Premier problème : magnétostatique

Concours commun polytechnique MP 2004 (physique 2, partie B)

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

I-Préliminaires

I-1 Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

1- Expliciter le champ $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_M$: $\qquad \overrightarrow{B_R} = B_a \left\{ \left(1 + \dfrac{R^3}{2r^3}\right)\overrightarrow{e_z} - \dfrac{3R^3 \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{r}}{2r^5}\overrightarrow{r} \right\}$

2- Calculer le produit scalaire $\mathbf{B}_R \cdot r\,\mathbf{e}_r$: $\qquad \overrightarrow{B_R}\cdot r\,\overrightarrow{e_r} = B_a r\left(1 - \dfrac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta$

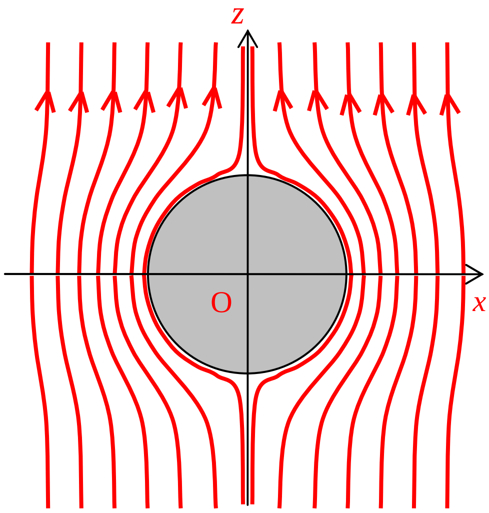
3- En déduire que $\mathbf{B}_R$ est tangent à la sphère. Le produit scalaire $\overrightarrow{B_R}\cdot r\,\overrightarrow{e_r}$ est nul pour $r = R$. Cela implique donc que le champ $\overrightarrow{B_R}$ n'ait pas de composante radiale au niveau de la surface de la sphère de rayon R. Le champ $\overrightarrow{B_R}$ est donc tangent à la sphère.

Sur la surface de la sphère, le champ $\overrightarrow{B_R}$ a pour expression :

$$\overrightarrow{B_R} = \frac{3}{2}B_a\left\{\overrightarrow{e_z} - \left(\overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{e_r}\right\} = \frac{3}{2}B_a\sin\theta\left\{\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_x}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}B_a\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Le module du champ sur la sphère a donc pour expression $\left|\overrightarrow{B_R}\right| = \dfrac{3}{2}B_a\left|\sin\theta\right|$, cette valeur est maximale pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.



4- Tracé approximatif des lignes de champ.

Loin de la sphère, c'est le champ uniforme selon Oz qui l'emporte tandis qu'au niveau de la sphère les lignes de champ sont tangentes à la sphère, ce qui signifie qu'elles contournent la sphère.

I.2 Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

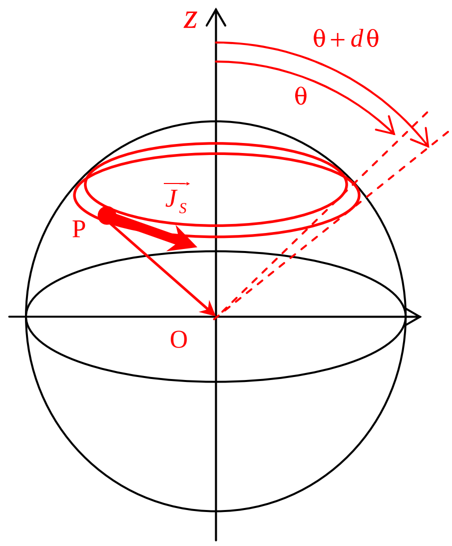
1- Direction du champ $\mathbf{B}(\mathrm{O})$. Les lignes de courant sont des cercles entourant l'axe Oz et la distribution de courant est invariante par révolution autour de l'axe Oz. Tout plan contenant l'axe Oz est donc un plan d'antisymétrie de la distribution de courant et cela implique qu'en tout point de l'axe Oz, et donc en particulier en O, le champ $\overrightarrow{B}$ est selon Oz : $\overrightarrow{B}(\mathrm{O}) = B(\mathrm{O})\overrightarrow{e_z}$.

