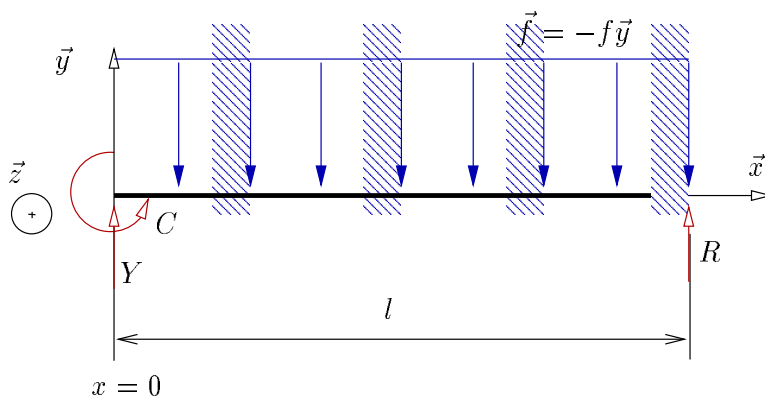




Exercice n°1 _ Méthodes énergétiques

1)



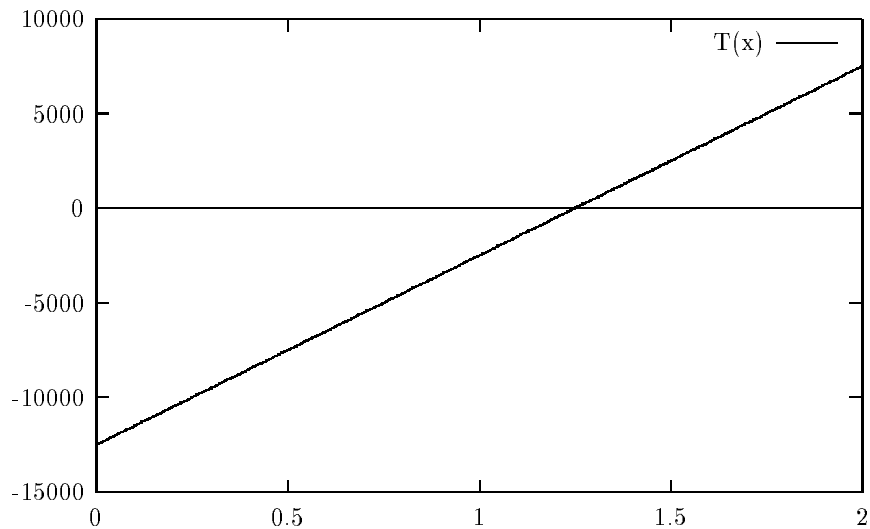
Choix d'inconnue hyperstatique : R .

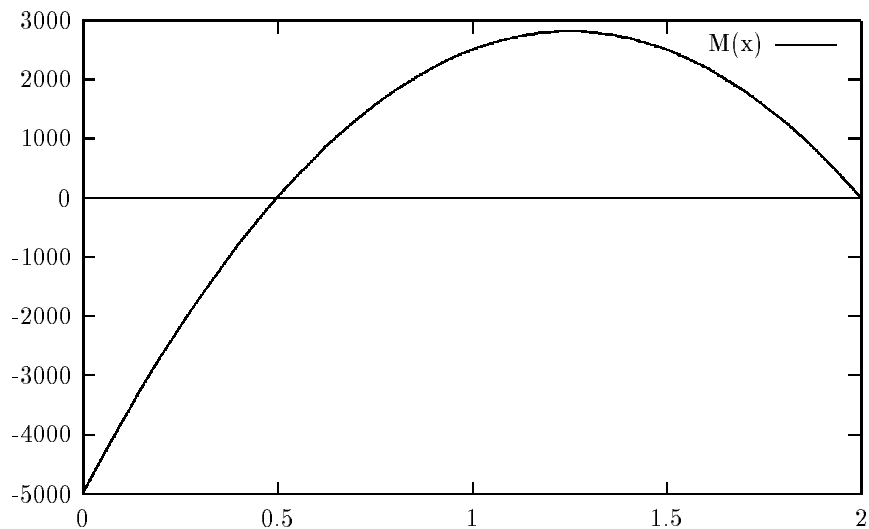
$$Y = fl - R \quad C = \frac{1}{2}fl^2 - Rl$$

$$R/ : \frac{\partial E_d}{\partial R} = 0 \quad \text{avec} \quad E_d = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(x) dx \quad \text{où} \quad M(x) = R(l-x) - \frac{f}{2}(l-x)^2$$

$$\dots \Rightarrow R = \frac{3}{8}fl \Rightarrow Y = \frac{5}{8}fl \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{8}fl^2$$

$$T(x) = f(x - \frac{5}{8}l) \quad \text{et} \quad M(x) = \frac{3}{8}fl(l-x) - \frac{f}{2}(l-x)^2$$





2)

$$T\left(\frac{5}{8}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M'\left(\frac{5}{8}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{5}{8}l\right) = \frac{9}{16} \frac{fl^2}{8} \quad \text{et} \quad M(0) = -\frac{fl^2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad |M(0)| > M\left(\frac{5}{8}l\right)$$

3)

$$\sigma = \frac{|M(0)|}{I} \frac{h}{2} \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 625 \text{ MPa}$$

4)

$$x \in [0; a] : T(x) = R - f(l-x) - P \quad \text{et} \quad M(x) = R(l-x) - \frac{f}{2}(l-x)^2 - P(a-x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = (x-a)$$

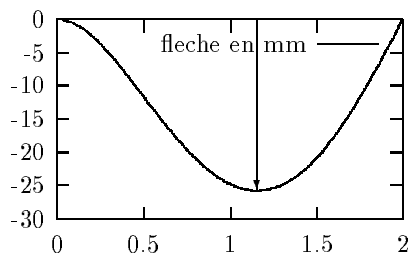
$$x \in [a; l] : T(x) = R - f(l-x) \quad \text{et} \quad M(x) = R(l-x) - \frac{f}{2}(l-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P} = 0$$

5)

$$v(a) = \left(\frac{\partial E_d}{\partial P} \right)_{P=0} \quad \Rightarrow \quad EIv(a) = \int_0^a M(x)[x-a]dx = \dots = \frac{fa^2}{48}(2a^2 - 5la + 3l^2)$$

6) $v(a)$ Maxi lorsque $g(a) = a^2(2a^2 - 5la + 3l^2)$ Maxi.

