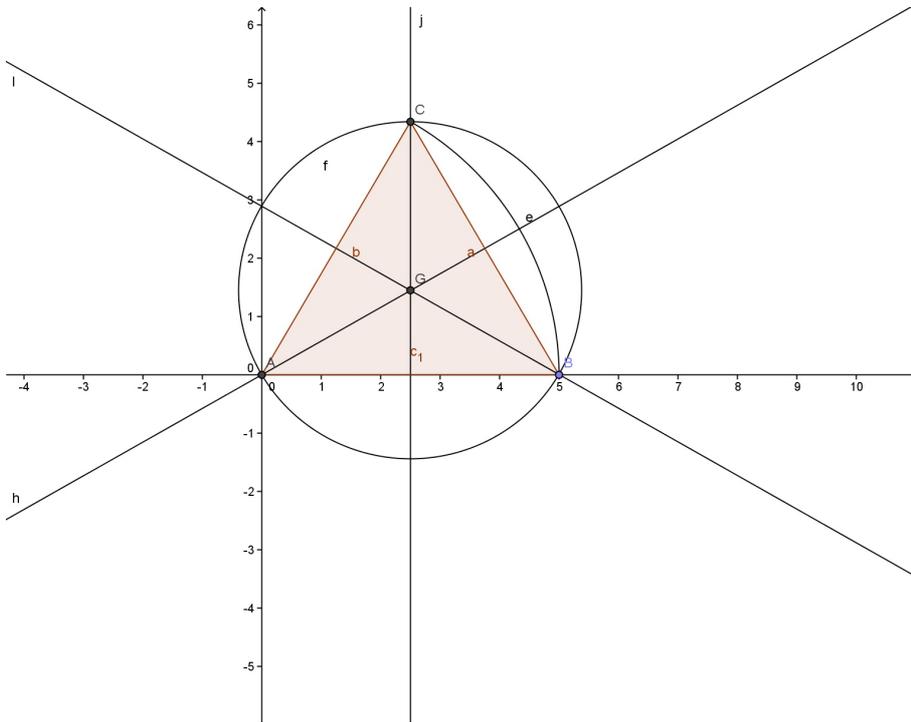


Quelques propriétés du triangle de Reuleaux
Secteur circulaire



On considère le secteur circulaire de centre A et de sommets B et C

On peut aisément calculer la surface de ce secteur circulaire

$$S_{\text{secteur}} = S_{\text{cercle}} \cdot \frac{\text{angle}}{2\pi} = \pi R^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\pi}{6} R^2$$

surface du triangle équilatéral de coté R

on pose $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3R}{2}$ le demi-périmètre alors

$$S_{\text{triangle}} = \sqrt{p(p-R)(p-R)(p-R)} = \sqrt{\frac{3R}{2} \left(\frac{R}{2}\right) \left(\frac{R}{2}\right) \left(\frac{R}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3R^4}{16}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

on peut en déduire immédiatement la surface du triangle de Reuleaux correspondant

$$S_{\text{Reuleaux}} = 3\left(\frac{\pi}{6} R^2\right) - 2\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2}{2} (\pi - \sqrt{3})$$

La distance AG sera utile par la suite

$$AG = \frac{R}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{R}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Moments d'inertie

- 1) pour le secteur circulaire

On prend dans les résultats de cours $I_z = \frac{1}{2} R^4 \frac{\Pi}{3} = \frac{\Pi R^4}{6}$ au point A

$$I_{ZZ\text{Cercle}} = \Pi \frac{D^4}{32} = \Pi \frac{R^4}{2}$$

le secteur faisant un sixième de cercle

$$I_{ZZ\text{secteur}} = \Pi \frac{R^4}{12}$$

En prenant comme axe x l'axe de symétrie du secteur

$$AG_{\text{secteur}} = \frac{2}{3} \frac{R \sin(\frac{\Pi}{6})}{\frac{\Pi}{6}} = \frac{4R \sin(\frac{\Pi}{6})}{\Pi}$$

- 2) le transport du moment en G_Secteur donne pour le secteur circulaire

$$I_{ZG\text{secteur}} = \frac{\Pi R^4}{12} - \frac{\Pi R^2}{6} \left(\frac{R(4 \sin(\frac{\Pi}{6}))}{\Pi} \right)^2 = \frac{\Pi R^4}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{16 \sin^2(\frac{\Pi}{6})}{\Pi^2} \right) \quad (\text{signe moins car on se rapproche du centre de gravité})$$

- 3) On retransporte maintenant en G_reuleaux

La distance à considérer est ici $[G_{\text{secteur}} G_{\text{reuleaux}}] = \frac{R}{\Pi} - \frac{R}{\sqrt{3}}$

$$I_{ZG\text{reuleaux}} = \frac{\Pi R^4}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{16 \sin^2(\frac{\Pi}{6})}{\Pi^2} \right) + \frac{\Pi R^2}{6} \left(\frac{R}{\Pi} - \frac{R}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\Pi R^4}{6} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{16 \sin^2(\frac{\Pi}{6})}{\Pi^2} \right) + \left(\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)$$

$$I_{ZG\text{reuleaux}} = \frac{\Pi R^4}{6} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{16 \sin^2(\frac{\Pi}{6})}{\Pi^2} \right) + \left(\frac{1}{\Pi^2} - \frac{2}{\Pi\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) \right) \quad \text{*****}$$

- 4) pour le triangle équilatéral

Le triangle étant équilatéral, il possède 3 axes de symétrie qui sont chacun axes principaux d'inertie

3 axes principaux d'inertie dans le plan ---> tous les moments d'inerties dans le plan sont égaux

le moments Ixx en G est $\frac{Bh^3}{36} = \frac{R^4 (\frac{\sqrt{3}}{2})^3}{36} = \frac{R^4 \sqrt{3}}{96}$ on a $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{R^4 \sqrt{3}}{48}$

- 5) Le moment d'inertie complet du triangle de reuleaux sera 3 fois le moment d'inertie d'un secteur circulaire moins 2 fois le moment d'inertie d'un triangle équilatéral

$$I_{zz} = \frac{\Pi R^4}{2} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\Pi\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) \right) - \frac{R^4 \sqrt{3}}{24} \quad \text{à corriger en fonction de *****}$$

calculs à vérifier bien entendu