2- Calculer le champ $\mathbf{B}(0)$. Pour un élément de courant $\overrightarrow{J_S}\,dS$, la loi de Biot-Savart s'écrit en O :

$$\overrightarrow{dB}(\mathrm{O}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{J_S}\,dS \wedge \overrightarrow{e_{\mathrm{PO}}}}{R^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_0\sin\theta}{R^2}\,\overrightarrow{e_\varphi}\wedge\overrightarrow{e_r}\,dS = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_0\sin\theta}{R^2}\,\overrightarrow{e_\theta}\,dS$$

Seule nous intéresse la composante axiale :

$$dB_z(\mathrm{O}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_0\sin\theta}{R^2}\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_z}\,dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_0\sin^2\theta}{R^2}dS$$



Cette composante ne dépendant que de l'angle polaire θ, nous pouvons prendre pour surface élémentaire dS la surface d'une couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$: $dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Le champ $dB_z(\mathrm{O})$ dû à cette couronne circulaire a donc pour expression :

$$dB_z(\mathrm{O}) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\sin^3\theta\, d\theta$$

Il suffit dès lors d'intégrer ce champ entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$:

$$B_z(\mathrm{O}) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\mu_0 J_0 \text{ , soit } \vec{B}(\mathrm{O}) = \frac{2}{3}\mu_0 J_0\vec{e_z}$$

3- Moment magnétique d'une tranche. Chaque tranche de la distribution de courant est assimilable à une boucle de courant de surface $S = \pi(R\sin\theta)^2$ et de courant $dI = J_S\, R\, d\theta = J_0\, R\sin\theta\, d\theta$. Le moment magnétique élémentaire associé a donc pour expression : $\vec{dM}(\theta) = \pi J_0 R^3 \sin^3\theta\, d\theta\, \vec{e_z}$.

4- Moment magnétique total. Il suffit d'intégrer entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, d'où :

$$\vec{M_S} = \pi J_0 R^3 \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\, \vec{e_z} = \frac{4}{3}\pi R^3 J_0\, \vec{e_z}$$

II- Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

II-1 Propriétés du courant et du champ. Conséquences

1- Montrer que dans un supraconducteur parfait en régime stationnaire, le courant volumique est nul.

La forme locale du théorème d'Ampère s'écrit : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J}$.

Si $\vec{B}$ est nul, alors $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ et donc $\vec{J} = \vec{0}$.

2-(a) Continuité de B_N. La relation de passage du champ $\vec{B}$ à travers une nappe de courant s'écrit : $\vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0\vec{J_S}\wedge\vec{n_{12}}$. Cela implique $\left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right)\cdot\vec{n_{12}} = 0$ ou encore $B_{2\mathrm{N}} = B_{1\mathrm{N}}$.

2-(b) Champ extérieur tangent ? Le champ étant nul à l'intérieur de la sphère et la composante normale du champ étant continue, la composante normale du champ est donc également nulle sur la surface extérieure de la sphère : le champ extérieur est donc tangent à la sphère supraconductrice.

2-(c) Propriété correspondante du champ électrique ? Pour le champ électrique, la relation de passage s'écrit : $\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n_{12}}$. En conséquence, la composante tangentielle du champ électrique est continue. Le champ électrique est normal à la surface de la sphère.

3-(a) Discontinuité de B_T. La relation de passage du champ $\vec{B}$ à travers une nappe de courant s'écrit : $\vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0\vec{J_S}\wedge\vec{n_{12}}$. Cela implique la discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$ orthogonale au courant de surface $\vec{J_S}$, soit : $B_{\mathrm{T}2} - B_{\mathrm{T}1} = \mu_0 J_S$.

3-(b) Existence d'une nappe de courant surfacique. Le champ est nul à l'intérieur de la sphère et peut ne pas être nul à l'extérieur pour ce qui est de sa composante tangentielle du fait de l'existence de courants surfaciques obéissant à la relation de discontinuité : $\overrightarrow{J_S} = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{n_{\text{ext}}} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$.

3-(c) Théorème d'électrostatique correspondant ? Il s'agit bien sûr du théorème de Coulomb exprimant le champ électrique à la surface d'un conducteur chargé. Le champ est nul à l'intérieur du conducteur et peut être non nul à l'extérieur dès lors qu'il existe des charges de surface telles que : $\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$.

