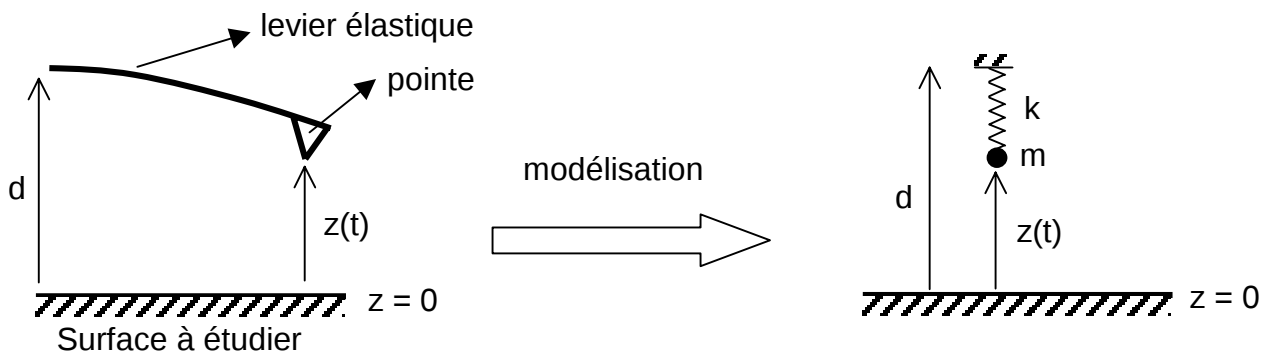


Problème I : Microscope à force atomique

Ces dernières années, de nouvelles techniques dites de "microscopies à champ proche" se sont développées pour étudier les surfaces. Parmi ces techniques, le microscope à force atomique permet de déterminer les caractéristiques topographiques, électriques ou magnétiques de la surface étudiée en mesurant la force exercée sur une fine pointe fixée à l'extrémité d'un levier élastique et placée à une distance comprise entre une fraction et quelques dizaines de nanomètres de la surface. Ce problème étudie le comportement mécanique de l'ensemble levier-pointe dans deux modes de fonctionnement classiques du microscope à force atomique. Les deux parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, on modélise le système levier-pointe par une masse ponctuelle m fixée à un ressort sans masse, de longueur à vide nulle et de raideur k . La position instantanée de la pointe est notée $z(t)$, l'origine des ordonnées étant prise sur la surface à étudier. On note d la distance entre la surface et l'extrémité du ressort. On suppose de plus que l'interaction pointe-surface est décrite par une énergie potentielle notée $U(z)$. La force correspondante sera notée $F(z)$. On néglige la force de pesanteur.



Partie A : Mode contact

En mode dit "contact", lorsque la pointe est approchée de la surface, elle est soumise à une force atomique qui induit une déflexion du levier que l'on peut mesurer optiquement avec une grande sensibilité. On s'intéresse ici à quelques aspects de ce mode de fonctionnement liés à la stabilité des positions d'équilibre de la pointe.

- 1) En supposant d fixée, écrire la condition d'équilibre de la pointe.
- 2) Soit z_0 une position d'équilibre de la pointe. En linéarisant l'équation du mouvement de la pointe au voisinage de z_0 , montrer que la condition de stabilité de cet équilibre est :

$$k + \left. \frac{d^2U}{dz^2} \right|_{z=z_0} > 0$$

On suppose dans toute la suite de cette partie que $U(z)$ a pour expression :

$$U(z) = \frac{A}{z^7} - \frac{B}{z} \quad \text{avec } A \approx 10^{-88} \text{ Jm}^7 \quad \text{et } B \approx 10^{-29} \text{ Jm}.$$

- 3) a) Représenter précisément les graphes de $U(z)$ et $F(z)$. Commenter.
b) Proposer une méthode graphique pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe lorsque d est fixée.
c) Montrer que lorsque k est supérieur à une valeur critique k_c que l'on déterminera, toutes les positions d'équilibre sont stables, quelle que soit la valeur de d .
Application numérique : évaluer k_c .
- 4) On suppose que la pointe est à l'équilibre à une distance z_0 de la surface telle qu'elle se trouve dans la partie répulsive de la courbe d'interaction ($F(z_0) > 0$). Cet équilibre est-il stable ? Montrer qu'une variation δd de la distance d entraîne une variation δz de la distance pointe surface donnée par :

$$\delta z = \delta d \left[1 - \frac{1}{k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_0} \right]^{-1}$$

Evaluer $\frac{1}{k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_0}$ pour $z_0 = 0,1 \text{ nm}$ après avoir vérifié qu'une telle position

correspond bien à $F(z_0) > 0$. On prendra $k = 100 \text{ N.m}^{-1}$.

