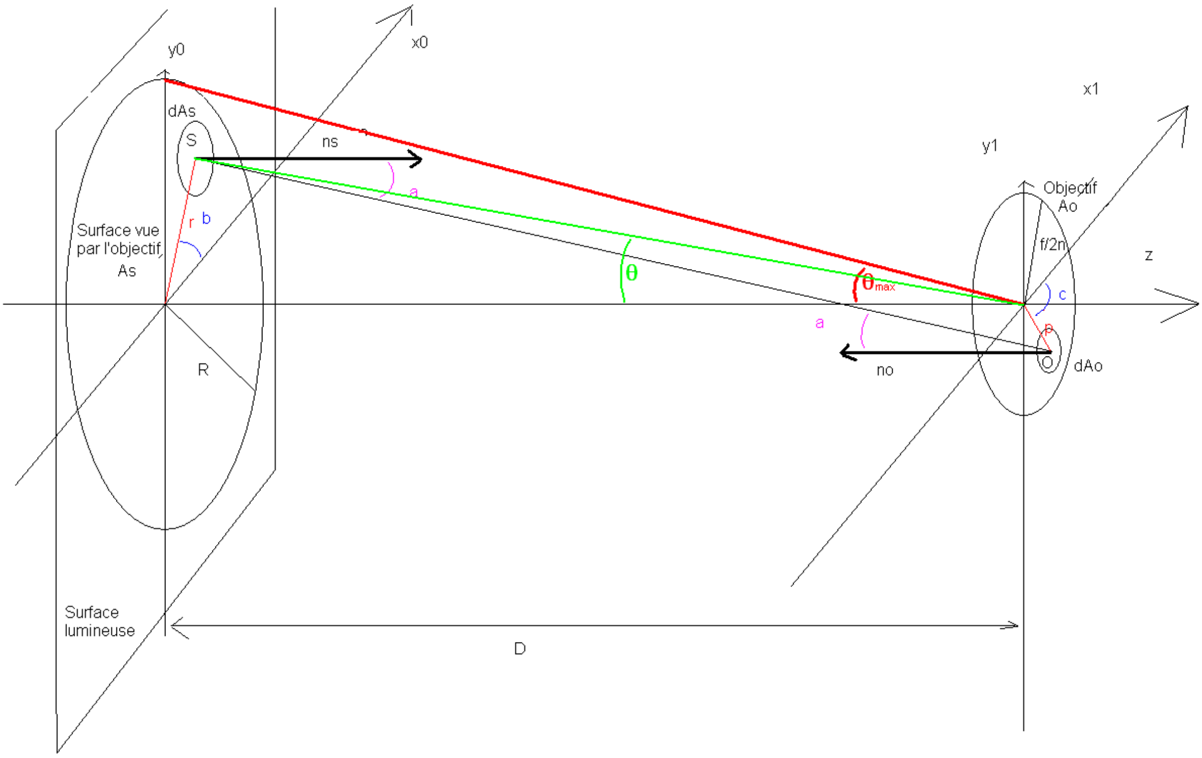
Quantité de lumière transmise par un objectif

Nous allons nous attacher à déterminer la quantité de lumière que reçoit un couple capteur-objectif dans des conditions simplifiées d'éclairement.

Les hypothèses sont les suivantes :

- H1 : On considère que la lumière est diffusée de manière homogène et isotrope, dans toutes les directions de l'espace (exemple d'un ciel bleu ou fortement nuageux, ou un mur de couleur uniforme), c'est-à-dire que la luminance L, exprimée en W/sr/m² est constante.
- H2 : Dans un premier temps, on va considérer que l'on a une symétrie circulaire, i.e. le capteur est circulaire.



La surface lumineuse visée a une surface As et est à une distance D de l'objectif.
L'objectif possède une surface Ao. L'angle de vue de l'objectif (défini précédemment) a une valeur de $2\ \theta_{max}$.
Soit S un point de la surface lumineuse visée et O un point de la surface de l'objectif.
dAs et dAo sont les éléments de surfaces respectivement autour de S et de O.
dAs et dAo ont leur normale ns et no selon l'axe z.

Le flux lumineux reçu par dAo par la surface dAs est proportionnel à cette surface apparente émissive de lumière (dAs) vue du point O (donc proportionnel à l'angle solide de dAs pour le point O), et à la surface apparente dAo par rapport à la direction SO.
On a donc le flux lumineux proportionnel à d²g qui vaut :

$d^2g = d\Omega\, s \cdot dAo.\cos(a)$

Avec :

$$d\Omega\, s = \frac{dAs \cdot \cos(a)}{|OS|^2}$$

On peut d'ailleurs remarquer que :

$dAo.\cos(a) = d\Omega\, o.|OS|^2$ avec dΩo angle solide de la surface dAo vu du point S.

