Déplacement sur un plan horizontal d'un point matériel soumis à l'action d'un ressort

Un point matériel noté M, de masse m, est susceptible de se déplacer sans frottement sur un plan matériel horizontal auquel est lié un référentiel galiléen noté $\mathscr{R}_0$ auquel on associe le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{C}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ tel que C est un point du plan matériel et $\vec{k}$ est un vecteur unitaire normal au plan, vertical ascendant. Le point M est alors repéré par ses coordonnées cartésiennes par rapport à $\mathscr{R}_0$:

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

On suppose qu'il règne en tout point de l'espace un champ de pesanteur, uniforme et indépendant du temps $\vec{g}$, défini par :

$$\vec{g} = -\,g\,\vec{k}$$

Le point M est lié à une des extrémités d'un ressort de masse considérée comme négligeable devant celle du point matériel, de constante de raideur k et de longueur à vide L. L'autre extrémité du ressort est un point fixe O situé au dessus du plan matériel, à la verticale de C, à la distance h. Dans tout le problème, on supposera que $h > L$.

Partie A – Équilibre du point matériel

On suppose, dans cette partie, que le point matériel est immobile par rapport au plan matériel.

1. Que peut-on dire de la dépendance temporelle des variables x et y ?
2. En déduire la vitesse de M par rapport à $\mathscr{R}_0$.
3. Montrer que la résultante des forces qui s'applique sur M est nulle.
4. Donner l'expression de cette résultante.
5. En déduire que l'existence de la position d'équilibre est sujette à une certaine condition que l'on exprimera.
6. Que se passe-t-il si cette dernière n'est pas remplie ?

Partie B – Déplacement du point matériel - Généralités

On suppose que le point matériel, à l'instant initial, est au point M_0 :

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}_0} = a\,\vec{i}$$

qui n'est pas à sa position d'équilibre et qu'il est lancé avec la vitesse initiale $\vec{v_0}$, dont la coordonnée selon $\vec{k}$ est nulle, perpendiculairement au vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{CM}_0}$:

$$\vec{v_0} = v_0\,\vec{j}$$

On suppose qu'à aucun moment le point M ne quitte le plan matériel.

1. Donner l'expression de la résultante cinétique de M dans son déplacement par rapport à $\mathscr{R}_0$.
2. Effectuer le bilan des forces qui agissent sur M et donner l'expression de sa résultante.
3. En déduire les équations différentielles satisfaites par les coordonnées de M. Quelle conclusion pouvez-vous faire quant à la résolution des celles-ci ?
4. Montrer que le moment résultant en C des forces qui s'appliquent sur le point matériel est nul. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le moment cinétique en C du point M dans son déplacement par rapport à $\mathscr{R}_0$? Donner alors sa valeur initiale que l'on pourra poser égale à K.
5. Montrer que la résultante des forces dérive d'une énergie potentielle E_p. On prendra l'origine de l'énergie potentielle en C. Quelle est sa valeur initiale que l'on pourra poser égale à E ?
6. Montrer alors une intégrale première du déplacement de M par rapport à $\mathscr{R}_0$ s'écrit :
$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\left\{\left(1-\frac{1}{u^2}\right)-\alpha^2\left[\left(u^2-1\right)-2\lambda\left(\sqrt{u^2+\beta^2}-\sqrt{1+\beta^2}\right)\right]\right\}$$
où u est la variable réduite $\frac{r}{a}$ (où r est la distance de M à C) ; α, β et λ sont des constantes dont on déterminera les expressions en fonction de L, h, m, k, a et v_0.
7. Discuter, en fonction de la valeur de v_0, de la nature des trajectoires possibles. Quelle limitation peut-on faire ?

Partie C – Déplacement du point matériel – Cas particulier

Nous allons nous intéresser à un cas particulier proche de l'expérience de la table à coussin d'air et nous utiliserons *Mathematica* pour résoudre les questions suivantes. Nous prendrons les données numériques suivantes :

$$\begin{cases} k=50\ \mathrm{Nm^{-1}} \\ m=0,5\ \mathrm{kg} \\ L=1,2\ \mathrm{m} \\ h=1,5\ \mathrm{m} \\ a=0,2\ \mathrm{m} \end{cases}$$

en ce qui concerne la vitesse initiale, nous prendrons :

$$v_0=0,5\ \mathrm{ms^{-1}},\ 0,91\ \mathrm{ms^{-1}}\ \text{et}\ 2\ \mathrm{ms^{-1}}$$

1. Résoudre numériquement les équations différentielles satisfaites par x et y. On prendra un intervalle de $10\ \mathrm{s}$. Visualiser la trajectoire du mobile dans les trois

cas.

2. Déterminer l'hodographe([1]) du mouvement et visualiser celui-ci.
3. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Vérifier sa constance au cours du temps.
4. Déterminer la vitesse initiale pour laquelle la trajectoire est un cercle. Vérifier que la trajectoire est bien circulaire ainsi que l'hodographe.

Nota : Pour les plus expérimentés, on pourra utiliser la fonction **`Manipulate`** et faire varier certains paramètres comme par exemple, la longueur à vide du ressort, la masse du mobile et la vitesse initiale.

[1] Trajectoire de l'extrémité du vecteur vitesse