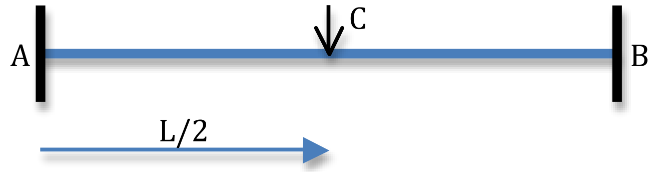
Une poutre en acier de section 70*80*3 et de longueur L=1400mm est encastrée à ses deux extrémités. Elle subit une charge totale de 200kN répartie sur toute sa longueur. L'objectif est de calculée l'équation de la déformée.

On peut simplifier le modèle en une seule force de 200kN au centre de la poutre en un point C.



Comme la répartition est symétrique, on peut écrire que $Y_A=Y_B=F/2$

Sur le tronçon [AC] :

$$\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_{ext\to I}\}_G = -\{\tau_A\}_G = -\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & M_A - Y_A\,x \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_A & 0 \\ 0 & Y_A\,x - M_A \end{Bmatrix}_G$$

$$y'' = \frac{MFz}{EI} = \frac{Y_A\,x - M_A}{EI}$$

$$y' = \frac{1}{EI}\left(\frac{Y_A\,x^2}{2} - M_A\,x + C_1\right) \rightarrow \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{Y_A\,x^3}{6} - \frac{M_A\,x^2}{2} + C_1\,x + C_2\right) \rightarrow \quad (2)$$

$y'(0)=0$ ➔ $C_1=0$ et $y(0)=0$ ➔ $C_2=0$

d'où l'équation de la déformée $y = \frac{1}{EI}\left(\frac{Y_A\,x^3}{6} - \frac{M_A\,x^2}{2}\right)$

La déformée est maximale pour $x=L/2$, donc $y'(L/2)=0$,

Alors d'après (1) ➔ $0 = \frac{Y_A\,L^2}{8} + \frac{M_A\,L}{2}$ ➔ $M_A = \frac{Y_A\,L^2}{8} \times \frac{2}{L} = \frac{Y_A\,L}{4}$

Or $Y_A=F/2$ d'où $M_A=FL/8$ ➔ $\{\tau_A\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{FL}{8} \end{Bmatrix}$

En reprenant l'équation de la déformée :

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{Fx^3}{12} - \frac{FL\,x^2}{16}\right) \\ y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{FL^3}{96} + \frac{FL^3}{64}\right) = \frac{FL^3}{32EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{FL^3}{192EI} \end{aligned}}$$