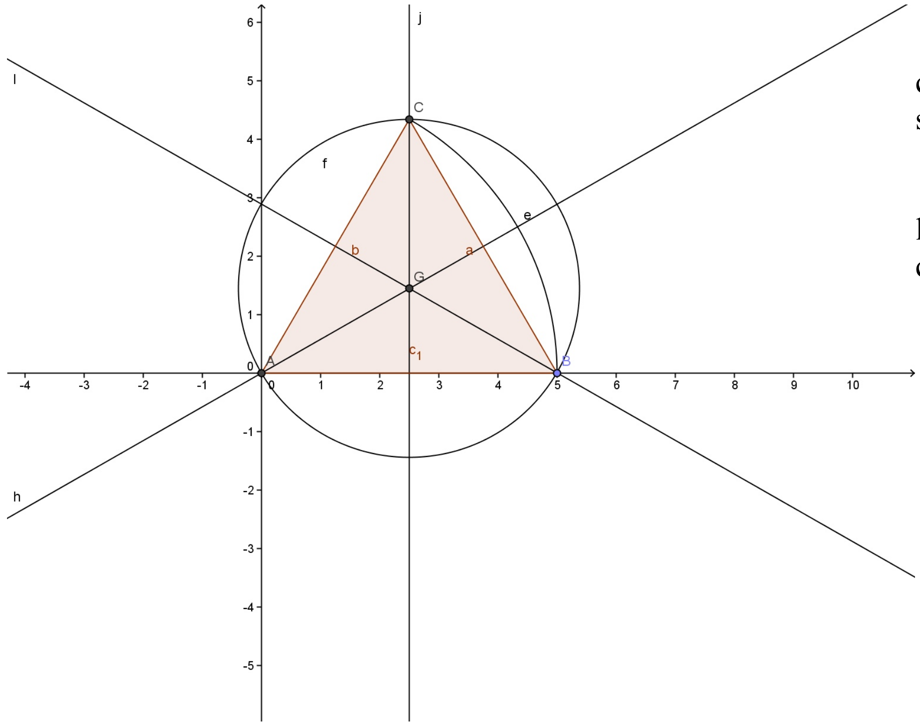
Quelques propriétés du triangle de Reuleaux

Secteur circulaire



On considère le secteur circulaire de centre A et de sommets B et C

On peut aisément calculer la surface de ce secteur circulaire

$$S_{secteur}=S_{cercle}\cdot\frac{angle}{2\Pi}=\Pi R^2\cdot\frac{\frac{\Pi}{3}}{2\Pi}=\frac{\Pi}{6}R^2$$

surface du triangle équilatéral de coté R

on pose $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3\mathrm{R}}{2}$ le demi-périmètre alors

$$S_{triangle}=\sqrt{p(p-R)(p-R)(p-R)}=\sqrt{\frac{3\mathrm{R}}{2}(\frac{R}{2})(\frac{R}{2})(\frac{R}{2})}=\sqrt{\frac{3\mathrm{R}^4}{16}}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

on peux en déduire immédiatement la surface du triangle de Reuleaux correspondant

$$S_{Reuleaux}=3(\frac{\Pi}{6}R^2)-2(\frac{R^2\sqrt{3}}{4})=\frac{R^2}{2}(\Pi-\sqrt{3})$$

La distance AG sera utile par la suite

$$AG=\frac{R}{2}\frac{1}{\cos(\frac{\Pi}{3})}=\frac{R}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

Moments d'inertie

1) pour le secteur circulaire

   On prend dans les résultats de cours $I_Z = \frac{1}{2} R^4 \frac{\Pi}{3} = \frac{\Pi R^4}{6}$ au point A

   En prenant comme axe x l'axe de symetrie du secteur $AG_{secteur} = \frac{2}{3} \frac{R \sin(\frac{\Pi}{3})}{\frac{\Pi}{3}} = \frac{R}{\Pi}$

2) le transport du moment en G_Secteur donne pour le secteur circulaire

   $I_{ZGsecteur} = \frac{\Pi R^4}{6} - \frac{\Pi R^2}{6} (\frac{R}{\Pi})^2 = \frac{\Pi R^4}{6} (1 - \frac{1}{\Pi^2})$ (signe moins car on se rapproche du centre de gravité)

3) On retransporte maintenant en G_reuleaux

   La distance à considerer est ici [G_secteur G_reuleaux] = $\frac{R}{\Pi} - \frac{R}{\sqrt{3}}$

   $I_{ZGreuleaux} = \frac{\Pi R^4}{6} (1 - \frac{1}{\Pi^2}) + \frac{\Pi R^2}{6} (\frac{R}{\Pi} - \frac{R}{\sqrt{3}})^2 = \frac{\Pi R^4}{6} ((1 - \frac{1}{\Pi^2}) + (\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{\sqrt{3}})^2)$

   $I_{ZGreuleaux} = \frac{\Pi R^4}{6} ((1 - \frac{1}{\Pi^2}) + (\frac{1}{\Pi^2} - \frac{2}{\Pi \sqrt{3}} + \frac{1}{3})) = \frac{\Pi R^4}{6} ((1 - \frac{2}{\Pi \sqrt{3}} + \frac{1}{3}))$

4) pour le triangle equilateral

   Le triangle étant equilateral, il possede 3 axes de symetrie qui sont chacun axes principaux d'inertie

   3 axes principaux d'inertie dans le plan ---> tous les moments d'inerties dans le plan sont egaux

   le moments Ixx en G est $\frac{Bh^3}{36} = \frac{R^4 \frac{\sqrt{3}}{2}}{36} = \frac{R^4 \sqrt{3}}{72}$ on a Izz = Ixx + Iyy = $\frac{R^4 \sqrt{3}}{36}$

5) Le moment d'inertie complet du triangle de reuleaux sera 3 fois le moment d'inertie d'un secteur circulaire moins 2 fois le moment d'inertie d'un triangle equilateral

   $I_{ZZ} = \frac{\Pi R^4}{2} ((1 - \frac{2}{\Pi \sqrt{3}} + \frac{1}{3})) - \frac{R^4 \sqrt{3}}{18}$

calculs à vérifier bien entendu