

Modèle géométrique de la gravitation quantique

Michaël MAUREAU

Collège F. DOLTO, rue Marcel PETIT, 95670 MARLY La Ville, FRANCE

Correspondance, courriel : maureaumichael@yahoo.fr

Résumé

Déterminer la géométrie de l'espace-temps associé à l'onde d'une particule permet non seulement de démontrer les lois qui régissent la mécanique quantique, mais aussi de retrouver la gravitation qui affecte cette même particule. Ce travail propose donc la partie géométrique d'une théorie sur la gravitation quantique.

Mots-clés : gravité quantique; géométrie; mécanique quantique; équation de Schrödinger; dualité onde-corpuscule; relation de De Broglie; principe d'équivalence; métrique de Schwarzschild.

Abstract

Determine the geometry of space-time associated with the wave of a particle allows to demonstrate the laws which govern the quantum mechanics and to find the gravitation which affects the same particle. It works propose the geometrical part of a theory on the quantum gravitation.

Keywords : quantum gravity, geometry, quantum mechanics, Schrödinger equation, wave-particle duality, De Broglie relation, equivalence principle, Schwarzschild metric

1. Introduction

La théorie de la relativité générale s'appuie sur un espace-temps non euclidien. Si l'on souhaite regrouper la relativité générale et la mécanique quantique au sein d'une même théorie, il est donc nécessaire de ne plus considérer la physique quantique comme une somme de principes apposés sur l'espace et le temps qui lui serviraient seulement de toile de fond. Il faut la voir comme une physique supérieure enracinée dans l'espace-temps lui-même. L'expérience de corrélation de deux particules [1] par exemple nous montre bien que l'espace-temps à l'échelle d'une particule n'est pas euclidien. En effet, l'intrication quantique ne peut trouver son origine qu'en une modification de la structure même de l'espace-temps, car toute autre cause ne pourrait témoigner de la non-localité, mais serait au contraire liée à la limite que représente la vitesse de la lumière sur la trame de l'espace-temps, sans compter qu'elle subirait l'influence des conditions qui règnent entre les particules.

Dans ce travail, nous écrivons la géométrie de l'espace-temps associé à l'onde d'une particule. Nous montrerons alors que de nombreux principes qui régissent la physique quantique (dualité onde-corpuscule, indétermination, spin ...) découlent de cette géométrie. Puis nous démontrerons qu'une telle géométrie converge vers la métrique de Schwarzschild. Nous proposons de ce fait la partie géométrique d'une théorie sur la gravitation quantique.

2. Géométrisation de l'onde quantique

Soit (ct, x, y, z) la base associée au référentiel galiléen du laboratoire.

Soit (ct', x', y', z') la base associée à l'espace-temps quantique d'une particule défini comme étant l'espace-temps qui se déplace avec la particule et où il est possible de la détecter. On posera que le vecteur $\vec{u}_{x'}$ est colinéaire à $\vec{u}_x$.

Soient deux points A et B de l'espace-temps quantique tels que $\overrightarrow{AB}$ soit colinéaire à $\vec{u}_{x'}$.

Nommons l la distance qui sépare A et B si la particule est immobile dans le laboratoire. Nommons l' la distance qui sépare ces 2 même points si la particule se déplace à l'allure uniforme $v\vec{u}_x$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

On peut paramétrer la longueur l par $(x'(\alpha); y'(\alpha); z'(\alpha))$. L'élément de longueur est donné par :

$$dl(\alpha) = \sqrt{[(\partial_{\alpha}x'(\alpha))^2 + (\partial_{\alpha}y'(\alpha))^2 + (\partial_{\alpha}z'(\alpha))^2]} d\alpha \quad [2] \quad (1)$$

Posons $\alpha = x$:

$$dl(x) = \sqrt{[(\partial_x x')^2 + (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2]} dx \quad (2)$$

D'après la transformation de Lorentz-Poincaré, $x' = \gamma(x - v/c \, ct)$ où c est la vitesse de la lumière et $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est le facteur de Lorentz [3]. Donc $\partial_x x' = \gamma$, d'où :

$$dl = \sqrt{[\gamma^2 + (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2]} dx \quad (3)$$