En déduire que dans de telles conditions, une mesure de l'allongement du ressort lorsqu'on déplace la pointe au dessus de la surface donne directement la topographie de celle-ci.

- 5) On suppose $k < k_c$. On part d'une situation où l'on peut négliger l'interaction pointe surface (d très grand) et on approche très lentement le levier de la surface (d diminue). A l'aide de la méthode graphique établie au 3) b), décrire qualitativement les variations d'allongement du ressort et montrer que la pointe se rapproche brutalement de la surface dès que la distance pointe-surface atteint une valeur z_c que l'on déterminera.

On continue ensuite d'approcher le levier de la surface. Que se passe-t-il?

On revient ensuite en arrière en écartant doucement le levier de la surface. Montrer que la pointe s'écarte brutalement de la surface pour une valeur de z différente de z_c . Tracer qualitativement les graphes $z(d)$ obtenus lors de l'approche du levier puis de son recul. Comment appelle-t-on le phénomène observé?

Application numérique : Estimer z_c et la force correspondante pour $k = 0,1 \text{ N.m}^{-1}$.

Partie B : Mode Résonnant

En mode résonnant, la pointe est à quelques dizaines de nanomètres de la surface et le levier est excité mécaniquement par une force oscillante d'amplitude F_0 et de pulsation ω . On étudie comment les propriétés dynamiques du levier sont modifiées par l'interaction pointe-surface. On suppose qu'il existe entre la pointe et son environnement une force de

frottement dont l'expression est : $-\gamma \frac{dz}{dt}$.

- 1) On suppose dans cette question que la pointe est à une distance de la surface suffisamment grande pour qu'elle ne soit soumise à aucune force.

- a) Ecrire l'équation du mouvement de la pointe et montrer que l'amplitude de ses oscillations a pour expression :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m^2}}} \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans toute la suite, on suppose que la force de frottement subie par la pointe est faible de sorte que : $\frac{m\omega_0}{\gamma} \gg 1$.

- b) Montrer que l'amplitude des oscillations de la pointe présente une résonance à une fréquence que l'on déterminera. Préciser l'amplitude au maximum A_0 et montrer que la mi-hauteur de la courbe de résonance correspond à $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{m}$.

Comment appelle-t-on la quantité définie par $Q = \frac{m\omega_0}{\gamma}$?

Montrer également qu'à mi-hauteur de la courbe de résonance, la variation avec la fréquence de l'amplitude de vibration est bien décrite par :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

- 2) On suppose maintenant que la pointe est soumise à l'interaction avec la surface décrite par l'énergie potentielle $U(z)$ et la force $F(z)$.

- a) Ecrire l'équation du mouvement de la pointe.
- b) En linéarisant cette équation autour de la position d'équilibre de la pointe z_0 , montrer que la présence d'une interaction est équivalente à une modification de la raideur du ressort et qu'elle induit un changement de fréquence de résonance donné par:

$$\Delta\omega_0 = -\frac{\omega_0}{2k} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_0}$$

lorsque $k \gg \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_0}$.

En supposant que la pointe est suffisamment loin de la surface pour que le changement de fréquence $\Delta\omega_0$ soit faible devant la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance, tracer sur un même graphe, les courbes de résonance obtenues en l'absence puis en présence d'interaction.

Application numérique : On suppose que l'expression de l'énergie potentielle d'interaction pointe-surface est celle donnée au A et que la pointe est située à 1 nm de la surface. On donne également $k = 100 \text{ N.m}^{-1}$, $\omega_0 = 200 \text{ KHz}$ et $Q = 100$. Les hypothèses ci-dessus sont-elles justifiées?

