Examen de théorie des plaques et plasticité

Mardi 06 septembre 2005 - Durée : 2h00
seul le formulaire plaques est autorisé

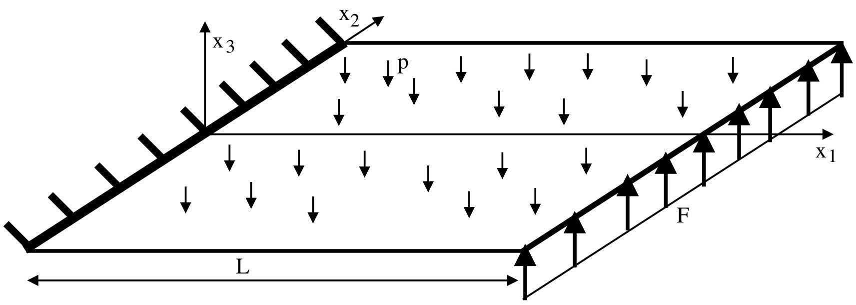
Exercice 1 *Critères de limite élastique.*

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce chargée, on relève l'état de contrainte suivant : $\sigma_{xx} = 200MPa$, $\sigma_{yy} = -150MPa$, $\sigma_{zz} = 200MPa$, $\sigma_{xy} = 100MPa$, $\sigma_{xz} = 0MPa$ et $\sigma_{yz} = 0MPa$. La limite élastique est identifiée sur la courbe de traction et vaut $\sigma_0 = 250MPa$.

1. Déterminer les expressions analytiques des contraintes principales. Pour les valeurs données, comparer les contraintes principales à la limite élastique.
2. Sur quelle hypothèse est basé le critère de Tresca ? Appliquer ce critère à l'état de contrainte étudié.
3. Sur quelle hypothèse est basé le critère de Von Mises ? Appliquer ce critère à l'état de contrainte étudié.

Exercice 2 *Plaque semi-infinie encastrée en flexion.*

On considère une plaque semi-infinie dans la direction 2 et encastrée en $x_1 = 0$. Le bord situé en $x_1 = L$ est soumis à une densité linéique d'efforts $F\vec{e}_3$. La plaque est soumise à une pression $-p\vec{e}_3$ comme indiqué sur la figure. On considère que la plaque obéït aux hypothèses de Love-Kirchhoff.



1. Quelle hypothèse le caractère semi infini de la plaque suggère-t-il de faire ?
2. En écrivant l'équation d'équilibre en déplacement, donner la forme du champs de déplacement. En déduire la forme du tenseur des courbures et du tenseur des moments.
3. En écrivant les conditions aux limites, déterminer complètement le champs de déplacement et les efforts intérieurs.
4. En déduire les réactions dans l'encastrement.

Eléments de correction 1 *Critère de limite élastique.*

1. Contraintes principales

$$\sigma_I = \frac{1}{2}\Big\{(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+4\sigma_{xy}^2}\Big\}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{III} = \frac{1}{2}\Big\{(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+4\sigma_{xy}^2}\Big\}$$

   Pour les valeurs numériques données :

$$\sigma_I = -176.56MPa \qquad ; \qquad \sigma_{II} = 200.MPa \qquad ; \qquad \sigma_{III} = 226.56MPa$$

   Toutes les contraintes principales sont inférieures à la limite élastique en valeur absolue.

2. Critère de Tresca : critère sur le cisaillement maximal

$$\sigma_{Tresca} = \sigma_{III} - \sigma_I = 403.1MPa > \sigma_0$$

   Le critère de Tresca est violé.

3. Critère de Von Mises : critère énergétique sur le déviateur des contraintes.

$$\sigma_{VonMises} = \sqrt{\frac{1}{2}\big\{(\sigma_{II}-\sigma_I)^2 + (\sigma_{III}-\sigma_I)^2 + (\sigma_{III}-\sigma_{II})^2\big\}} = 390.51MPa > \sigma_0$$

   Le critère de Von Mises est lui aussi violé.

Eléments de correction 2 *Plaque semi-infinie en flexion (encastrée + effort).*

1. Le modèle étant semi-infini dans la direction x_2, la solution loin des bords situés à l'infini est indépendante de x_2 : $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$. Par ailleurs, la plaque étant sollicitée en flexion uniquement, le tenseur des moments et celui des déformations sont nuls en tout point de la plaque.
2. La plaque est soumise à une pression $-p\vec{e}_3$. L'équation d'équilire en déplacement $-\Delta\Delta y + p/D = 0$ donne :

$$-y_{,1111} = \frac{p}{D} \qquad \Rightarrow \qquad y(x_1) = \frac{-p}{D}\Big[a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \frac{x_1^4}{24}\Big] \qquad \text{avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

   Tenseur des courbures :

$$k_{\alpha\beta} = y_{,\alpha\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{k}} = \begin{pmatrix} y_{,11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-p}{D}\begin{pmatrix} 2a_2 + 6a_3x_1 + \frac{x_1^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Tenseur des moments : $M_{\alpha\beta} = D\big[\nu k_{\lambda\lambda}\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)k_{\alpha\beta}\big]$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} Dy_{,11} & 0 \\ 0 & \nu D y_{,11} \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} (2a_2 + 6a_3x_1 + \frac{x_1^2}{2}) & 0 \\ 0 & \nu(2a_2 + 6a_3x_1 + \frac{x_1^2}{2}) \end{pmatrix}$$

3. Les conditions aux limites sont :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ \vec{\omega}(0)=0 \\ Y(L)=F \\ \vec{Z}(L)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(0)=0 \\ -y_{,1}(0)=0 \\ M_{11,1}(L)+F=0 \\ M_{11}(L)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0=0 \\ a_1=0 \\ a_2=\dfrac{L^2}{4}-\dfrac{FL}{2p} \\ a_3=\dfrac{F}{6p}-\dfrac{L}{6} \end{array}\right.$$

La solution est donc :

$$y(x_1)=\frac{-(1-\nu^2)}{Eh^3}\left\{3(pL^2-2FL)x_1^2+2(F-pL)x_1^3+p\frac{x_1^4}{2}\right\}$$

et

$$\underline{\underline{k}}=\begin{pmatrix} \dfrac{-6(1-\nu^2)}{Eh^3}\left\{(pL^2-2FL)+2(F-pL)x_1+px_1^2\right\} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\underline{M}}=\frac{-1}{2}\left\{(pL^2-2FL)+2(F-pL)x_1+px_1^2\right\}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

4. La réaction dans les appuis est calculée par la relation $\vec{\mathrm{div}}\underline{\underline{M}}.\vec{\nu}+Y=0$ écrite en $x_1=0$ et $\vec{\nu}.\underline{\underline{M}}\vec{\nu}+\vec{Z}.\vec{\nu}=0$ $x_1=0$ qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} -M_{11,1}(x_1=0)+Y(0)=0 \\ M_{11}(x_1=0)+\vec{Z}(0)\vec{e}_1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Y(0)=pL-F \\ Z_1(0)=\dfrac{pL^2}{2}-FL \end{array}\right.$$