Or $l' = l/\gamma$ puisqu'il y a contraction des longueurs d'après la relativité restreinte. Ainsi :

$$dl' = \sqrt{[\gamma^2 + (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2]} dx / \gamma \quad (4)$$

En outre, dans le référentiel de la particule, $dl' = dx'$. Soit d'après la transformation de Lorentz-Poincaré à un instant donné :

$$dl' = \gamma dx \quad (5)$$

Les égalités (4) et (5) donnent :

$$\sqrt{[\gamma^2 + (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2]} dx / \gamma = \gamma dx$$

$$\Rightarrow (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2 = \gamma^4 - \gamma^2$$

$$\Rightarrow (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2 = \gamma^4 v^2 / c^2 \quad (6)$$

L'équation (6) admet deux solutions progressives :

$(y' = A \cos(kx - \omega t) ; z' = A \sin(kx - \omega t))$ et $(y' = A \sin(kx - \omega t) ; z' = A \cos(kx - \omega t))$, où k , ω et A sont respectivement le vecteur d'onde, la pulsation de l'onde et son amplitude.

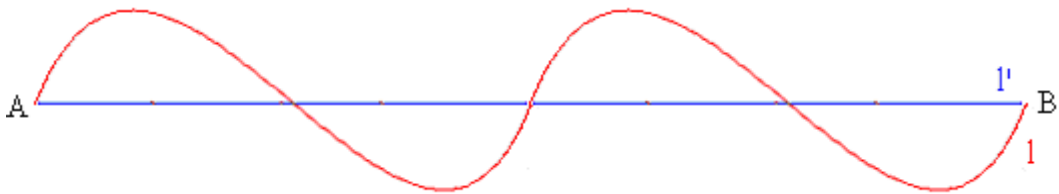
En effet, si la vitesse est constante :

$$\begin{aligned} (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2 &= A^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t) + A^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= A^2 k^2 \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation (6) donne alors effectivement une égalité entre deux constantes :

$$Ak = \gamma^2 v / c \quad (8)$$

Le mouvement d'une particule déforme alors l'espace de la façon schématisée ci-dessous :



La mesure d'une longueur en mouvement est diminuée par rapport à la mesure faite dans le référentiel où elle est immobile. D'après la relativité restreinte, seule la mesure de la longueur parallèle à la vitesse est contractée. De façon plus exhaustive, nous avons montré que cette contraction s'accompagne d'une ondulation dans la direction perpendiculaire.

3. La mécanique quantique comme conséquence de la géométrie

3.1 Equation de Schrödinger et dualité onde-corpuscule

En notation complexe, nous pouvons écrire une fonction d'onde $\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ pour le couple ($y' = A\cos(kx-\omega t)$; $z' = A\sin(kx-\omega t)$) issu de la résolution de l'équation (6). Les ondes planes progressives sont évidemment solution de l'équation de Schrödinger [4] $i\hbar\partial_t\psi = \hat{p}^2/(2m)\psi$ où m est la masse de la particule et $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ l'opérateur quantité de mouvement. **Le modèle géométrique respecte donc l'équation de Schrödinger.** En modelant les dimensions spatiales du fait de son déplacement, la particule engendre alors une onde qui rend compte de ses propriétés quantiques.

Dans le référentiel de la particule, l'onde solution de l'équation (6) s'étend autour d'elle et s'applique aux corpuscules en mouvement par rapport à elle. Dans le référentiel du laboratoire, c'est la particule qui se déplace à l'allure v , c'est donc la particule qui s'ondule, ou plutôt son espace-temps quantique. Cette particule devient donc à certains égards une onde, et **la dualité onde-corpuscule serait ainsi justifiée** [4]. En outre, les deux points de vue (correspondant aux deux référentiels) sont parfaitement équivalents, et **le principe de relativité est respecté** [3].