- c) On mesure l'amplitude de vibration pour la pulsation $\omega = \omega_0 + \frac{\gamma}{m}$ correspondant à la mi-hauteur de la courbe de résonance sans interaction. En utilisant les résultats du 1) b), montrer que la variation d'amplitude ΔA introduite par l'interaction pointe-surface est donnée par :

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{Q}{2} \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}$$

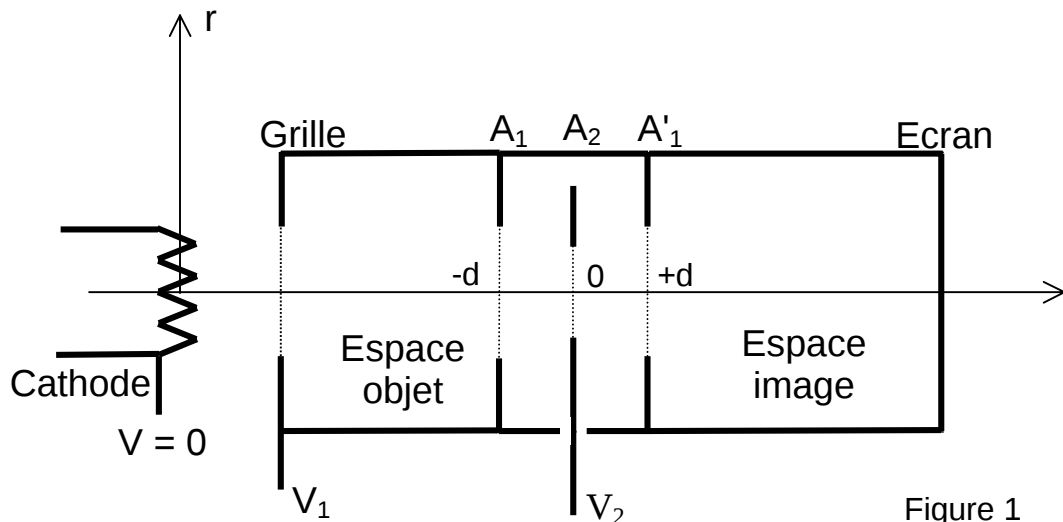
Application numérique : on impose $A_0 = 0,5$ nm. Calculer ΔA avec les valeurs numériques données ci-dessus.

La linéarisation de la force est-elle justifiée dans ces conditions?

- d) Comment choisir k pour que $\frac{\Delta A}{A_0}$ soit maximum? En utilisant les résultats de la partie A, montrer qu'il est nécessaire de trouver un compromis entre des variations d'amplitude aisément mesurables et une bonne stabilité du microscope.

Problème II : Microscope électronique

La microscopie électronique est une autre technique très puissante pour étudier les surfaces. Schématiquement, des électrons émis avec une vitesse négligeable par une cathode sont accélérés jusqu'à une grille G maintenue au potentiel V_1 . Ce faisceau d'électrons traverse ensuite la surface étudiée (objet) puis une lentille électrostatique pour former enfin une image sur un écran fluorescent (cf. figure 1). Nous ne nous intéresserons ici qu'aux



propriétés optiques du faisceau d'électrons et laisserons de côté l'origine du contraste observé sur les images enregistrées.

Partie A

- 1) Quel doit être le signe de V_1 pour que les électrons soient accélérés? Exprimer l'énergie cinétique des électrons arrivant sur la grille G en fonction de V_1 (l'électron est de masse m et de charge $-e$).
Les électrons peuvent être assimilés à des ondes de longueur d'onde λ vérifiant la relation:

$$mv_1 = \frac{h}{\lambda}$$

où v_1 est la vitesse des électrons sur la grille et h la constante de Planck ($h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg). Etablir la relation liant la longueur d'onde des électrons au potentiel V_1 .

- 2) Calculer les valeurs de la longueur d'onde correspondant aux valeurs extrêmes du potentiel accélérateur $V_1 = 4 \cdot 10^4$ V et $4 \cdot 10^6$ V.
- 3) Le pouvoir séparateur d'un microscope est proportionnel à la longueur d'onde des particules incidentes; quel avantage présente le microscope électronique sur le microscope optique classique? Un bon microscope optique permet une résolution de l'ordre de $0,3 \cdot 10^{-6}$ m ; estimer l'ordre de grandeur du pouvoir séparateur d'un microscope électronique. L'étude de la matière à l'échelle atomique est-elle possible avec un tel microscope? (on justifiera la réponse fournie).

