Equations de Lagrange
Justification de l'approche matricielle

L'objectif de ce document est de justifier l'écriture matricielle des équations de Lagrange à partir de l'expression matricielle des différentes énergies en présence dans un système.

On étudie un système Σ dont on suppose qu'il est paramétrable par un nombre n de paramètres que nous noterons q_i, rassemblés dans un vecteur q :

$$q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

A ce système, on associe les quantités suivantes :

- **E_C : énergie cinétique :** nous supposerons que la quantité **2**E_C (après une éventuelle linéarisation à l'ordre 2) est une expression dont les termes sont soit proportionnels à $\dot{q}_i^2$, soit proportionnels à $\dot{q}_i\dot{q}_j$, soit des constantes (= termes ne dépendant d'aucun paramètre).

notes :	**1.** ceci sera toujours vrai dans le cadre de MQ03 ; cela peut ne pas être suffisant pour des applications plus avancées (en particulier, E_C peut dépendre des q_i !) **2.** on peut dire alors que **$2E_C$** est une « *forme quadratique* » par rapport aux paramètres $\dot{q}_i$

Il est donc possible de réécrire $2E_C$ sous une forme matricielle : $2E_C = \dot{q}^t \mathbb{M} \dot{q} + C^{te}$

$\mathbb{M}$ est la matrice de masse du système ; elle est symétrique.

- **E_P : énergie potentielle :** quelle que soit son origine (énergie potentielle de pesanteur associées à $\vec{g}$, ou bien énergie potentielle élastique provenant des ressorts) nous supposerons que la quantité **2**E_P (après une éventuelle linéarisation à l'ordre 2) est une expression dont les termes sont soit proportionnels à q_i^2, soit proportionnels à q_iq_j, soit proportionnels à q_i, soit des constantes (= termes ne dépendant d'aucun paramètre).
De la même façon que pour l'énergie cinétique, il est donc possible de réécrire $2E_P$ sous une forme matricielle : $2E_P = q^t \mathbb{K} q - 2q^t F + C^{te}$

$\mathbb{K}$ est la matrice de raideur du système (elle est symétrique), et F un vecteur force.

Pour simplifier les choses, plaçons-nous dans le cas où le système étudié est non-amorti, n'est soumis à aucun autre chargement extérieur que la pesanteur, et supposons également que les liaisons sont parfaites (sans jeu ni frottement), donc à puissance nulle.

Sous ces hypothèses (certes simplificatrices, mais l'objectif de ce document n'est pas de faire de la mise en équations, mais de voir comment Lagrange s'applique sur un cas matriciel), l'écriture vectorielle des équations de Lagrange prend la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial q}+\frac{\partial E_P}{\partial q}=0$$

Noter que les différentes énergies sont dérivées par rapport à un vecteur (et non par rapport à un scalaire !).

Question : comment calcule-t-on ces dérivées vectorielles ?

➔ Regardons le premier terme $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right)$:

Petit rappel de mathématique : soit X et Y deux vecteurs, et $\mathbb{A}$ une matrice : alors :

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y^t \mathbb{A} X\right)=\mathbb{A}X$$

On a ici : $\frac{\partial(2E_C)}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}+C^{te}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{la constante}\\ \text{ne dépend}\\ \text{pas de } \dot{q}}}{=}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)$

On voit donc qu'il faut dériver par rapport à $\dot{q}$ une expression où $\dot{q}$ apparaît deux fois : une fois à droite, et une fois à gauche. Pour « visualiser » cela, notons en bleu et en rouge ces deux vecteurs (**ce n'est qu'un jeu de couleur :** qu'il soit écrit en rouge ou en bleu, le vecteur $\dot{q}$ représente toujours la même chose !) :

$$\frac{\partial(2E_C)}{\partial \dot{q}}=2\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)$$

On doit donc calculer :

$$2\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)+\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)$$

