Condensed Matter Physics : Philip L. Taylor Olle Heinonen

Chapitre 2, Problème 2.9

Voici la transcription du problème :

The theory of the dielectric constant of the electron gas can be generalized to include the responses to applied fields that vary with time. If a potential $U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ is applied then scattering of an electron occurs by absorption of a photon of energy $\hbar\omega$, and the energy denominator of Éq. (2.7.6) is modified to give :

$$\epsilon(q,\omega) = 1 - V_{\mathbf{q}} \sum_{p'} \frac{n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\omega} \tag{1}$$

Show that for vanishingly small q, the dielectric constant itself vanishes when ω is the plasma frequency.

J'ajoute ici l'expression de l'équation 2.7.6 :

$$\epsilon(q,\omega) = 1 - V_{\mathbf{q}} \sum_{p'} \frac{n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}} \tag{2}$$

Et l'expression du potentiel :

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} \tag{3}$$

où Ω est le volume de la sphère de Fermi. (page 43 du bouquin) et l'énergie :

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\hbar^2 p^2}{2m} \tag{4}$$

Voici ma réflexion :

Dans l'équation 1 le dénominateur peut se réduire immédiatement : Puisque $\hbar\omega$ est une constante (ω est une fréquence imposée de l'extérieur du système) alors

$$\lim_{q\to 0} (\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\omega) = \hbar\omega \tag{5}$$

L'équation 1 devient :

$$\begin{aligned} \epsilon(q,\omega) &= 1 - \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} \sum_{p'} \frac{n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'}}{\hbar\omega} && (6) \\ &= 1 - \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} \frac{1}{\hbar\omega} \sum_{p'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'} && (7) \end{aligned}$$

Lorsque la fréquence externe est la fréquence plasma

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}} \tag{8}$$

et que $q \to 0$, la constante diélectrique tend vers 0. Ici, ρ_0 est la densité moyenne de particules dans le système. Nous avons donc (attention : $p \neq \mathbf{p}'$) :

$$\begin{aligned}
\epsilon(q,\omega_p) &= 1 - \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\frac{1}{\hbar\omega_p}\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'} && (9)\\
&= 1 - \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{4\pi e^2\rho_0}}\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'} && (10)\\
&= 1 - \frac{1}{\Omega\hbar}\sqrt{\frac{4\pi m e^2}{\rho_0}}\frac{1}{q^2}\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'} && (11)\\
&= 0 && (12)
\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que :

$$\frac{1}{\Omega\hbar}\sqrt{\frac{4\pi m e^2}{\rho_0}}\frac{1}{q^2}\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'} = 1 \tag{13}$$

La somme sur les $n_{\mathbf{p}'}$ représente la somme sur tout les états occupés dans la sphère de Fermi. On peut donc changer la somme pour une intégrale sur tout le volume de la sphère de Fermi :

$$\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'} \longrightarrow \int_{\text{sphere}} \mathrm{d}\mathbf{k} = 4\pi\int_0^{k_F} k^2 \mathrm{d}k \tag{14}$$

La question est comment calculer $\sum_{\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}'}$. On peut l'interpréter comme deux sphères de rayon k_F dont les centres sont séparés par un vecteur $\mathbf{q}$. Si $\mathbf{q} \to 0$ les deux sphères sont presque superposées la différence représente une mince coquille à la surface d'une sphère : $4\pi k_F^2 q$. Il me semble que c'est le résultat que je devrais obtenir, et pas $4\pi q^2 dq$ comme indiqué à la page 55 du livre.

Je ne voit donc pas comment je peux simplifier l'équation 13. En principe Ω représente le volume de la sphère de Fermi donc $\frac{4\pi}{3}k_F^3$. De même, que vaut exactement ρ_0 ?

Merci