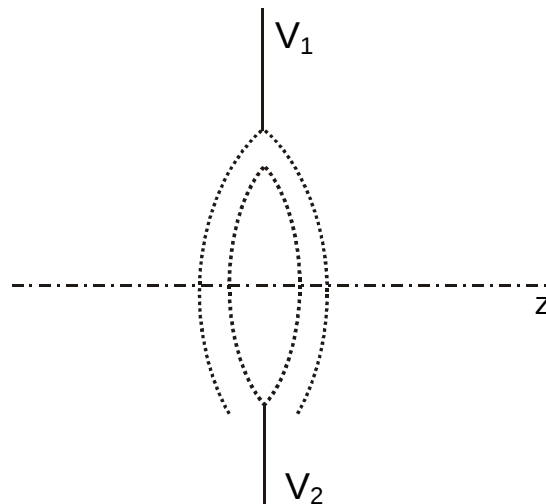
Partie B

Un électron ayant traversé l'objet pénètre au point I_1 dans un condensateur plan et en ressort au point I_2 . Les angles d'incidence et d'émergence, mesurés par rapport à la normale aux armatures, sont respectivement notés i_1 et i_2 . Le condensateur est constitué d'armatures (fines grilles) supposées infinies et séparées par la distance d . Il est soumis à la différence de potentiel $V_2 - V_1 = U$, (les armatures A_1 et A_2 dont les positions respectives sont $z = -d$ et $z = 0$ sont maintenues aux potentiels V_1 et V_2).

- 1) En supposant $U > 0$, écrire les équations du mouvement de l'électron entre les armatures.
- 2) En notant v_2 la vitesse de l'électron au point I_2 , établir la relation liant v_1 , v_2 , i_1 et i_2 (on supposera que la déviation de l'électron par l'objet est un processus élastique). En déduire une relation entre V_1 , V_2 , i_1 et i_2 .

- 3) Donner en fonction du potentiel V l'équivalent en optique électronique de l'indice n utilisé en optique classique.
- 4) Les potentiels étant supposés constants de part et d'autre du condensateur et l'angle i_1 étant fixé, tracer sommairement les trajectoires de l'électron dans les domaines $z < -d$ et $z > 0$ pour $U > 0$. Pour quelle valeur de U , l'électron n'est-il pas dévié? En deçà de quelle valeur U_c de U , l'électron ne pénètre-t-il pas dans la région $z > 0$? Tracer la trajectoire électronique pour $U = U_c$. Que se passe-t-il pour $U < U_c$?
- 5) On façonne un ensemble de deux condensateurs sous forme de double couche sphérique (cf. Figure 2). Quel doit être le signe de la différence de potentiel $U=V_2-V_1$ pour rendre ce dispositif équivalent : (i) à une lentille bi-convexe convergente? (ii) à une lentille bi-convexe divergente?

Figure 2



Partie C

Les lentilles électrostatiques à grilles sont fragiles et peu commodes d'usage; pour focaliser les électrons que nous supposons de densité faible (on pourra négliger les effets de charge d'espace) on utilise plutôt des dispositifs générant des champs électriques à symétrie axiale. Une telle lentille est constituée d'un trou circulaire (diaphragme) percé dans une armature O maintenue au potentiel V_2 entourée par deux autres armatures planes A_1 et A'_1 , respectivement placées à $z = -d$ et $z = d$ et maintenues au même potentiel V_1 . Les potentiels dans les espace-objet ($z < -d$) et image ($z > d$) sont supposés constants.

Nous nous plaçons dans l'approximation de Gauss pour ne considérer que les trajectoires électroniques passant par des points $M(r, \theta, z)$ proche de l'axe optique (r, θ, z sont les coordonnées cylindriques du point M).

- 1) Justifier qu'entre les armatures A_1 et A'_1 , le potentiel V s'écrit :

$$V(r,z) = U(z) - \frac{r^2}{2} U_1(z)$$

- 2) Montrer qu'en première approximation la composante $E_z(M)$ du champ électrique en un point $M(r, \theta, z)$ s'écrit simplement en fonction de $U(z)$ (r étant très petit, ne seront conservés dans les calculs demandés que les termes significatifs de plus bas degré en r).
- 3) En choisissant une surface de Gauss cylindrique d'axe Oz , de rayon r et de longueur dz , établir la relation existant entre le champ $E_r(r, \theta, z)$ et $E_z(r, \theta, z)$. Quel doit être le signe de $\frac{d^2U}{dz^2}$ pour que cette lentille fasse converger un faisceau parallèle?
- 4) Donner les équations du mouvement de l'électron à l'intérieur de la lentille électrostatique dans les directions $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.
- 5) Exprimer $\frac{d^2r}{dt^2}$ en fonction de $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dr}{dt}$. En déduire que l'équation de la trajectoire $r(z)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d}{dz} \left[\sqrt{U(z)} \frac{dr}{dz} \right] = - \frac{r}{4\sqrt{U(z)}} \frac{d^2U}{dz^2}$$