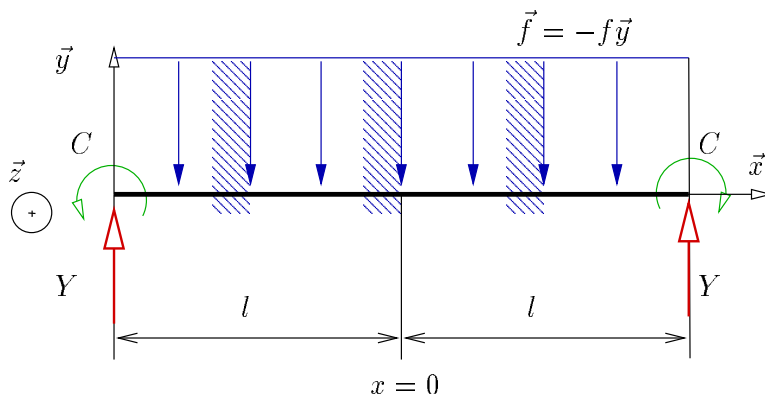
$g'(a) = 0$ sur $[0 : l]$ pour $a = 0$ et $a = \frac{15-\sqrt{33}}{16}l \approx 1.157 \text{ m}$.



$$v(1.157 \text{ m}) = -25.79 \text{ mm}$$



1)



En isolant toute la poutre, le P.F.S. donne $Y = fl = 12000$ N. Il reste 1 inconnue hyperstatique C qui possède la valeur qui minimisera pas l'énergie de déformation E_d .

$$E_d = 2 \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(x) dx \quad \text{où} \quad M(x) = Y(l-x) - C - \frac{f}{2}(l-x)^2 \quad \text{pour} \quad x \in [0 : l]$$

$$C / : \frac{\partial E_d}{\partial C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3} fl^2 = 4800 \text{ N.m} \dots \dots \dots [2]$$

$$T(x) = fx \quad \text{et} \quad M(x) = \frac{1}{6} f(l^2 - 3x^2) \quad \text{pour} \quad x \in [0 : l] \quad \text{avec graphes} \dots \dots \dots [1.5]$$

Rem : La valeur de Y ne minimise pas l'énergie de déformation E_d car elle est fournie pas le P.F.S. . On utilise Ménabrea uniquement pour déterminer les inconnues hyperstatiques. Le premier travail à effectuer sur un problème de poutre, de treillis ou de portique est d'écrire le P.F.S. sur toute la structure...

2)

$$M(0) = \frac{fl^2}{6} < |M(l)| = \frac{fl^2}{3} \quad \text{d'où la contrainte de tension (traction-compression) maxi :}$$

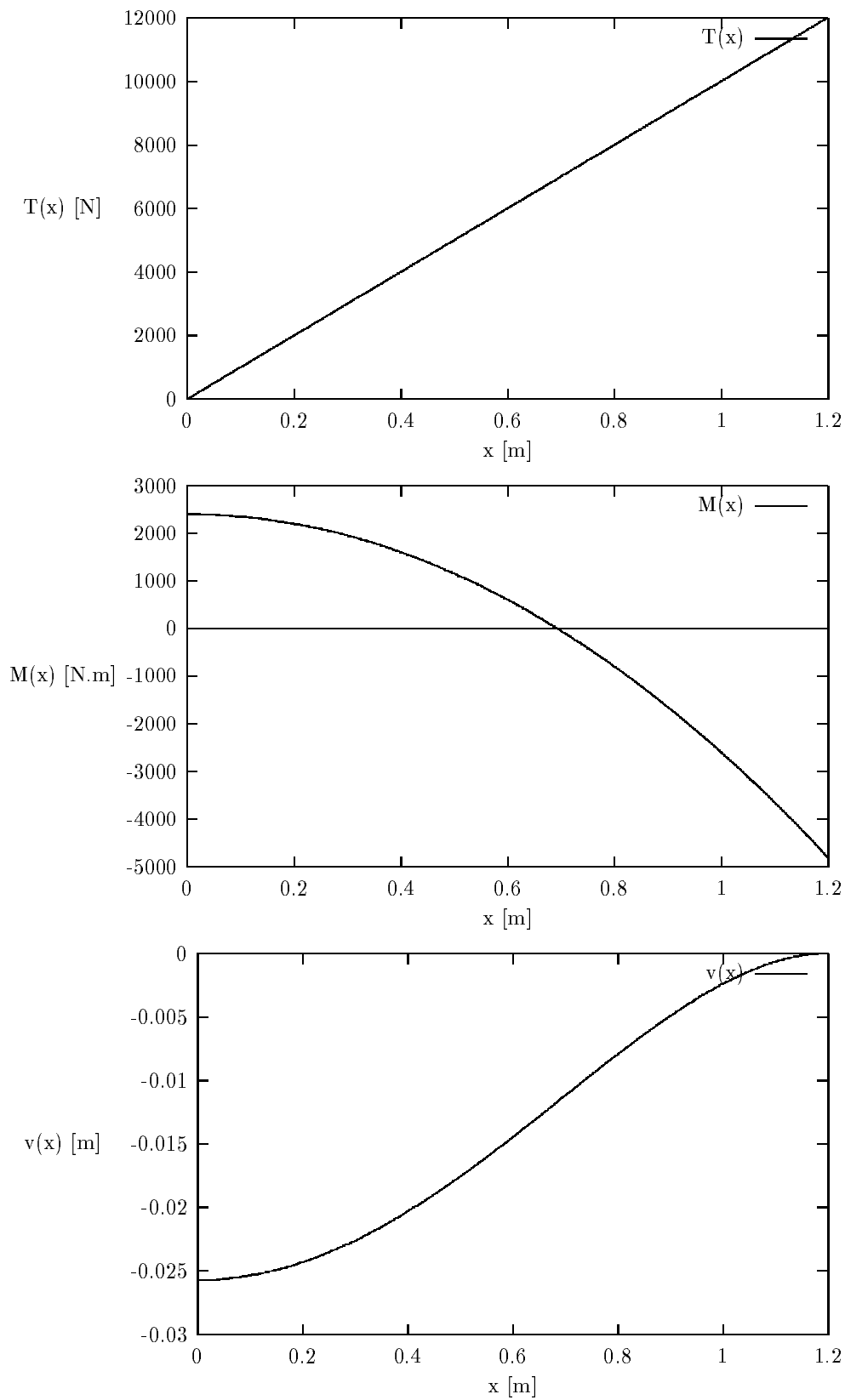
$$\sigma = \frac{|M(l)|}{I} \frac{h}{2} \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2fl^2}{bh^2} = 300 \text{ MPa} \dots \dots \dots [1]$$

3)

$$E_{df} = 2 \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(x) dx = \dots = \frac{f^2 l^5}{45EI} = 164 \text{ J} \dots \dots \dots [1.5]$$

4)

$$E_{dc} = 2 \frac{1}{2GS} \int_0^l T^2(x) dx = \dots = \frac{f^2 l^3}{3GS} = 0.6 \text{ J} \dots \dots \dots [1.5]$$



Rem: $T(x) > 0 \implies M'(x) < 0 \implies M(x)$ fonction décroissante.