Afin de représenter la dualité onde-corpuscule, élaborons un paquet d'onde gaussien [5] et appliquons-le à la première solution de l'équation (6), les deux solutions menant de toute façon au même résultat : $y' = A \int_0^{+\infty} \cos(kx-\omega(k)t) e^{-\alpha(k-k_0)^2} dk$ et $z' = A \int_0^{+\infty} \sin(kx-\omega(k)t) e^{-\alpha(k-k_0)^2} dk$ où α et k_0 sont des constantes avec $k_0 = \langle k \rangle$

On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_x y' &= -A \int_0^{+\infty} k \sin(kx-\omega(k)t) e^{-\alpha(k-k_0)^2} dk \quad \text{et} \quad \partial_x z' = A \int_0^{+\infty} k \cos(kx-\omega(k)t) e^{-\alpha(k-k_0)^2} dk \\ \Rightarrow (\partial_x y')^2 + (\partial_x z')^2 &= A^2 \int_0^{+\infty} k^2 \sin^2(kx-\omega(k)t) e^{-2\alpha(k-k_0)^2} dk^2 + A^2 \int_0^{+\infty} k^2 \cos^2(kx-\omega(k)t) e^{-2\alpha(k-k_0)^2} dk^2 \\ &= A^2 \int_0^{+\infty} k^2 e^{-2\alpha(k-k_0)^2} dk^2 \end{aligned} \quad (9)$$

En utilisant (6) :

$$\begin{aligned} \gamma^4 v^2 / c^2 &= A^2 \int_0^{+\infty} k^2 e^{-2\alpha(k-k_0)^2} dk^2 \\ \Rightarrow \gamma^2 v / c &= A \int_0^{+\infty} k e^{-\alpha(k-k_0)^2} dk \\ &= A [e^{-\alpha(k-k_0)^2} / (-2\alpha)]_0^{+\infty} \\ &= A / (2\alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

On a à nouveau une égalité entre deux constantes, ce qui montre que **les paquets d'onde peuvent aussi être des solutions** de l'équation de contraction tridimensionnelle.

3.2 L'hélicité [6]

Des solutions supplémentaires à l'équation (6) qui auraient par exemple des amplitudes négatives sont superflues car elles ne présenteraient que le même déphasage de $\pi/2$ entre les coordonnées y' et z' . Il n'y a donc que deux solutions foncièrement distinctes à l'équation (6).

Soulignons les points suivants :

- pour une valeur donnée de l'énergie $\hbar\omega$ d'une particule, sa fonction d'onde présente exactement deux expressions : ($y' = A\cos(kx-\omega t)$; $z' = A\sin(kx-\omega t)$) et ($y' = A\sin(kx-\omega t)$; $z' = A\cos(kx-\omega t)$);
- ces deux solutions correspondent à des polarisations circulaires, et donc à des espaces quantiques en rotation ;
- la première solution donne une polarisation gauche et la seconde donne une polarisation droite, soit des comportements spatiaux opposés ;
- l'axe de rotation et l'axe de propagation de l'espace-temps quantique ne font qu'un.

Les deux solutions issues du modèle géométrique coïncident ainsi avec les deux hélicités de la particule.

3.3 Indétermination et limite quantique

D'après la relation de De Broglie, $h\mathbf{k} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ où m_0 est la masse au repos de la particule. On peut réécrire (8) :

$$A^2(\gamma m_0 v / \hbar)^2 = \gamma^4 v^2 / c^2 \quad (11)$$

$$\Rightarrow A^2(m_0 v / \hbar)^2 = \gamma^2 v^2 / c^2$$

$$\Rightarrow A = \gamma \hbar / m_0 c \quad (12)$$

$$\Rightarrow A \geq \hbar / m_0 c \quad (13)$$

On constate que l'amplitude est toujours au moins égale à la longueur d'onde de Compton. Elle définit la taille de l'espace-temps quantique, c'est-à-dire, d'après la définition de celui-ci, l'incertitude sur la position de la particule. **Le modèle géométrique renferme ainsi une indétermination fondamentale identique à celle prédite par la physique quantique** [6]. Remarquons que cette incertitude existe bien même en cas d'absence de mouvement.

