x$.

On montre que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui encadrent $x$ et qu'elles sont adjacentes. Elles convergent donc vers $x$.

Tout réel $x$ est donc limite d'une suite de rationnels. En conséquence $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.