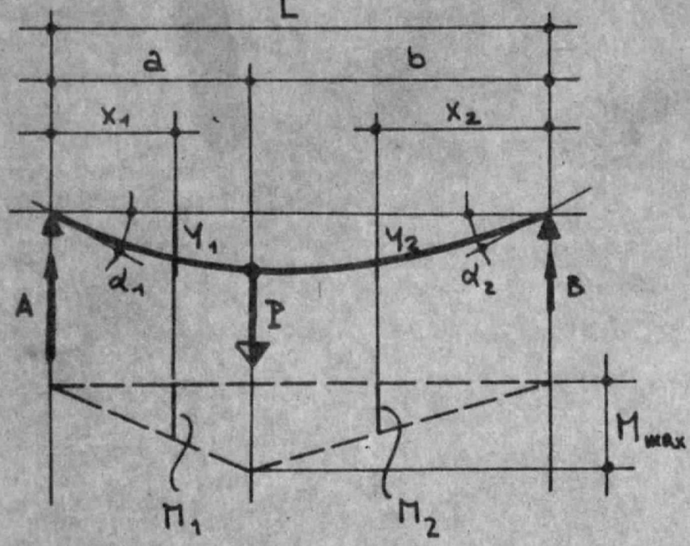
Exemple 2



Dans ce cas, la courbe du moment de flexion est discontinue.
Il faut donc considérer les tronçons 1 et 2 séparément, avec les origines A et B.
Cela donnera donc, pour calcul, des groupes de 2 formules.

Moments de flexion :

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= A x_1 = P . b . \frac{x_1}{L} \\ M_2 &= B x_2 = P . a . \frac{x_2}{L} \end{aligned}\right\} \text{———— (5)}$$

Eq. de la ligne élastique :

$$\left.\begin{aligned} y_1'' &= -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} b \frac{x_1}{L} \\ y_2'' &= -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} a . \frac{x_2}{L} \end{aligned}\right\} \text{———— (6)}$$

Première intégration :

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{x_1^2}{2} + C_1\right] \\ y_2' &= -\frac{Pa}{EIL}\left[\frac{x_2^2}{2} + C_2\right] \end{aligned}\right\} \text{———— (7)}$$

Seconde intégration :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{x_1^3}{6} + C_1 x + C_3\right] \\ y_2 &= -\frac{Pa}{EIL}\left[\frac{x_2^3}{6} + C_2 x + C_4\right] \end{aligned}\right\} \text{———— (8)}$$

Constantes d'intégration :

$$\text{Pour } \left.\begin{aligned} x_1 = 0 &\rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 0 &\rightarrow y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{———— (9)}$$

D'autre part, au point d'application de P, c.à.d pour $x_1 = a$ et $x_2 = b$, on a la même flèche $y_1 = y_2$. De plus, la pente est la même $y_1' = -y_2'$, au signe près à cause du choix des origines A et B

Il est donc possible d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{a^3}{6} + C_1 a\right] \\ y_2 &= -\frac{Pa}{EIL}\left[\frac{b^3}{6} + C_2 b\right] \end{aligned}\right\} \nearrow \quad y_1 = y_2 \Rightarrow -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{a^3}{6} + C_1 a\right] = -\frac{Pa}{EIL}\left[\frac{b^3}{6} + C_2 b\right]$$

$$\text{donc } b\left[\frac{a^3}{6} + C_1 a\right] = a\left[\frac{b^3}{6} + bC_2\right]$$

$$\frac{a^2}{6} + C_1 = \frac{b^2}{6} + C_2$$

$$\text{d'où } \boxed{C_2 = \frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{6} + C_1} \text{———— (10)}$$

D'autre part : $(y_1' = -y_2')$ — Suppression du signe —

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{a^2}{2} + C_1\right] \\ y_2' &= -\frac{Pa}{EIL}\left[\frac{b^2}{2} + C_2\right] \end{aligned}\right\} \text{d'où} \quad \begin{aligned} -\frac{Pb}{EIL}\left[\frac{a^2}{2} + C_1\right] &= \frac{P.a}{EIL}\left[\frac{b^2}{2} + C_2\right] \\ -\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} + C_1\right] &= \frac{b^2}{2} + C_2 \\ -\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} + C_1\right] - \frac{b^2}{2} &= C^2 \end{aligned}$$

En introduisant C_2 selon (10) :

$$-\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{b}{a}C_1 = \frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{6} + C_1$$

$$-\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6} = C_1\left[1 + \frac{b}{a}\right] = C_1\left[\frac{a+b}{a}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \text{d'où} \quad & -a\Bigg[\underbrace{\frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{6}}\Bigg] = (a+b)\,C_1 \\ \text{or :} \quad & -\frac{a}{6}\left[(2b+a)(a+b)\right] = (a+b)\,C_1 \end{aligned}\right\} \text{car } \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{1}{6}\left[3ab + 2b^2 + a^2\right]$$

donc $\boxed{C_1 = -\frac{a}{6}\left[2b + a\right]}$ — (11)

et $\boxed{C_2 = -\frac{b}{6}\left[2a + b\right]}$ Par un calcul semblable à celui de C_1 — (12)

Après substitution :

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{y_1 = -\frac{P a^2 b^2}{6EIL}\left[\frac{x_1^3}{a^2 b} - \frac{2x_1}{a} - \frac{x_1}{b}\right]} \\ &\boxed{y_2 = -\frac{P a^2 b^2}{6EIL}\left[\frac{x_2^3}{a b^2} - \frac{2x_2}{b} - \frac{x_2}{a}\right]} \end{aligned}\right\} \text{— (13)}$$

Si la force P est au milieu de la poutre $(a = b = \frac{L}{2})$:

$$\boxed{y = -\frac{PL^3}{16EI}\left[\frac{4x^2}{3L^3} - \frac{x}{L}\right]} \text{— (14)}$$

La flèche max. a lieu pour $x = L/2$, d'où : $\boxed{f = \frac{PL^3}{48EI}}$ — (16)

Le calcul de α_1 et α_2 peut se faire soit en utilisant (7) soit en dérivant (13) :

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{y_1' = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{P.a.b}{6EIL}\left[2b + a\right]} \\ &\boxed{y_2' = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{P.a.b}{6EIL}\left[2a + b\right]} \end{aligned}\right\} \text{— (17)}$$