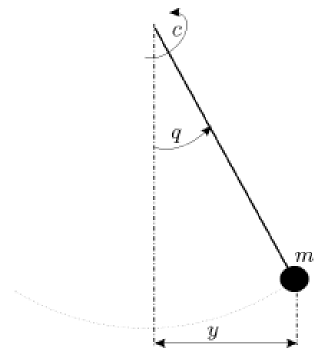
2.3.4 Modélisation d'un pendule simple

On considère le pendule de la figure ci dessous. L'entrée de ce système est le couple c exercé sur le pendule. La sortie est $y(t)$, la distance entre la masse m et l'axe vertical. Cherchons les équations d'état de ce système.



Pendule simple

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$-\ell mg\sin q + c = J\ddot{q},$$

où ℓ est la longueur du pendule. Or, pour notre exemple, $J = m\ell^2$, donc

$$m\ell^2\ddot{q} + \ell mg\sin q = c.$$

Comme indiqué au point 3 du paragraphe 2.3.1 de la page 18, nous devons prendre pour vecteur d'état $\mathrm{x} = (q, \dot{q})$. Les équations d'état du système s'écrivent alors :

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \frac{-\ell mg\sin q + c}{m\ell^2} \end{pmatrix}, \\ y & = & \ell\sin q. \end{array} \tag{2.1}$$

Remarque 2.3.1 *L'énergie mécanique du pendule est donnée par*

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\ell^2\dot{q}^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{mg\ell\,(1-\cos q)}_{\text{énergie potentielle}}.$$

Lorsque le couple c est nul, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{dE_m}{dt} & = & \frac{1}{2}m\ell^2\,(2\dot{q}\ddot{q}) + mg\ell\dot{q}\sin q \\ & = & m\ell^2\left(\dot{q}\frac{-\ell mg\sin q}{m\ell^2}\right) + mg\ell\dot{q}\sin q = 0. \end{array}$$

L'énergie mécanique du pendule reste donc bien constante, ce qui est cohérent avec le fait que le pendule sans frottement est un système conservatif.