PROJET 0 g : Calculs littéraux de x (t) et de y (t) – donc en coordonnées cartésiennes.

<u>DONNEES</u>

Vecteur position $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{X} + y(t)\,\vec{Y}$

Il existe une fonction f telle que $y = f(x)$

Nous avons donc

$$y = f(x) = f(x(t)) = y(t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = f'(x)\,\dot{x} \Leftrightarrow \dot{y} = f'(x)\,\dot{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{d}{dx} f(x)\,\dot{x} = \frac{d}{dt} f(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dt} f'(x)\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Vecteur vitesse $\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d}{dt} x(t)\,\vec{X} + \frac{d}{dt} y(t)\,\vec{Y} \Leftrightarrow \vec{V}(t) = \dot{x}\,\vec{X} + \dot{y}\,\vec{Y}$

D'ou

$$V^2 = \left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 \Leftrightarrow V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

Or

Au point n°2 : $\vec{V}(0) = v_2\,\vec{X} + 0\,\vec{Y} \Leftrightarrow \dot{x}(0) = v_2$ **et** $\dot{y}(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$

Au point n°3 : $\vec{V}(t_3) = 0\,\vec{X} + v_3\,\vec{Y} \Leftrightarrow \dot{x}(t_3) = 0$ **et** $\dot{y}(t_3) = v_3 \Leftrightarrow \dot{x}(t_3)\,f'(x_3) = v_3$

Par suite

En notations Lagrangienne

$T = \frac{mV^2}{2} \Leftrightarrow$ **énergie cinétique**

$E_{P=}\ V = mgh$ **avec** $h = y(t) \Leftrightarrow V = mgy(t)$ **ou** $V = mg\,f(x)$,

l'énergie potentielle (attention à la notation V, à ne pas confondre aves le vecteur vitesse)

$$L = T - V = \frac{m\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{2} - mgy(t) = \frac{m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{2} - mgy(t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\,g\,y(t)\right),$$

le langrangien

Les coordonnées généralisées du système sont donc : $x(t)$ **et** $y(t)$

Nous pouvons noter

$$E_M = L + V = \frac{m\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{2} + mgy(t) \Leftrightarrow \frac{m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{2} + mgy(t),$$

l'énergie mécanique du système

Dans un cadre général nous savons aussi que

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q}$$ **, ou q est une coordonnée généralisée** $(x(t),\ y(t))$

<u>CALCULS LITTERAUX</u>

avec $\lambda(t)$ = **norme de** $\vec{R}(t)$ = **cte** = **2.5 mg** , $\vec{R}(t)$ = **vecteur réaction du support**
et $f(x)$ **la fonction qui lie y à x** $\Rightarrow$ **équation de la trajectoire.**

$$\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \Longleftrightarrow 2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} \Longleftrightarrow 2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Avec

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2} - mgy(t)\right) =$$

$$\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{x}^2 + \left(f'(x)\ \dot{x}\right)^2 - 2\,g\,f(x)\right) = \frac{m}{2}\left(2\,\dot{x}^2 f''(x) - 2\,g\,f'(x)\right) = m\left(\dot{x}^2 f''(x) - g\,f'(x)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\dot{x}^2 + \left(f'(x)\ \dot{x}\right)^2 - 2\,g\,f(x)\right) = \frac{m}{2}\left(2\,\dot{x} + 2\,\dot{x}\ f'(x)^2 - 0\right) = m\,\dot{x}\left(1 + f'(x)^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\frac{d}{dt}\left(\dot{x} + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}}\right) = m\left(\ddot{x} + \frac{2\,\dot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) = m\left(\ddot{x} + 2\,f'(x) - \ddot{x}\ f'(x)^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\,g\,y(t)\right) = -mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\,g\,y(t)\right) = m\,\dot{y} = m\,f'(x)\,\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\,\ddot{y}$$

Nous avons donc

$$2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \Longleftrightarrow 2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial x} = m\left(\ddot{x} + 2\,f'(x) - \ddot{x}\ f'(x)^2 - \dot{x}^2 f''(x) - g\,f'(x)\right) =$$

$$m\left(\ddot{x} + 2\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - \ddot{x}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - \dot{x}^2\,\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3} - g\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = m\left(\ddot{x} - \ddot{x}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - \frac{2\,\dot{y}\,\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y} - g\,\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2.5\,g}\left(\ddot{x} - \ddot{x}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - \frac{2\,\dot{y}\,\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y} - g\,\dot{y}}{\dot{x}}\right) \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{1}{2.5\,g\,\dot{x}^2}\left(\ddot{x}\,\dot{x}^2 - \ddot{x}\,\dot{y}^2 - 2\,\dot{y}\,\ddot{y}\,\dot{x}^2 - \dot{x}\,\ddot{x}\,\dot{y} - \dot{x}\,g\,\dot{y}\right)$$

$$2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} \Longleftrightarrow 2.5\,mg\,\frac{\partial f}{\partial y} = m\left(\ddot{y} + g\right) \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2.5\,g}\left(\ddot{y} + g\right) \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ddot{y}}{2.5\,g} + \frac{1}{2.5}$$

Nous savons aussi que

$$E_M = cte \Leftrightarrow \frac{d}{dt} E_M = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}{2} + mgy(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+2gy(t)\right) =$$

$$0 \Leftrightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2gy(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2}\left(2\dot{x}+2\dot{y}+2g\dot{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \dot{x}+\dot{y}+g\dot{y} =$$

$$0 \Leftrightarrow \dot{x}+\dot{y}(1+g) = 0 \Leftrightarrow \dot{x}+f'(x)\dot{x}(1+g) = 0 \Leftrightarrow \dot{x}\left(1+f'(x)(1+g)\right) = 0 \qquad 0$$

Nous en déduisons que

$\dot{x} = 0$

et / ou

$$1+f'(x)(1+g) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1+g)} \Leftrightarrow f'(x)$$

$$= K_1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} f(x) = K_1 \Leftrightarrow d f(x) = K_1 \, dx \Leftrightarrow f(x) = \int K_1 \, dx \Leftrightarrow f(x) = \int K_1 \, dx \Leftrightarrow f(x) = x K_1 + C_0$$

CELA RESSEMBLE FORT A UNE EQUATION DE DROITE ⟹ CE QUI N ' EST PAS POSSIBLE ! ! ! !

Nous pouvons aussi développer les équation vectorielles ci - dessous afin de tenter d ' obtenir plus de renseignements sur les liens entre les variables

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}$$

Nous devons donc résoudre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2.5\, g\, \dot{x}^2}\left(\ddot{x}\,\dot{x}^2 - \ddot{x}\,\dot{y}^2 - 2\,\dot{y}\,\ddot{y}\,\dot{x}^2 - \dot{x}\,\ddot{x}\,\dot{y} - \dot{x}\,g\,\dot{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ddot{y}}{2.5\, g} + \frac{1}{2.5}$$