$M(x \approx 0.7 \text{ m}) = 0 \implies v''(x \approx 0.7 \text{ m}) = 0$ d'où le point d'inflexion sur la courbe $v(x)$.

5)

$$r = \frac{E_{dc}}{E_{df}} = \frac{15EI}{GSl^2} = \frac{5Eh^2}{4GSl^2} = 0.0036$$

$$E_{dc} = 10\% E_{df} \implies \frac{h}{l} = 0.175 \implies \frac{h}{2l} = \frac{1}{11.4} \approx \frac{1}{10}$$

$$\frac{h}{l} > 0.175 \implies E_{dc} > 10\% E_{df} \quad ; \quad \frac{h}{l} < 0.175 \implies E_{dc} < 10\% E_{df} \dots\dots\dots [1]$$

6)

$$EIv''(x) = M(x) = \frac{1}{6}f(l^2 - 3x^2)$$

$$\implies EIv'(x) = \frac{1}{6}f(l^2x - x^3) \quad \text{avec } v'(0) = v'(l) = 0$$

$$\implies v(x) = -\frac{f}{24EI}(x^2 - l^2)^2 \quad \text{avec } v(l) = 0 \implies v(0) = -\frac{fl^4}{24EI} \dots\dots\dots [1.5]$$

graphe \dots\dots\dots [0.5]

$$\vec{v}^{\mathcal{Q}'}(x) = v^{\mathcal{Q}}(x)\vec{y} \quad v^{\mathcal{Q}}(x) = \frac{F}{12EI}(3lx^2 - x^3 - 2l^3)$$

$$\vec{v}^{\mathcal{Q}'}(x) = v^{\mathcal{Q}'}(x)\vec{y} \quad v^{\mathcal{Q}'}(x) = \frac{F}{12EI}(6lx - 3x^2) \quad \text{pour } x \in [0 : l] \implies v^{\mathcal{Q}'}(l) = \frac{Fl^2}{4EI}$$

7) Maxwell-Betti : Afin d'utiliser correctement ce théorème, il faut dessiner les 2 structures l'une au dessous de l'autre en représentant toutes les actions extérieures (liaisons au sol comprises) !

$$-F\vec{y} \cdot v^{\mathcal{D}}(0)\vec{y} = 2 \int_0^l -f\vec{y} \cdot v^{\mathcal{Q}}(x)\vec{y}dx + 2(-C\vec{z}) \cdot v^{\mathcal{Q}'}(l)\vec{z}$$

$$\implies -Fv^{\mathcal{D}}(0) = -2f \int_0^l v^{\mathcal{Q}}(x)dx - 2Cv^{\mathcal{Q}'}(l) \dots\dots\dots [1]$$

$$\implies \dots \implies v^{\mathcal{D}}(0) = -\frac{fl^4}{24EI} = 25.7 \text{ mm} \dots\dots\dots [1 + 0.5]$$

Résultat précédemment obtenu.

Rem: Muller-Breslau ne s'applique que si les 2 poutres possèdent les mêmes conditions aux limites (en déplacement).

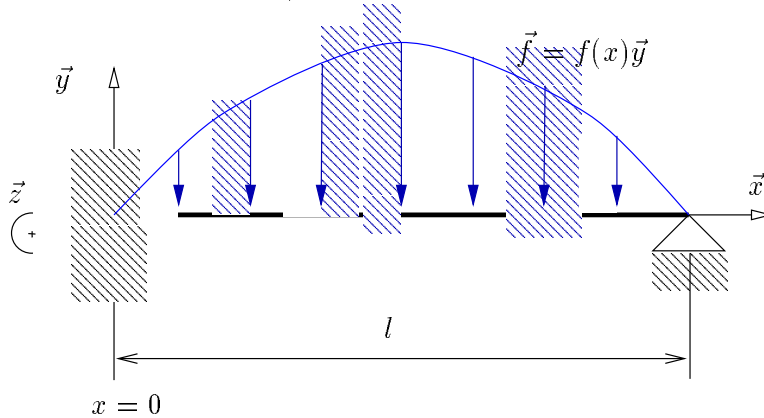
Rem: Dans la question 3), pour calculer l'énergie de déformation E_{df} , on pouvait calculer le travail des efforts extérieurs W_e connaissant le résultat de la question 6) :

$$E_{df} = W_e = 2 \int_0^l \frac{1}{2}(-f\vec{y}) \cdot (v(x)\vec{y}) dx = - \int_0^l f v(x) dx = \int_0^l f \frac{f}{24EI}(x^2 - l^2)^2 dx = \dots = \frac{f^2 l^5}{45EI}$$

Rem: Les graphes $T(x)$, $M(x)$ et $v(x)$ se font, dans cet ordre, sous le dessin de la poutre soumis à ces efforts extérieurs. Ces graphes doivent vérifier : $M'(x) = -T(x)$ et $EIv''(x) = M(x)$. Entre autres, les points d'inflexion de la déformée sont tels que : $v'' = 0 \implies M = 0$.



Considérons une poutre, de longueur l , de section droite constante, encastree en $x = 0$ et simplement appuyée (liaison ponctuelle sans frottement) en $x = l$.



Elle subit la force répartie linéique $\vec{f}$ sur toute sa longueur.

$$\vec{f} = f(x)\vec{y} \quad \text{avec} \quad f(x) = ax(x-l)$$

On donne : $a = 6000 \text{ N.m}^{-3}$ et $l = 1 \text{ m}$.

Vous effectuerez les calculs analytiques avec les notations a et l .

Elle est constitué d'un matériau homogène, isotrope, élastique et linéaire.

- 1) Calculer analytiquement puis numériquement la force globale exercée par cette force répartie linéique $\vec{f}$ sur toute la longueur de la poutre.

Vous négligerez l'effet du cisaillement devant celui de la flexion.

Vous noterez $R\vec{y}$ la force exercée par l'appui simple sur la poutre.

- 2) Calculer analytiquement le moment fléchissant $M(x)$ en un point courant de la poutre.
- 3) Par une méthode énergétique (dont vous préciserez le nom), déterminer l'expression de R .
Calculer numériquement R .



