$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+j2\pi f\tau} e^{j2\pi f t} df \ ?$$

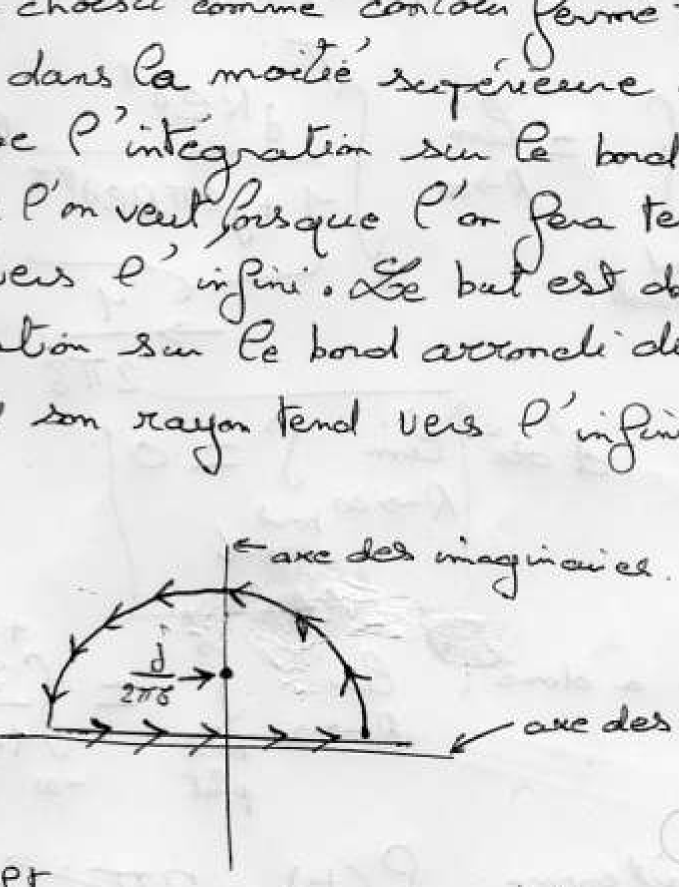
On considère dans un premier temps $\tau > 0$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1/j2\pi\tau)}{f + \frac{1}{j2\pi\tau}} e^{j2\pi f t} df.$$

Méthode d'intégration : on se sert du théorème des résidus pour intégrer cette fonction. On choisit comme contour fermé pour cette intégration un demi-cercle dans la moitié supérieure du plan complexe de telle sorte que l'intégration sur le bord plat corresponde à l'intégration que l'on veut lorsque l'on fera tendre le rayon de ce demi-cercle vers l'infini. Le but est donc surtout de démontrer que l'intégration sur le bord arrondi du demi-cercle tend vers 0 quand son rayon tend vers l'infini.

Calcul pour $t > 0$:

$$\int_{\text{bord arrondi}} + \int_{\text{bord plat}} = 2\pi j . Res$$



La fonction $\dfrac{(1/j2\pi\tau)\, e^{j2\pi f t}}{f + \frac{1}{j2\pi\tau}}$ a un pôle en $f = \dfrac{j}{2\pi\tau}$,

le résidu associé vaut (en posant $f = \frac{j}{2\pi\tau}$) : $\dfrac{1}{j2\pi\tau} e^{j2\pi\left(\frac{j}{2\pi\tau}\right)t} = \dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{j2\pi\tau}$

Pour faire l'intégration sur le bord arrondi on utilise le chgt de variable : $f = Re^{j\theta}$, $df = jRe^{j\theta} d\theta$

$$\int_{\text{bord arrondi}} = \int_0^{\pi} \frac{e^{j2\pi Re^{j\theta} t}}{1+j2\pi Re^{j\theta}\tau} jRe^{j\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{jRe^{j\theta}\, e^{j2\pi R(\cos\theta + j\sin\theta)t}}{1+j2\pi Re^{j\theta}\tau} d\theta$$

En faisant tendre R vers l'infini :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{jRe^{j\theta}}{\underbrace{\cancel{1}}_{\text{négligeable}}+j2\pi Re^{j\theta}\tau} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

$$\lim_{R\to\infty} e^{-2\pi R\sin\theta t} = 0 \quad \text{car} \begin{cases} t>0 \\ 0<\theta<\pi \end{cases} \quad *1$$

$$|e^{j2\pi R\cos\theta t}| < 1 \quad \forall \text{ la valeur de } R.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\substack{\text{bord}\\ \text{arrondi}}} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{jRe^{j\theta}}{1+j2\pi Re^{j\theta}\tau}}_{\to\frac{1}{2\pi\tau}} \underbrace{e^{-2\pi R\sin\theta t}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{j2\pi R\cos\theta t}}_{|\,|<1} d\theta$$

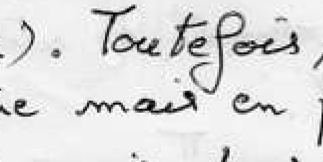
d'où $\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{\substack{\text{bord}\\ \text{arrondi}}} = 0}$

On a donc : $\lim_{R\to\infty}\int_{\substack{\text{bord}\\ \text{plat}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} df = 2\pi j \cdot \text{Rés}$

soit encore : (pour $t>0$) $h(t) = \cancel{2\pi j} \cdot \frac{e^{-t/\tau}}{\cancel{j2\pi}\tau} = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$

Calcul pour $t<0$:

Le précédent calcul de $h(t)$ n'est pas valable pour $t<0$ à cause de $(*_1)$. Toutefois, on peut aussi y calculer de la même manière mais en prenant cette fois comme contour un demi-cercle ~~mais~~ dans le demi-plan inférieur du plan complexe.



Toutefois, dans ce dernier cas, le fait que le pôle était dans le demi plan supérieur entraîne que ce contour n'entoure plus aucun résidu, donc : $h(t) = \lim\limits_{R \to \infty} \int_{\text{bord plat}} = 2\pi j . \underset{0}{Res} = 0$

d'où $h(t) = 0$ pour $t < 0$

Dernières réflexions :

Qu'est ce qui fait donc que $h(t)$ est finalement ici causale et non anti-causale ? Tout simplement l'emplacement du pôle. Si le pôle avait été dans la moitié inférieure du plan complexe, les résultats auraient été inversés : $h(t)$ non nul pour $t < 0$ et nul pour $t > 0$. Quand on considère finalement cela du pt de vue de la TL, on retrouve finalement les critères de stabilité en fonction de l'emplacement des pôles dans les demi-plans droit et gauche du plan complexe.

Vu de cette manière un système instable est un système dont la réponse impulsionelle (calculée par transformée inverse de la FT) comporte une partie "anti-causale" due à la présence d'un pôle dans le demi-plan inférieur du plan complexe de Fourier ou dans le demi-plan droit de Laplace.