Il nous faut donc calculer le coefficient a_n . $f(x)$ ne contenant que des sinusoïdes voici l'équation générale qui permet le calcul des coefficients associés :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\frac{2p}{T}x)dx$$

On remplace T par la période de f soit 2L.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\frac{p}{L}x)dx$$

De plus on a $\sin(-x) = -\sin(x)$ et donc $f(-x) = -f(x)$ le produit des deux est donc paire et l'intégrale entre 0 et –*L* est égale a celle entre 0 et *L*.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(n\frac{p}{L}x)dx$$

Il nous faut maintenant exprimer $f(x)$ sur $[0;L]$. Si on regarde le graphique on a :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{hh}{L}x \quad pour\ 0 < x < \dfrac{L}{h} \\ f(x) = \dfrac{-h}{L - L/h}x + \dfrac{hL}{L - L/h} = \dfrac{hh}{(h-1)L}(L - x) \quad pour\ \dfrac{L}{h} < x < L \end{cases}$$

Il faut donc séparer l'intégrale en deux parties

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{\frac{L}{h}} \frac{hh}{L}x\sin(n\frac{p}{L}x)dx + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{h}}^{L} \frac{hh}{(h-1)L}(L - x)\sin(n\frac{p}{L}x)dx$$

On calcule la première partie par IPP

$$\int_{0}^{\frac{L}{h}} \frac{hh}{L}x\sin(n\frac{p}{L}x)dx = [\frac{hh}{L}x(-)\frac{L}{np}\cos(n\frac{p}{L}x)]_0^{\frac{L}{h}} - \int_{0}^{\frac{L}{h}} \frac{hh}{L}(-)\frac{L}{np}\cos(n\frac{p}{L}x)dx$$

$$= -h\frac{L}{np}\cos(\frac{np}{h}) + \frac{hh}{np}[-\frac{L}{np}\sin(n\frac{p}{L}x)]_0^{\frac{L}{h}}$$

$$= \frac{hL}{np}\cos(\frac{np}{h}) - \frac{hhL}{(np)^2}\sin(\frac{np}{h})$$

puis la seconde

$$\int_{\frac{L}{h}}^{L} \frac{hh}{(h-1)L}(L-x)\sin(n\frac{p}{L}x)dx = [\frac{hh}{(h-1)L}(L-x)(-)\frac{L}{np}\cos(n\frac{p}{L}x)]_{\frac{L}{h}}^{L} - \int_{\frac{L}{h}}^{L}(-)\frac{hh}{(h-1)L}(-)\frac{L}{np}\cos(n\frac{p}{L}x)dx$$

$$= \frac{hh}{(h-1)L}(L-\frac{L}{h})\frac{L}{np}\cos(\frac{np}{h}) - \frac{hh}{(h-1)np}[(-)\frac{L}{np}\sin(n\frac{p}{L}x)]_{\frac{L}{h}}^{L}$$

$$= \frac{hhL}{(h-1)np}(1-\frac{1}{h})\cos(\frac{np}{h}) - \frac{hhL}{(h-1)(np)^2}\sin(\frac{np}{h})$$

$$= \frac{hL}{np}\cos(\frac{np}{h}) + \frac{hhL}{(h-1)(np)^2}\sin(\frac{np}{h})$$

On réunit les deux et on obtient

$$a_n = \frac{2}{L}(-\frac{hL}{np}\cos(\frac{np}{h}) - \frac{hhL}{(np)^2}\sin(\frac{np}{h}) + \frac{hL}{np}\cos(\frac{np}{h}) - \frac{hhL}{(h-1)(np)^2}\sin(\frac{np}{h}))$$

$$= -2(\frac{hh}{(np)^2} + \frac{hh}{(h-1)(np)^2})\sin(\frac{np}{h})$$

Dans le cas de la corde il n'y a pas de vitesse initiale, la corde est simplement relâchée. g(x) la vitesse initiale est donc nulle, c'est-à-dire que b_n est nul, on peut donc écrire :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(\frac{hh}{(np)^2} + \frac{hh}{(h-1)(np)^2})\sin(\frac{np}{h})\cos(\frac{npc}{L}t)\sin(\frac{np}{L}x)$$