- 1) La force globale exercée par cette force répartie linéique est :

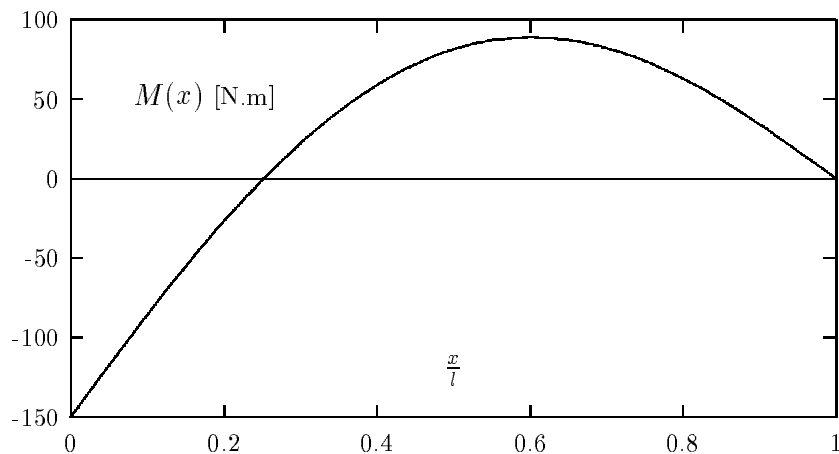
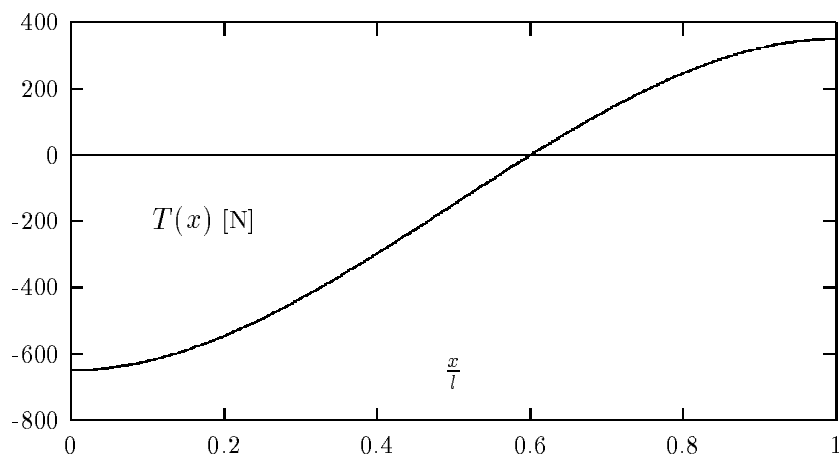
$$\vec{F} = \int_0^l \vec{f} dx = \int_0^l f(x) \vec{y} dx = \int_0^l ax(x-l) \vec{y} dx = a \left(\int_0^l (x^2 - lx) dx \right) \vec{y} = -\frac{al^3}{6} \vec{y}$$
$$\|\vec{F}\| = 1000 N$$

- 2)

$$M(x) = \frac{a}{12} (x^4 - 2lx^3 + 2l^3x - l^4) + R(l-x)$$

- 3) Théorème de Ménabréa : R sera tel que $\frac{\partial E_d}{\partial R} = 0$ ce qui aboutit à :

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \left(\frac{a}{12} (x^4 - 2lx^3 + 2l^3x - l^4) + R(l-x) \right) (l-x) dx = 0$$
$$\Rightarrow R = \frac{7}{120} al^3 = 350 \text{ N}$$





Considérons un portique plan constitué de 2 poutres identiques, de module d'Young E , de longueur L , de section droite constante (aire S et moment quadratique I suivant $\bar{z}$), encastré et soumis à une force répartie linéique f comme indiqué sur la figure FIG. 1.

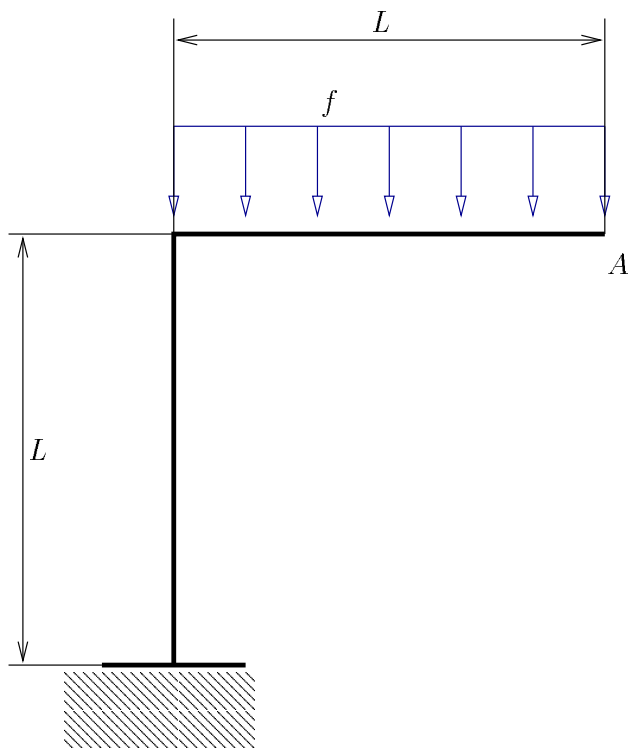


FIG. 1 – Schématisation du portique plan.

On donne :

$f = 1000 \text{ N.m}^{-1}$	$E = 210 \text{ GPa}$	$S = 10^{-4} \text{ m}^2$	$I = 3.10^{-9} \text{ m}^4$	$L = 0.5 \text{ m}$
-----------------------------	-----------------------	---------------------------	-----------------------------	---------------------

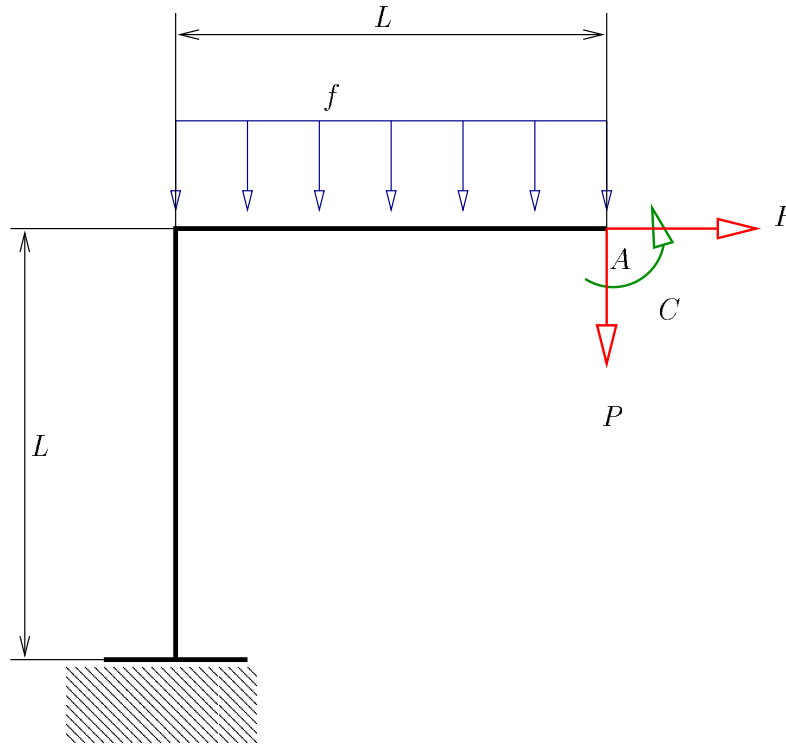
Vous négligerez l'énergie de déformation de cisaillement.