On voit que lorsque la masse propre d'un corps est très grande, l'amplitude de l'onde quantique devient négligeable car elle est inversement proportionnelle à cette masse. Le corps n'est alors plus tenu d'obéir aux lois de la mécanique quantique et il y a transition vers le monde classique.

Singulièrement, quand la masse est celle de Planck m_p (soit environ $2,2 \cdot 10^{-8}$ kg), on obtient une amplitude égale à la longueur de Planck l_p (soit environ $1,6 \cdot 10^{-35}$ m) :

$$l_p = \hbar / m_p c$$

Si rien de plus petit que l_p ne peut exister [7], la masse de Planck pourrait ainsi être la limite au-dessus de laquelle l'amplitude transversale n'est plus. Aucun comportement quantique du corps concerné ne transparaîtrait plus à notre échelle, **expliquant pourquoi le monde à notre échelle n'est pas quantique**.

4. La gravitation déduite de la géométrie quantique

4.1 Métrique de Schwarzschild

Les vecteurs $\vec{E}_i$ forment une base naturelle de l'espace-temps quantique si :

$$\vec{E}_i = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x^i} = \partial_i \vec{OM} \quad \text{où } O \text{ et } M \text{ sont l'origine et un point de l'espace-temps quantique [8].}$$

Concentrons nous sur une seule solution, disons ($y' = A \cos(kx - \omega t)$; $z' = A \sin(kx - \omega t)$), le raisonnement étant le même pour l'autre solution. Si le mouvement est inertiel :

$$- \vec{E}_{x'} = \partial_{x'} [x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'} + ct' \vec{u}_{ct'}] \quad (14)$$

$$= \vec{u}_{x'} + \partial_{x'} [y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'}]$$

$$= \vec{u}_{x'} + \partial_{x'} [A \cos(kx - \omega t) \vec{u}_{y'} + A \sin(kx - \omega t) \vec{u}_{z'}]$$

$$= \vec{u}_{x'} + \partial_{x'} [A \cos(k(x - v/c t)) \vec{u}_{y'} + A \sin(k(x - v/c t)) \vec{u}_{z'}] \quad \text{car } \omega = kv$$

$$= \vec{u}_{x'} + \partial_{x'} [A \cos(kx'/\gamma) \vec{u}_{y'} + A \sin(kx'/\gamma) \vec{u}_{z'}] \quad \text{car } x' = \gamma(x - v/c t) \text{ d'après la transformation de Lorentz-Poincaré}$$

$$= \vec{u}_{x'} - Ak/\gamma \sin(kx'/\gamma) \vec{u}_{y'} + Ak/\gamma \cos(kx'/\gamma) \vec{u}_{z'}$$

$$= \vec{u}_{x'} - \gamma v/c \sin(kx'/\gamma) \vec{u}_{y'} + \gamma v/c \cos(kx'/\gamma) \vec{u}_{z'} \quad \text{d'après (1)} \quad (15)$$

$$- \vec{E}_{y'} = \partial_{y'} (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'} + ct' \vec{u}_{ct'})$$

$$= \vec{u}_{y'}$$

$$= \vec{u}_{y'} \quad (16)$$

$$- \vec{E}_{z'} = \partial_{z'} (x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'} + ct' \vec{u}_{ct'})$$

$$= \vec{u}_{z'}$$

$$= \vec{u}_{z'} \quad (17)$$

Les composantes g_{ij} d'un tenseur métrique sont définies par $g_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$ [8]. Celui-ci est antisymétrique en dehors de ses termes diagonaux puisque l'amplitude ne se fait que d'un seul côté de l'axe y à la fois et d'un seul côté de l'axe z à la fois. Pour une signature (+,-,-), on a donc :

$$- g_{x'x'} = -\vec{E}_{x'} \cdot \vec{E}_{x'} \quad (18)$$

$$= -1 - \gamma^2 v^2 / c^2 \sin^2(kx'/\gamma) - \gamma^2 v^2 / c^2 \cos^2(kx'/\gamma) \quad \text{d'après (15)}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 - \gamma^2 v^2 / c^2 \\
&= -1 - (\gamma^2 - 1) \\
&= -\gamma^2
\end{aligned} \tag{19}$$