Donc

$d^2g = d\Omega\, s.d\Omega\, o.|OS|^2$

La grandeur d²g est appelée étendue géométrique ou étendue de faisceau entre S et O.

On note le repère polaire r (rayon) et b (angle) de la surface As. On a donc dAs qui vaut :

$dAs = r \cdot dr \cdot db$

De plus, l'angle entre l'axe z et la droite (OS) vaut a, donc la distance |OS| vaut :

$$|OS| = \frac{D}{\cos(a)}$$

On a donc :

$$d\Omega\, s = \frac{r.dr.db \cdot \cos^3(a)}{D^2}$$

De plus, l'angle solide dΩo pour S vaut :

$$d\Omega\, o = \frac{dAo \cdot \cos(a)}{|OS|^2}$$

Or dans le repère polaire p (rayon) et c (angle) de l'objectif, dAo vaut :

$dAo = p \cdot dp \cdot dc$

On a donc :

$$d\Omega\, s = \frac{p.dp.dc \cdot \cos^3(a)}{D^2}$$

On a donc le flux lumineux reçu par dAo par dAs proportionnel à d²g qui vaut :

$$d^2g = \frac{r.dr.db \cdot \cos^3(a)}{D^2}.\frac{p.dp.dc \cdot \cos^3(a)}{D^2}.|OS|^2$$

$$d^2g = \frac{r.dr.db \cdot \cos^3(a)}{D^2}.\frac{p.dp.dc \cdot \cos^3(a)}{D^2}.\frac{D^2}{\cos^2(a)}$$

$$d^2g = \frac{r.dr.db \cdot p.dp.dc.\cos^4(a)}{D^2}$$

Il suffit maintenant d'intégrer d²g sur la surface d'émission de lumière As et la surface de l'objectif Ao pour obtenir G, l'étendue géométrique (étendue de faisceau) entre la surface d'émission de lumière et la surface de l'objectif. Le flux lumineux total arrivant sur l'objectif est proportionnel à G.

$$G = \iint_{As}\iint_{Ao} d^2g = \iint_{As}\iint_{Ao} \frac{r.p.\cos^4(a)}{D^2} dr.db \cdot dp.dc$$

On peut désormais faire quelques approximations :
On considère que le diamètre de l'objectif est très petit devant le diamètre de la surface à photographiée et la distance D donc l'angle a est a peu près égal à l'angle θ (angle entre le centre de l'objectif et le point S).

Pour pouvoir intégrer, il faut exprimer r en fonction de l'angle de vue θ. On a donc :

$$\tan(\theta) = \frac{r}{D}$$

$$r = D \cdot \tan(\theta)$$

$$dr = \frac{D}{\cos^2(\theta)} \cdot d\theta$$

On a donc d²g qui s'exprime en fonction de θ qui vaut :

$$d^2g = \frac{D \cdot \tan(\theta).\frac{D}{\cos^2(\theta)} \cdot d\theta .db \cdot p.dp.dc.\cos^4(a)}{D^2}$$

$$d^2g = \frac{D \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.D \cdot d\theta .db \cdot p.dp.dc.\cos^4(a)}{D^2 \cdot \cos^2(\theta)}$$

$$d^2g = \frac{D^2 \cdot \sin(\theta) \cdot p.\cos^4(a)}{D^2 \cdot \cos^3(\theta)} \cdot d\theta .db.dp.dc$$

$$d^2g = \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot p \cdot d\theta .db.dp.dc$$

Les plages d'intégrations sont les suivantes :
$\theta \rightarrow [0;\theta \max]$ avec θ_{max} demi-angle de vue maximum du couple objectif-capteur
$b \rightarrow [0;2\pi]$ on balaye tout le tour de la surface d'émission
$p \rightarrow \left[0;\frac{f}{2 \cdot n}\right]$ f étant la focale et n le nombre d'ouverture, le rayon est bien f/2n
$c \rightarrow [0;2\pi]$ on balaye tout le tour de l'objectif

On a alors :

$$G = \int_0^{\theta \max}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{f}{2n}}\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot p \cdot d\theta .db.dp.dc$$

$$G = \int_0^{\theta \max} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} db \cdot \int_0^{\frac{f}{2n}} p \cdot dp \int_0^{2\pi} dc$$

Or, on a :

$$\int \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \sin^2(\theta)$$

Donc :

$$G = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2(\theta)\right]_0^{\theta \max} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot p^2\right]_0^{\frac{f}{2n}} \cdot 2\pi$$

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin^2(\theta\ max) \cdot \frac{f^2}{n^2}$$

Or, on a vu que l'angle de vue θ_{max} est fonction de la taille du capteur et de la focale (en considérant une MAP à l'infini), ici le capteur est circulaire de diamètre l :

$$\theta\ max = Arc\tan\left(\frac{l}{2 \cdot f}\right)$$

On a donc :

