1 Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un corps soumis à une force n'est définit que si celle-ci est conservative, c'est à dire si le travail de la force ne dépend pas du chemin suivit par son point d'action. Ce qui est la cas de la force gravitationnelle puisqu'elle ne dépend que des positions des corps. Par définition l'énergie potentielle du corps i est $dEp_i := -dW_i$ où dW_i est le travail de la force résultante s'appliquant sur le corps i pour un déplacement infinitésimal de celui-ci (c'est bien une différentielle totale exacte puisque les forces sont conservatives). Et toujours par définition $dW_i := \vec{F_i} \cdot d\vec{u_i}$ avec $\vec{F_i}$ la force résultante s'appliquant sur le coprs i et $d\vec{u_i}$ le vecteur déplacement élémentaire du coprs i. On se place en coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ), on a :

$$
\begin{aligned}
dW_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{j/i}(t) \cdot d\vec{u_i} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j}{||\vec{r}_{ij}(t)||^3}(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot d\vec{u_i} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j}{||\vec{r}_{ij}(t)||^3}(\rho_j - \rho_i)\vec{e}_\rho \cdot (d\rho_i\vec{e}_\rho + \rho_i\cos(\phi_i)d\theta_i\vec{e}_\theta + \rho_i d\phi_i\vec{e}_\phi) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j}{|\rho_j - \rho_i|^3}(\rho_j - \rho_i)d\rho_i
\end{aligned}
$$

Si $\rho_j - \rho_i > 0$ alors $|\rho_j - \rho_i| = (\rho_j - \rho_i)$ et :

$$
\begin{aligned}
dEp_i &= -dW_i \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{-Gm_im_j}{(\rho_j - \rho_i)^2}d\rho_i \\
\Rightarrow \frac{dEp_i}{d\rho_i} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{-Gm_im_j}{(\rho_j - \rho_i)^2} \\
\Rightarrow Ep_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{-Gm_im_j}{(\rho_j - \rho_i)} + C \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Si $\rho_j - \rho_i < 0$ alors $|\rho_j - \rho_i| = -(\rho_j - \rho_i)$ et :

$$
\begin{aligned}
dEp_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j}{(\rho_j - \rho_i)^2}d\rho_i \\
\Rightarrow Ep_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_im_j}{(\rho_j - \rho_i)} + C' \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

On peut condenser (1.1) et (1.2) en une expression :

$$
\boxed{Ep_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{-Gm_im_j}{|\rho_j - \rho_i|} + C'' = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{-Gm_im_j}{||\vec{r}_{ij}(t)||} + C''}
$$

On choisira la constante $C'' = 0$ pour simplifier, ce qui signifie que l'énergie potentielle est nulle lorsque les masses sont infiniment éloignées les une des autres.

L'énergie potentielle totale, est par définition la somme des énergies potentielle de chaque corps :

$$\boxed{Ep = \sum_{i=1}^{N} Ep_i}$$