$$- g_{y'y'} = - \vec{E}_{y'} \cdot \vec{E}_{y'} \tag{20}$$

$$= -1 \text{ d'après (16)} \tag{21}$$

$$- g_{z'z'} = - \vec{E}_{z'} \cdot \vec{E}_{z'} \tag{22}$$

$$= -1 \text{ d'après (17)} \tag{23}$$

Etant donné que le temps se dilate pendant que les distances se contractent du même facteur γ , on peut poser pour une signature (+,-,-,-) :

$$g_{ct'ct'} = -1/g_{x'x'} = 1/\gamma^2 \tag{24}$$

Sous sa forme matricielle, le tenseur métrique $g_{ij'}$ s'écrit donc :

$$[g_{ij'}] = \begin{bmatrix} 1/\gamma^2 & g_{ct'x'} & g_{ct'y'} & g_{ct'z'} \\ -g_{ct'x'} & -\gamma^2 & g_{x'y'} & g_{x'z'} \\ -g_{ct'y'} & -g_{x'y'} & -1 & g_{y'z'} \\ -g_{ct'z'} & -g_{x'z'} & -g_{y'z'} & -1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Puisque les termes non diagonaux n'interviennent pas dans le calcul de la métrique $ds^2 = g_{ij'} d\varepsilon^i d\varepsilon^j$ du fait de leur antisymétrie, nous les ignorerons :

$$[g_{ij'}] = \begin{bmatrix} 1/\gamma^2 & & & \\ & -\gamma^2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Considérons maintenant un point de masse M immobile dans le référentiel du laboratoire et posons un repère sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ sur ce point. La particule possède une accélération a suivant $-\vec{u}_r$, et donc un terme de vitesse qui s'ajoute suivant $-\vec{u}_r$. Puisque $g_{ij'}(t+dt) = g_{ij'}(t) + \partial_t g_{ij'}(t)dt$, alors le terme supplémentaire $\partial_t g_{ij'}(t)dt = dG_{ij'}$ dû à l'accélération s'exprime dans le repère sphérique et vaut :

$$[dG_{ij'}] = \begin{bmatrix} \partial_t(1/\gamma^2) dt & & & \\ & -\partial_t(\gamma^2) dt & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Nous pouvons décomposer la vitesse en ses composantes sphériques $v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_\phi \vec{u}_\phi$. D'où $\gamma^2 = 1/(1 - v_r^2/c^2 - v_\theta^2/c^2 - v_\phi^2/c^2)$ et :

$$[dG_{ij'}] = \begin{bmatrix} \partial(1/\gamma^2)/\partial v_r \partial v_r / \partial t dt & & & \\ & -\partial(\gamma^2)/\partial v_r \partial v_r / \partial t dt & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\Rightarrow [dG_{ij'}] = \begin{bmatrix} \partial(1 - v_r^2/c^2 - v_\theta^2/c^2 - v_\phi^2/c^2)/\partial v_r a dt & & & \\ & -\partial(1 - v_r^2/c^2 - v_\theta^2/c^2 - v_\phi^2/c^2)^{-1}/\partial v_r a dt & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [dG_{ij'}] = \begin{bmatrix} -2v_r/c^2 a dt & & & \\ & -2v_r/c^2 (1 - v_r^2/c^2 - v_\theta^2/c^2 - v_\phi^2/c^2)^{-2} a dt & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Comme $dr = v_r dt$:

$$[dG_{ij'}] = \begin{bmatrix} -2adr/c^2 & & & \\ & -2\gamma^4 adr/c^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

D'après le principe d'équivalence [9], les effets de l'accélération de la particule sur son espace-temps quantique sont localement identiques aux effets de la gravitation sur ce même espace-temps quantique. Puisque $a = -GM/r^2$ où G est la constante de gravitation, on a :

$$[dG_{ij}] = \begin{bmatrix} 2GMdr/r^2c^2 & & & \\ & 2\gamma^4GMdr/r^2c^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Sous l'action de la gravitation, l'énergie mécanique de la particule se conserve. Dans un cas non relativiste, on a alors la somme de son énergie cinétique $\frac{1}{2} m_0 v^2$ et de son énergie potentielle $-GMm_0/r$ qui est égale à une constante C :