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin^2\left(Arc\tan\left(\frac{l}{2 \cdot f}\right)\right) \cdot \frac{f^2}{n^2}$$

Or :

$$\sin^2(Arc\tan(x)) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Donc :

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\frac{l^2}{4 \cdot f^2}}{1 + \frac{l^2}{4 \cdot f^2}} \cdot \frac{f^2}{n^2}$$

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{f^2}{n^2} \cdot \frac{l^2}{4 \cdot f^2 + l^2}$$

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{f^2}{n^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{f^2}{l^2} + 1}$$

Le flux lumineux total arrivant sur l'objectif vaut donc :

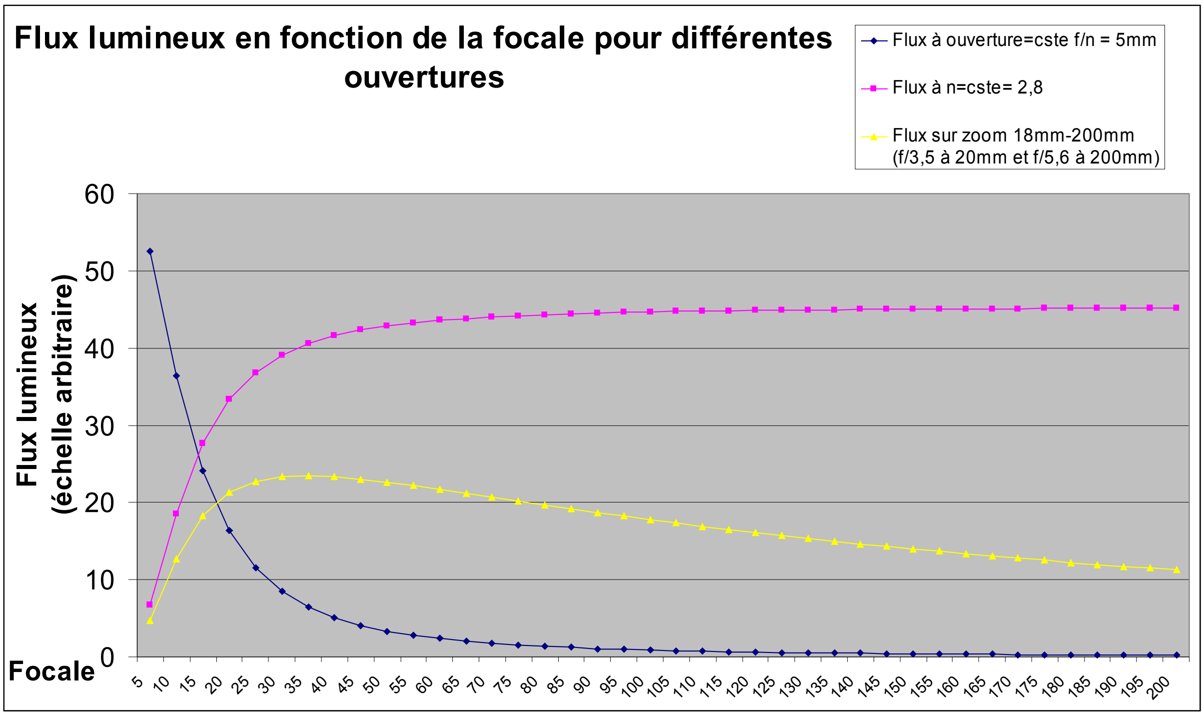
$\boxed{F = L \cdot G}$ avec L, la luminance (en $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$) que l'on a considérée comme constante en première hypothèse (H1).

$$F = L \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{f^2}{n^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{f^2}{l^2} + 1}$$

<u>Exemple :</u>

Voici l'évolution de la valeur de F (seule l'évolution de G a été étudiée puisque L est constant) en fonction f et pour différentes valeurs de n :

- A ouverture égale constante, c'est-à-dire f/n est constant (5mm par exemple).
- A n égal constante, par exemple f/2.8 sur toute la plage de focale.
- A ouverture sur un zoom classique 18mm-200mm f/3.5-f/5.6 (et extrapolation linéaire pour l'ouverture sur les autres focales)



- On remarque donc que pour une ouverture à f/2.8 (courbe rose), le flux lumineux n'est pas constant quelque soit la focale, comme il est communément admis. Cependant, il est à peu près constant pour des focales supérieures à 40/45mm, mais pas pour les focales courtes des grand-angles. La variation n'est pas non plus énorme entre 18mm et 200mm mais il y a tout de même un rapport 2 entre les deux, soit une vitesse de prise de vue 2 fois plus faible à 18mm par rapport à 200mm.
- De même, pour un objectif 18mm-200mm f/3.5-f/5.6, le maximum de lumière n'est pas reçu à 18mm (en considérant une variation linéaire de n avec la focale) mais plutôt vers 35mm (n valant 3.7), cependant, la variation de lumière est quand même faible à ces focales là.