- 6) Nous supposons que la lentille est convergente et mince (d est très petit). Décrire qualitativement la trajectoire d'un électron pénétrant en $I_1(r_1, z=-d)$ dans la lentille avec une vitesse parallèle à l'axe Oz . Cet électron sort du dispositif en $I'_1(r'_1, z=d)$. En première approximation, on peut prendre $r_1 \approx r'_1 \approx r$. Etablir l'expression de la pente de la trajectoire $\frac{dr}{dz}$ au point de sortie I'_1 . En déduire l'expression de la distance focale-image f' de la lentille électrostatique. On notera J l'intégrale définie par :

$$J = \frac{1}{4} \int_{-d}^d \frac{1}{\sqrt{U(z)}} \frac{d^2U}{dz^2} dz$$

- 7) Soit un électron issu d'un point $A(r=0, z=-d)$ appartenant à l'espace objet de la lentille, retrouver la relation de conjugaison entre les positions de A

et de son image $A'(r=0, z'>d)$ en fonction de leurs coordonnées z, z' , du potentiel V_1 et de l'intégrale J .

- 8) Déterminer le grandissement γ pour les images électroniques de petits objets placés au point z .

Partie D

Les lentilles électrostatiques créent des aberrations géométriques et chromatiques identiques à celles rencontrées en optique classique mais elles présentent également des aberrations spécifiques liées aux effets de charge d'espace.

- 1) Décrire qualitativement l'influence des effets de charge d'espace sur un faisceau d'électrons sortant de la grille accélératrice parallèlement à l'axe optique dans l'espace objet.
- 2) Le faisceau étant localement caractérisé par une densité $\rho(z)=-n(z)e$ où $n(z)$ est le nombre d'électrons par unité de volume et en supposant que la cathode émet un faisceau d'électrons d'intensité I constante, établir la relation entre $I, \rho(z), r(z)$ et v_1 .
- 3) Les effets de charge d'espace peuvent être en partie compensés par ceux du champ magnétique créé par le faisceau lui-même. Pour évaluer l'ordre de grandeur de cette compensation on supposera ici le faisceau d'électrons parallèle à l'axe optique et de rayon r_0 constant. Calculer les forces magnétique et électrique s'exerçant sur un électron périphérique dont la trajectoire limite le faisceau. Montrer que le rapport de ces deux forces est $\frac{v_1^2}{c^2}$ où c est la vitesse de la lumière. Commenter l'importance des effets de charge d'espace à partir des résultats obtenus dans la question 1.
- 4) Supposons maintenant que les effets de charge d'espace soient pris en compte.

- a) En utilisant l'équation de Poisson $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$ et l'expression du potentiel $V(r,z)$ donné à la question C.1), montrer que le potentiel s'écrit sous la forme:

$$V(r,z) = V_1 - \frac{\rho(z)}{4\epsilon_0} r^2$$

- b) A partir de l'équation du mouvement de l'électron, montrer que la trajectoire $r(z)$ doit vérifier l'équation différentielle:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{K}{r}$$

On exprimera K en fonction de I , V_1 , ϵ_0 et $\frac{e}{m}$.

- c/ En supposant ces effets de faible amplitude, on pose $r(z)=r_0+r_1(z)$ tel que $r_1(z) \ll r_0$, r_0 étant le rayon du faisceau sortant de la grille parallèlement à l'axe optique. Calculer au premier ordre le rayon du faisceau lorsqu'il arrive sur l'électrode A_1 de la lentille située à la distance D de la grille.
- 5) Calculer alors l'angle d'incidence du rayon périphérique avec l'axe optique. Si l'on négligeait les effets de charge d'espace, de quel point $A(r=0,z)$ de l'espace objet proviendrait ce rayon? En supposant la lentille infiniment mince et en négligeant les effets de charge d'espace dans l'espace-image, quel serait le point $A'(r=0,z')$ conjugué de A ?
- 6) Calculer la distance entre le foyer-image F' et A' en fonction de I , D , r_0 , V_1 et f . Que peut-on en conclure quant à la formation des images? Décrire qualitativement quel effet supplémentaire apparaîtrait si on ne négligeait pas les effets de charge d'espace dans l'espace-image. Quels dispositifs peut-on imaginer pour compenser ces effets.

Application numérique: $\frac{I}{\pi r_0^2} = 2.10^4 \text{ A.m}^{-2}$; $D=1\text{m}$, $V_1 = 4.10^4 \text{ V}$ et 4.10^6 V , $f'=5 \text{ mm}$.