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 - GMm_0/r = C \quad (32)$$

$$\Rightarrow v^2 = 2GM/r + 2C/m_0 \quad (33)$$

Ainsi :

$$[dG_{ij}] = \begin{bmatrix} 2GMdr/r^2c^2 & & & \\ & 2GMdr/r^2c^2 / (1 - 2GM/rc^2 - 2C/m_0c^2)^2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

En intégrant et en posant 4 constantes d'intégration C_t , C_r , C_θ et C_φ :

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} C_t - 2GM/rc^2 & & & \\ & C_r - 1/(1 - 2GM/rc^2 - 2C/m_0c^2) & & \\ & & C_\theta & \\ & & & C_\varphi \end{bmatrix} \quad (35)$$

Posons $v = 0$ et $m_0 = 0$. On a alors les conséquences suivantes :

- notre formulation non relativiste (32) est justifiée
- $C = 0$ d'après (32)
- la déformation de l'espace-temps quantique devient la déformation de l'espace-temps du laboratoire

Par conséquent :

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} C_t - 2GM/rc^2 & & & \\ & C_r - 1/(1 - 2GM/rc^2) & & \\ & & C_\theta & \\ & & & C_\varphi \end{bmatrix} \quad (36)$$

L'espace-temps du laboratoire se doit d'être euclidien si $M = 0$, ce qui impose que :

$$C_t = 1, C_r = 0, C_\theta = -r^2 \text{ et } C_\varphi = -r^2 \sin^2 \theta.$$

Finalement :

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - 2GM/rc^2 & & & \\ & -1/(1 - 2GM/rc^2) & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (37)$$

La métrique associée à la gravitation est :

$$ds^2 = g_{ij} d\epsilon^i d\epsilon^j = (1 - 2GM/rc^2) c^2 dt^2 - dr^2 / (1 - 2GM/rc^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (38)$$

On retrouve précisément la métrique de Schwarzschild [9] : notre modèle géométrique est capable de décrire la gravitation avec une très grande précision.

4.2 Aspect corpusculaire

L'expression (37) qui décrit la gravitation peut être naturellement rapprochée de l'expression (26) qui représente le déplacement d'une particule. On a alors pour cette particule :

$$\gamma^2 = 1/(1 - 2GM/rc^2) \quad (39)$$

$$\Rightarrow 1/(1 - v^2/c^2) = 1/(1 - 2GM/rc^2) \quad (40)$$

Tout se passe comme si en chaque point qui environne la masse M il y aurait une particule qui se déplacerait à l'allure $v^2 = 2GM/r$ suivant $\vec{u}_r$ ou $-\vec{u}_r$.

Références

- [1] Weihs, Jennewein, Simon, Weinfurter, Anton Zeilinger, « Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality condition », dans *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81, p. 5039
- [2] Marcel Berger et Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses universitaires de France, 2ème édition corrigée - 1992
- [3] Max Born, *La théorie de la relativité d'Einstein et ses bases physiques*, Gauthier-Villars (1923). Réédité par Jacques Gabay (2003)
- [4] Erwin Schrödinger ; *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*, réédition des articles historiques par Jacques Gabay (1988)
- [5] Lev Landau et Evguéni Lifchitz, *Physique théorique, tome 3 : Mécanique quantique*, éd. MIR, Moscou
- [6] Paul A. Dirac; *The principles of quantum mechanics*, Oxford Science Publication, Oxford University Press (4^e édition-1958)
- [7] Jean Pierre Batou et Gilles Cohen-Tannoudji, *L'Horizon des Particules*, Gallimard 1989
- [8] C. W. Misner, Kip Thorne & John Wheeler, *Gravitation*, Freeman & Co 1973
- [9] Rémi Hakim, *Gravitation relativiste*, CNRS Édition, 1994.