Calcul du moment d'inertie d'une sphère.

Je pose le paramètre α^2, la distance au carré entre chaque point de la sphère et l'axe de rotation.

Dans ce cas, $\alpha^2 = r^2(\cos^2\beta\sin^2\theta + \sin^2\beta)$.

J'intègre donc ce paramètre α^2 de la manière suivante :

$I = \rho \int \alpha^2 . dV$ avec $dV = r^2dr.\sin\theta d\theta.d\beta$

Si je remplace α^2 par son expression, j'obtiens donc.

$$I = \rho \iiint r^4(\cos^2\beta\sin^3\theta + \sin^2\beta\sin\theta)dr\, d\theta\, d\beta$$

Je développe ainsi cette expression :

$$I = \rho\left[\int_0^R r^4 dr\left[\iint(\cos^2\beta\sin^3\theta + \sin^2\beta\sin\theta)d\beta d\theta\right]\right]$$

$$I = \frac{\rho R^5}{5}\left[\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\beta\, d\beta\, .\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta\right) + \left(\int_0^{2\pi}\sin^2\beta\, d\beta\, .\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\right)\right]$$

Je linéarise en utilisant les formules d'Euler :

$$I = \frac{\rho R^5}{5}\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{(e^{i\beta} + e^{-i\beta})^2}{4}\, d\beta\, .\int_0^{\pi}\frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{-8i}\, d\theta\right) + \left(\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\beta} - e^{-i\beta})^2}{-4}\, d\beta\, .\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\right)\right]$$

$$I = \frac{\rho R^5}{5}\left[\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{2}\right) d\beta\, .\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{4}\, \sin 3\theta + \frac{3}{4i}\cos\theta\right) d\theta\right) + \left(\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{1}{2}\right) d\beta\, .\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\right)\right]$$

$$I = \frac{\rho R^5}{5}\left[\left[\frac{1}{4}\sin 2\beta + \frac{1}{2}\beta\right]_0^{2\pi} .\left[\frac{1}{12}\cos 3\theta + \frac{3}{4i}\sin\theta\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{4}\sin 2\beta + \frac{1}{2}\beta\right]_0^{2\pi} .[-\cos\theta]_0^{\pi}\right]$$

$$I = \frac{\rho R^5}{5}\left[\frac{22\pi}{12}\right] = \frac{22MR^2}{80} = \frac{11MR^2}{40}$$