4- Exprimer $\mathbf{J}_S$ en fonction de B_a, θ et $\mathbf{e}_\varphi$. À la surface de la sphère, le champ prend la valeur $\overrightarrow{B_R} = -\dfrac{3}{2}B_a \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$. Nous en déduisons la valeur de $\overrightarrow{J_S}$:

$$\overrightarrow{J_S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{B_R} = -\frac{3B_a \sin\theta}{2\mu_0}\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = -\frac{3B_a \sin\theta}{2\mu_0}\overrightarrow{e_\varphi}$$

5- Champ créé dans la sphère : Ce problème a déjà été traité à la question I.2.1 avec $J_0 = -\dfrac{3B_a}{2\mu_0}$. Nous avions démontré que $\vec{B}(\mathrm{O}) = \dfrac{2}{3}\mu_0 J_0\,\overrightarrow{e_z} = -\dfrac{2}{3}\mu_0\dfrac{3B_a}{2\mu_0}\overrightarrow{e_z} = -B_a\,\overrightarrow{e_z}$.

Conclusion : le champ résultant à l'intérieur de la sphère est bien nul. $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = -B_a\,\overrightarrow{e_z} + B_a\,\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$.

6- *Application numérique* : $J_S\left(R, \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{3\times 1}{2\times 4\pi\times 10^{-7}} = 1,2\times 10^{-6}\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$

7- Expliciter le moment magnétique induit. $\overrightarrow{M_S} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\,J_0\,\overrightarrow{e_z} = -\dfrac{2\pi R^3}{\mu_0}B_a\,\overrightarrow{e_z}$.

Application numérique : $\left|\overrightarrow{M_S}\right| = \dfrac{2\pi\times 10^{-6}}{4\pi\times 10^{-7}}\times 1 = 5,0\ \mathrm{A\cdot m^2}$

II-2 Rupture de supraconductivité. État intermédiaire.

1- En quel endroit de la surface se produira en premier le phénomène ? La supraconductivité cesse tout d'abord au niveau du cercle équatorial, pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, là où le module du champ prend la valeur maximale $\dfrac{3}{2}B_a$.

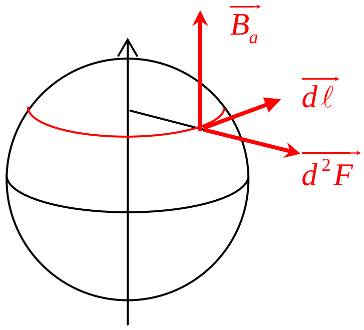
2- Courant surfacique critique : $J_c = \dfrac{B_c}{\mu_0}$. Pour le niobure d'étain : $J_c = \dfrac{12,5}{4\pi\times 10^{-7}} = 9,94\times 10^6\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$

3- Champ maximal. Comme cela a été vu à la question I.1.3. le champ maximal est tel que $B_c = \dfrac{3}{2}B_1$. Pour qu'il ne se produise pas de phénomène de supraconduction il faut donc que : $B_1 < \dfrac{2}{3}B_c \quad = 8,33\ \mathrm{T}$.

4- Montrer que la sphère n'est pas entièrement dans son état normal. À partir de cette valeur B_1, la sphère ne va cesser d'être supraconductrice que dans sa bande équatoriale. Le reste de la sphère est encore supraconducteur : c'est en cela que consiste l'état intermédiaire dans lequel la sphère est partiellement supraconductrice et partiellement « normale ».

5- Champ pour lequel cesse l'état intermédiaire. En particulier, la sphère restera supraconductrice aux pôles tant que l'on n'atteint pas la valeur critique aux pôles, ce qui correspond à $B_2 < B_c$.

II-3 Lévitation magnétique



1- Force résultante nulle ? Pour chaque élément de courant de chaque couronne de courant, la force exercée par le champ appliqué est donnée par la formule de Laplace : $\overrightarrow{d^2F} = dI\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B_a}$. Le vecteur $\overrightarrow{B_a}$ définissant l'axe polaire, $\overrightarrow{d\ell}$ est orthoméridien et $\overrightarrow{d^2F}$ est en conséquence une force radiale en coordonnées cylindriques. La résultante de ces forces est nulle pour chaque couronne et donc aussi nulle pour la sphère toute entière.

2- Énergie potentielle d'interaction du dipôle : $d\varepsilon_{pm} = -\overrightarrow{dM_s} \cdot \overrightarrow{B_a} = -\left(-K\,\overrightarrow{dB_a}\right) \cdot \overrightarrow{B_a} = d\left(\frac{1}{2}KB_a^{\,2}\right)$.

On en déduit : $\varepsilon_{pm} = \frac{1}{2}KB_a^{\,2} + C^{te}$

3- Lévitation magnétique. L'équilibre est stable quand l'énergie potentielle est minimale, cela implique que la sphère sera repoussée vers les régions de champ faible.