Calculer analytiquement puis numériquement le déplacement et la rotation de section droite du point A situé à l'extrémité du portique.

Peut-on négliger une autre énergie de déformation ? Si oui, laquelle ?



Afin de déterminer les déplacements et la rotation de section droite au point A , il faut y appliquer des forces et moment fictif : F , P et C . Pour le calcul de la rotation, il est inutile de voir apparaître dans les calculs F et P . Pour le calcul du déplacements horizontal, il est inutile de voir apparaître dans les calculs C et P . Pour le calcul du déplacements vertical, il est inutile de voir apparaître dans les calculs C et F .



Déterminons les efforts intérieurs à chacune des poutres (horizontale : 1 et verticale : 2).

$$\begin{aligned} N_1 &= F & ; & & M_1(x) &= C - P(L - x) - \frac{f}{2}(L - x)^2 \\ N_2 &= -(P + fL) & ; & & M_2(x) &= C - PL - \frac{f}{2}L^2 - F(L - x) \end{aligned}$$

L'énergie de déformation de toute la structure est :

$$E_d = \frac{1}{2EI} \int_0^L M_1^2(x) dx + \frac{1}{2ES} \int_0^L N_1^2(x) dx + \frac{1}{2EI} \int_0^L M_2^2(x) dx + \frac{1}{2ES} \int_0^L N_2^2(x) dx$$

Les déplacements et la rotation seront déterminés par Castigliano :

$$u = \frac{\partial E_d}{\partial F} \quad v = \frac{\partial E_d}{\partial P} \quad \omega = \frac{\partial E_d}{\partial C} \quad \text{où } F = P = 0 \text{ et } C = 0$$

★

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_1 \frac{\partial N_1}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_2 \frac{\partial N_2}{\partial P} dx$$

où

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = -(L-x) \quad \frac{\partial N_1}{\partial P} = 0 \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = -L \quad \frac{\partial N_2}{\partial P} = -1$$

A partir d'ici mes efforts fictifs n'interviennent plus :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{EI} \int_0^L [C - \frac{f}{2}(L-x)^2](x-L) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{f}{2} L^2 L dx + \frac{1}{ES} \int_0^L f L dx \\ &= \frac{fL^4}{8EI} + \frac{fL^4}{2EI} + \frac{fL^2}{ES} \\ &= \frac{fL^2}{E} \left[\frac{L^2}{8I} + \frac{L^2}{2I} + \frac{1}{S} \right] \approx 62 \text{ mm} \quad \frac{1}{S} \ll \frac{L^2}{8I} \end{aligned}$$

Le premier terme provient de la flexion de la poutre horizontale, le second de la flexion de la poutre verticale et le troisième de la compression de la poutre verticale.

★

$$u = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_1 \frac{\partial N_1}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_2 \frac{\partial N_2}{\partial F} dx$$

où

$$\frac{\partial M_1}{\partial F} = 0 \quad \frac{\partial N_1}{\partial F} = 1 \quad \frac{\partial M_2}{\partial F} = -(L-x) \quad \frac{\partial N_2}{\partial F} = 0$$

A partir d'ici mes efforts fictifs n'interviennent plus :

$$u = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{f}{2} L^2 (L-x) dx = \dots = \frac{fL^4}{4EI} \approx 25 \text{ mm}$$

Ce terme provient de la flexion de la poutre verticale.

★

$$\omega = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial C} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_1 \frac{\partial N_1}{\partial C} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial C} dx + \frac{1}{ES} \int_0^L N_2 \frac{\partial N_2}{\partial C} dx$$

où

$$\frac{\partial M_1}{\partial C} = 1 \quad \frac{\partial N_1}{\partial C} = 0 \quad \frac{\partial M_2}{\partial C} = 1 \quad \frac{\partial N_2}{\partial C} = 0$$

A partir d'ici mes efforts fictifs n'interviennent plus :

$$\omega = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 - \frac{f}{2}(L-x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^L -\frac{f}{2} L^2 dx = \dots = -\frac{fL^3}{6EI} - \frac{fL^3}{2EI} \approx -0.13 \text{ rd} \approx 7.5^\circ$$

Le premier terme provient de la flexion de la poutre horizontale et le second de la flexion de la poutre verticale.

Les déplacements s'effectuent dans le même que les 2 forces alors que la rotation s'effectue en sens opposé au couple fictif (du fait du signe -).

Les applications numériques prouvent que l'on peut négliger l'effet de compression dans la poutre verticale.

Considérons une poutre courbe constituée par un demi cercle de centre O et de rayon R ,

- de module d'Young E ,
- de section droite constante :
 - ★ aire S ,
 - ★ aire corrigée $S' = kS$,
 - ★ moment quadratique I suivant $\vec{k}$,

encastrée d'une part et en liaison glissière sans frottement d'autre part et soumis à une force $F\vec{i}$ comme indiqué sur la figure FIG. 1 (le problème est plan).