La dérivée par rapport au $\dot{q}$ rouge ne pose pas de problème : il suffit d'appliquer le petit rappel de mathématique encadré ci-dessus :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)=\mathbb{M}\dot{q}$$

Pour la dérivée par rapport au $\dot{q}$ bleu, il faut s'arranger pour ramener le $\dot{q}$ bleu « à gauche ». Pour cela, on utilise le fait que l'énergie cinétique est … un scalaire ! On peut donc allègrement transposer un scalaire : cela ne le change pas :

$$2E_C=\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q} \quad\Rightarrow\quad (2E_C)^t=2E_C=\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)^t$$

Rappelons que sur le plan mathématique, la transposition inverse l'ordre des facteurs dans une multiplication : $(\mathbb{A}\mathbb{B})^t=\mathbb{B}^t\mathbb{A}^t$

On a donc : $\left(\dot{q}^t \mathbb{M}\dot{q}\right)^t=\dot{q}^t \mathbb{M}^t\left(\dot{q}^t\right)^t$

Ici, on peut remarquer deux choses :

- tout d'abord que la transposée de la transposée d'un vecteur redonne le vecteur de départ : $\left(\dot{q}^t\right)^t=\dot{q}$
- ensuite, que la matrice de masse $\mathbb{M}$ est symétrique, et par conséquent : $\mathbb{M}^t=\mathbb{M}$

On a donc finalement : $\dot{q}^t\mathbb{M}\dot{q} = 2E_C = \left(2E_C\right)^t = \left(\dot{q}^t\mathbb{M}\dot{q}\right)^t = \dot{q}^t\mathbb{M}^t\left(\dot{q}^t\right)^t = \dot{q}^t\mathbb{M}\dot{q}$

Réinjectons cette expression dans notre dérivation :

$$2\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} = \mathbb{M}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}^t\mathbb{M}\dot{q}\right) = \mathbb{M}\dot{q} + \mathbb{M}\dot{q}$$

Rappelons que le jeu de couleur n'a été mis en place que pour faciliter la compréhension : On a donc montré que :

$$2\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} = \mathbb{M}\dot{q} + \mathbb{M}\dot{q} = 2\mathbb{M}\dot{q} \text{ soit : } \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} = \mathbb{M}\dot{q}$$

On a donc alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right) = \mathbb{M}\ddot{q}}$$

➔ Regardons le deuxième terme $\frac{\partial E_C}{\partial q}$:

Dans notre cas, E_C ne dépend pas de q, donc cette dérivée est nulle !

$$\boxed{\frac{\partial E_C}{\partial q} = 0}$$

➔ Regardons le troisième terme $\frac{\partial E_P}{\partial q}$:

$$\frac{\partial\left(2E_P\right)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^t\mathbb{K}q - 2q^tF + C^{te}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la constante} \\ \text{ne dépend} \\ \text{pas de q}}}{=} \frac{\partial}{\partial q}\left(q^t\mathbb{K}q - 2q^tF\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^t\mathbb{K}q\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(-2q^tF\right)$$

Dans ces deux derniers termes :

- $\frac{\partial}{\partial q}\left(q^t\mathbb{K}q\right) = 2\mathbb{K}q$ (en suivant le même raisonnement que pour E_C plus haut !)

(noter que c'est possible car $\mathbb{K}$ est, comme $\mathbb{M}$, une matrice symétrique !)

- $\frac{\partial}{\partial q}\left(-2q^tF\right) = -2F$ par le petit rappel de mathématique encadré plus haut

On a donc :

$$\frac{\partial\left(2E_P\right)}{\partial q} = 2\mathbb{K}q - 2F \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\left(E_P\right)}{\partial q} = \mathbb{K}q - F$$

➔ Moralité :

Reprenons l'équation de Lagrange sous forme vectorielle, et remplaçons chaque terme par les expressions que nous avons calculées :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} + \frac{\partial E_P}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q - F = 0}$$