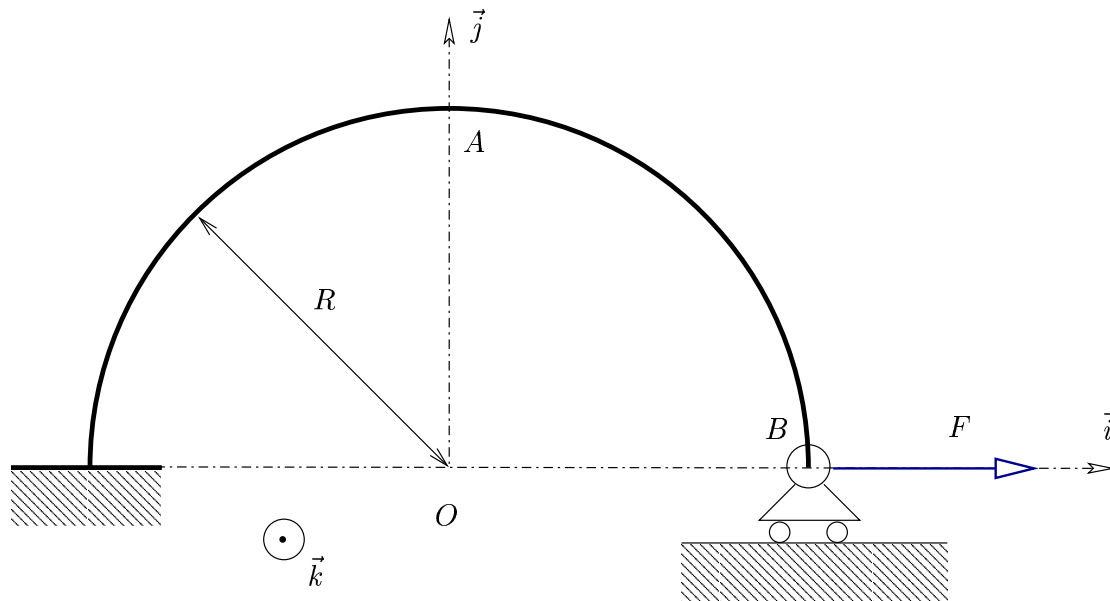


FIG. 1 – Schématisation du problème plan.

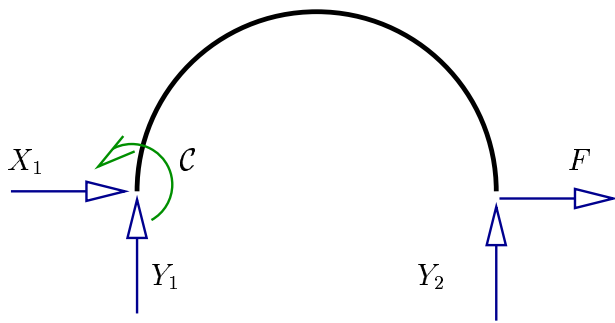
$F = 50 \text{ N}$	$E = 210 \text{ GPa}$	$G = 80 \text{ GPa}$	$S = 10^{-4} \text{ m}^2$	$k = 0.9$	$I = 10^{-9} \text{ m}^4$	$R = 0.4 \text{ m}$
--------------------	-----------------------	----------------------	---------------------------	-----------	---------------------------	---------------------

Calculer analytiquement puis numériquement :

- le déplacement suivant $\vec{i}$ du point B (point d'application de la force $F\vec{i}$) positionné par $\vec{OB} = R\vec{i}$;
- et le déplacement suivant $\vec{j}$ du point A positionné par $\vec{OA} = R\vec{j}$

Représenter l'allure de la déformée.

Peut-on négliger certaines énergies de déformation ? Si oui, lesquelles ?



$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = 0 \\ X_1 + F = 0 \\ C + 2RY_2 = 0 \end{cases}$$

soient 3 équations à 4 inconnues :
problème hyperstatique d'ordre 1.
Choix d'une inconnue hyperstatique :
 Y_2 (par ex.).

FIG. 1 – Isolons toute la poutre.

Première partie

Le théorème de Castigliano-Ménabréa donne : $\frac{\partial E_d}{\partial Y_2} = v_B = 0$ (contact bilatéral, liaison glissière bilatérale) où :

$$E_d = \frac{1}{2EI} \int_0^\pi M^2 R d\theta + \frac{1}{2ES} \int_0^\pi N^2 R d\theta + \frac{1}{2GS'} \int_0^\pi T^2 R d\theta$$

donc :

$$\frac{\partial E_d}{\partial Y_2} = \frac{R}{EI} \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial Y_2} d\theta + \frac{R}{ES} \int_0^\pi N \frac{\partial N}{\partial Y_2} d\theta + \frac{R}{GS'} \int_0^\pi T \frac{\partial T}{\partial Y_2} d\theta$$

Déterminons les efforts intérieurs en fonction de Y_2 .

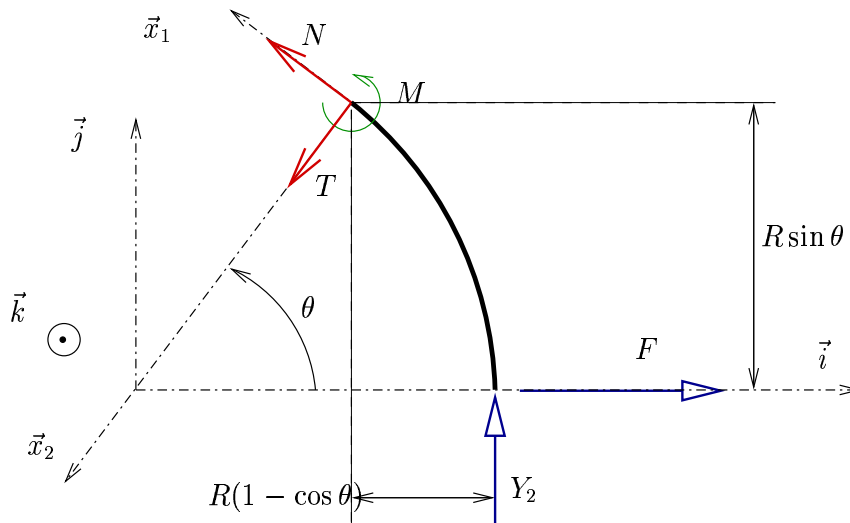


FIG. 2 – Isolons cette portion de poutre.

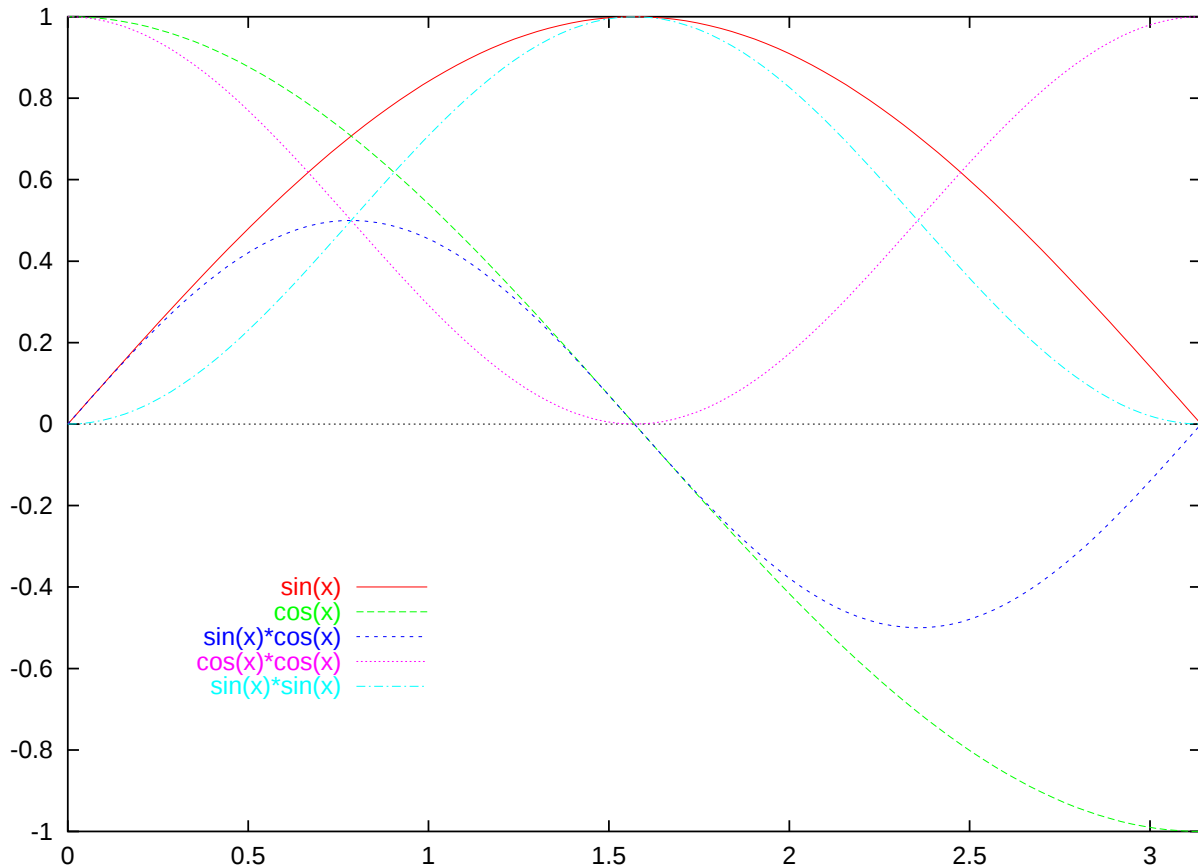
Après projection des équations du **P.F.S.** :

$$\begin{cases} N = F \sin \theta - Y_2 \cos \theta & \implies \frac{\partial N}{\partial Y_2} = -\cos \theta \\ T = F \cos \theta + Y_2 \sin \theta & \implies \frac{\partial T}{\partial Y_2} = \sin \theta \\ M = R[Y_2(\cos \theta - 1) - F \sin \theta] & \implies \frac{\partial M}{\partial Y_2} = R(\cos \theta - 1) \end{cases}$$

$\frac{\partial E_d}{\partial Y_2} = v_B = 0$ devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{EI} \int_0^\pi [Y_2(\cos \theta - 1) - F \sin \theta](\cos \theta - 1) d\theta & - \frac{1}{ES} \int_0^\pi (F \sin \theta - Y_2 \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ & \dots + \frac{1}{GS'} \int_0^\pi (F \cos \theta + Y_2 \sin \theta) \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

On a besoin d'effectuer quelques intégrales. Pour simplifier, visualisons les fonctions à intégrer :



On calcule :

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \dots = \frac{\pi}{2}$$

et on a directement :

$$\int_0^\pi \cos \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{EI} \left[Y_2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + \pi \right) - F(0 - 2) \right] - \frac{1}{ES} \left(F \cdot 0 - Y_2 \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{GS'} \left(F \cdot 0 + Y_2 \frac{\pi}{2} \right) &= 0 \\ \frac{R^2}{EI} \left[\frac{3\pi}{2} Y_2 + 2F \right] + \left(\frac{1}{GS'} + \frac{1}{ES} \right) \frac{\pi}{2} Y_2 &= 0 \end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que :

$$\frac{1}{GS'} + \frac{1}{ES} \approx 1.8 \cdot 10^{-7} \ll \frac{3R^2}{EI} \approx 2.3 \cdot 10^{-3} \text{U.S.I.}$$

Les énergies de déformation de tension et de cisaillement sont donc négligeables par rapport à celle de flexion et :

$$Y_2 \approx -\frac{4F}{3\pi} = -21.2 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = -2RY_2 = 16.98 \text{ N.m}$$

Deuxième partie

Le déplacement horizontal du point B se calcule par : $u_B = \frac{\partial E_d}{\partial F}$ où l'on ne considèrera ici que l'énergie de déformation de flexion vu les applications numériques précédentes.

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{R}{EI} \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial F} d\theta \\ \Rightarrow \frac{EI}{R} u_B &= \int_0^\pi R[Y_2(\cos \theta - 1) - F \sin \theta] [-R \sin \theta] d\theta \\ \Rightarrow \frac{EI}{R^3} u_B &= -\left[Y_2(0 - 2) - F \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad u_B = \frac{R^3}{EI} \left[2Y_2 + F \frac{\pi}{2}\right] \approx 11.0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Troisième partie

Afin de déterminer le déplacement vertical du point A , il faut y appliquer une force fictive : Q et l'on aura : $v_A = \frac{\partial E_d}{\partial Q}$ avec $Q = 0$.

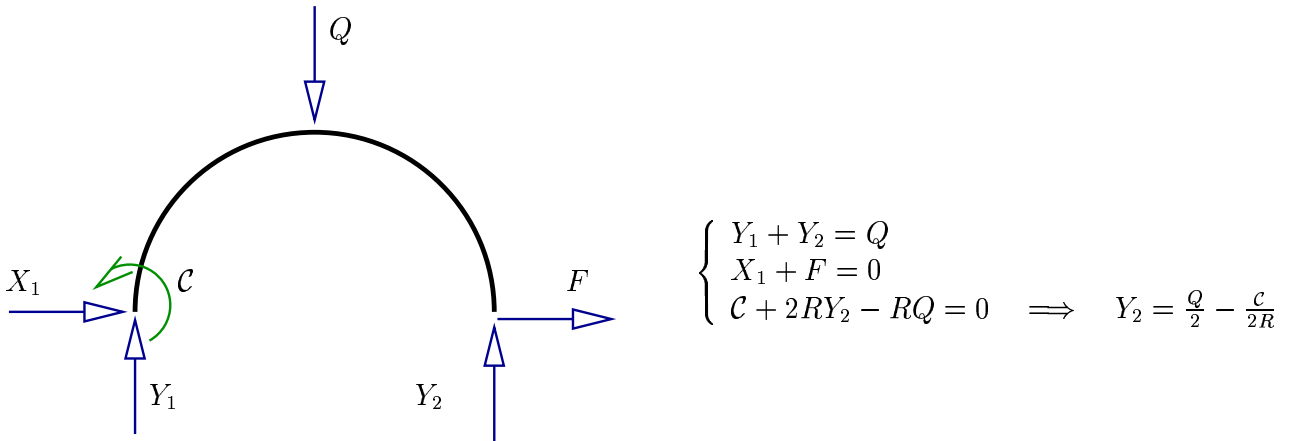


FIG. 3 – Isolons toute la poutre.

Déterminons alors les efforts intérieurs en fonction de Q qui n'auront pas la même expression suivant la plage de variation de θ .

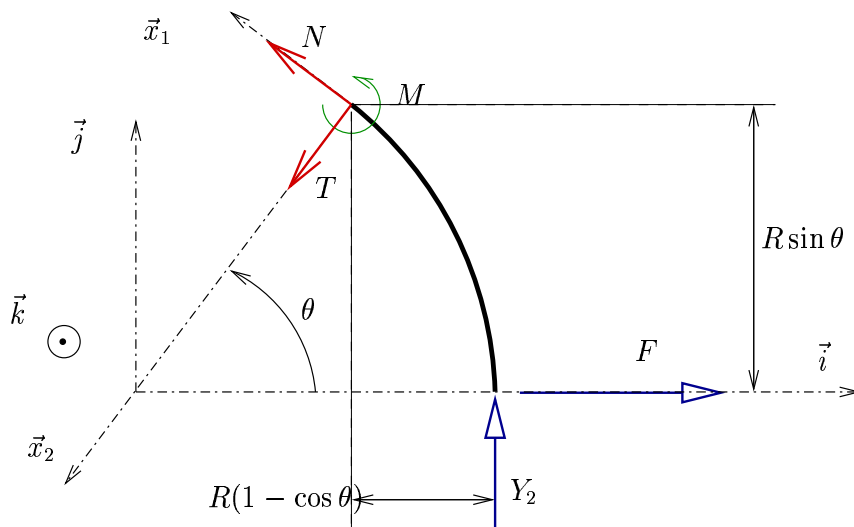


FIG. 4 – Isolons cette portion de poutre : $\theta \in [0 : \frac{\pi}{2}]$.

L'équation du moment du **P.F.S.** donne :

$$M = R[Y_2(\cos \theta - 1) - F \sin \theta] = \left[R\frac{Q}{2} - \frac{C}{2} \right] (\cos \theta - 1) - RF \sin \theta \implies \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{R}{2}(\cos \theta - 1)$$

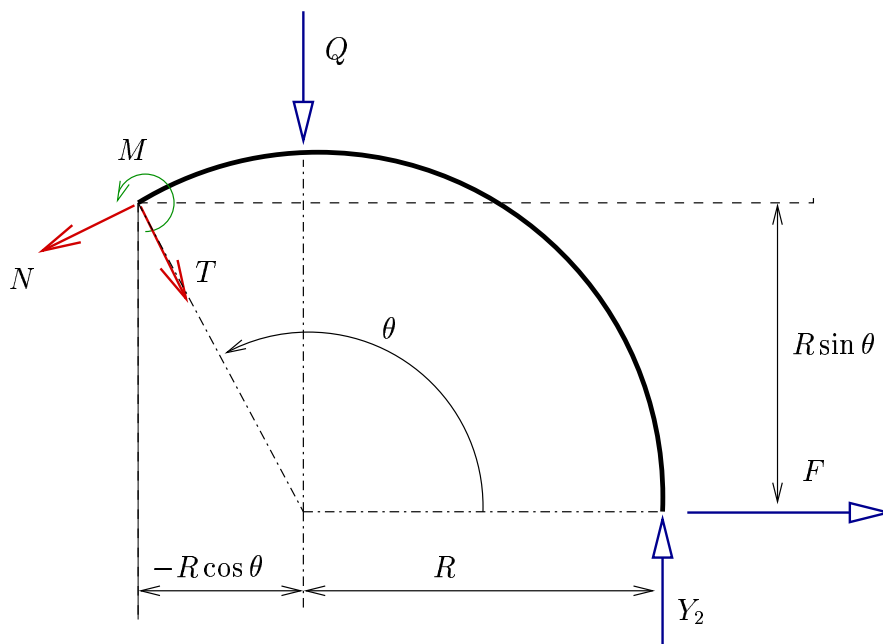


FIG. 5 – Isolons cette portion de poutre : $\theta \in [\frac{\pi}{2} : \pi]$.

L'équation du moment du **P.F.S.** donne :

$$M = \left[R\frac{Q}{2} - \frac{C}{2} \right] (\cos \theta - 1) - RF \sin \theta - QR \cos \theta \implies \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{R}{2}(\cos \theta - 1) - R \cos \theta$$

On calcule alors le déplacement en ordonnant le plus simplement possible les intégrales :

$$v_A = \frac{\partial E_d}{\partial Q} = \frac{R}{EI} \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial Q} d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{R} v_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial Q} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi M \frac{\partial M}{\partial Q} d\theta$$

et en sachant que la charge est fictive $Q = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{EI}{R} v_A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{C}{2}(\cos \theta - 1) - RF \sin \theta \right) \frac{R}{2}(\cos \theta - 1) d\theta \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(-\frac{C}{2}(\cos \theta - 1) - RF \sin \theta \right) \left(\frac{R}{2}(\cos \theta - 1) - R \cos \theta \right) d\theta \\ \Rightarrow \quad \frac{EI}{R^2} v_A &= \int_0^\pi \left(-\frac{C}{2}(\cos \theta - 1) - RF \sin \theta \right) \frac{1}{2}(\cos \theta - 1) d\theta \\ &\quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(-\frac{C}{2}(\cos \theta - 1) - RF \sin \theta \right) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

On a alors besoin d'effectuer quelques intégrales (éventuellement graphiquement) :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \theta d\theta = -1 \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2}$$

et l'on a alors :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{EI}{R^2} v_A &= \frac{1}{2} \left(-\frac{C}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) - RF(0 - 2) \right) - \left(-\frac{C}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) + \frac{1}{2} RF \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{EI}{R^2} v_A &= C \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} RF \\ \Rightarrow \quad v_A &= \frac{R^2}{2EI} \left[C \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + RF \right] \approx 3.92 \text{ mm} \end{aligned}$$