UE LP112
Section CNED-MIME & PCME

Licence de Sciences et Technologie

Année universitaire 2010-2011

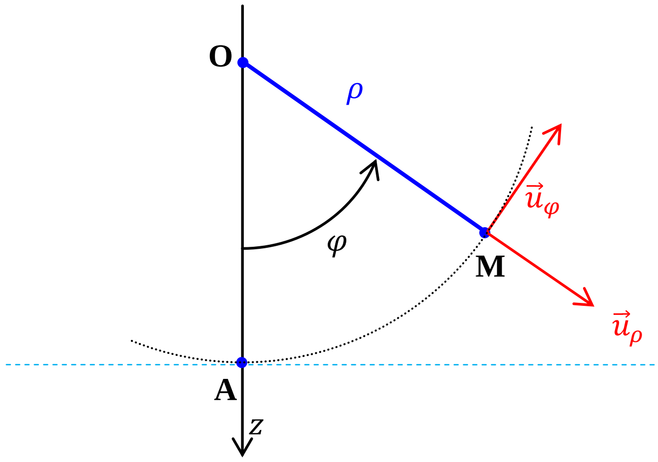
Devoir de physique numéro 1

MOUVEMENT D'UNE BALANCOIRE

On se propose d'étudier le mouvement d'une balançoire constituée d'une nacelle métallique avec un enfant à l'intérieur, suspendue à un axe horizontal fixe par deux tiges rigides.

Pour simplifier l'étude, on assimile l'ensemble {nacelle + enfant} à un objet ponctuel M de masse m = 50,0 kg fixé à l'extrémité d'une tige sans masse de longueur $\ell = 3{,}0$ m. On néglige tous les frottements. Le champ de pesanteur terrestre, $\vec{g}$, est supposé uniforme et on prendra g = 9,80 m.s^{-2}. On travaille dans un référentiel lié à la Terre qu'on supposera galiléen.

Schématisation du problème et définition des variables dans le plan d'oscillation :



On notera O le point de l'axe horizontal fixe autour duquel oscille la balançoire. L'axe Oz correspond à l'axe vertical orienté vers le bas et représente ici l'axe polaire. M représente l'objet ponctuel {nacelle + enfant}, A est le point le plus bas de la trajectoire de la nacelle.

I. Cas des petites oscillations.

1 En utilisant des coordonnées polaires (ρ, φ) dans le plan d'oscillation,

a) Exprimer à un instant t quelconque la vitesse de la nacelle M en fonction des variables $\rho(t), \varphi(t)$ et de leurs dérivées, et des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$.

b) Exprimer son accélération au même instant.

c) Ecrire la loi de la dynamique et la projeter sur les deux directions $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$. (On convient de noter $\vec{T} = -T(t)\vec{u}_\rho$ le vecteur représentant la tension de la tige.)

d) Exprimer la tension $T(t)$ de la tige en fonction de $\varphi(t)$ et de sa dérivée par rapport au temps. (On notera $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$.)

2 On étudie le cas des « *petites* » oscillations : c'est-à-dire le cas où, à tout instant, $\varphi^2(t) \ll 1$. (On pourra alors faire les approximations $\sin\varphi(t) \sim \varphi(t)$ et $\cos\varphi(t) \cong 1$.) Pour cela, à un instant que l'on considérera comme l'instant initial ($t = 0$), on lâche la balançoire sans vitesse initiale d'une position M_0 telle que l'angle φ_0 soit petit.

a) Donner la solution $\varphi(t)$ de l'équation du mouvement.

b) Donner la période du mouvement et préciser sa valeur numérique.

c) En déduire la tension $T(t)$ à tout instant.

II. Cas général : oscillations quelconques.

1

a) Montrer que le travail de la tension T de la tige est constamment nul.

b) Ecrire, à une constante près, l'énergie potentielle dont dérive la force de pesanteur en fonction de m, g, ℓ et φ. On déterminera ensuite la constante de façon à ce que l'énergie potentielle de pesanteur soit nulle au point le plus bas de la trajectoire de la nacelle, dénoté A (voir figure.)

c) En déduire l'énergie potentielle du système S {tige + nacelle + enfant + Terre}

2 On lâche la balançoire sans vitesse initiale d'une position M_0 quelconque repérée par l'angle φ_0. (φ_0 est un angle quelconque, qui peut cette fois être grand.)

a) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique totale de S entre la position initiale et une position quelconque.

b) En déduire une relation entre $\dot{\varphi}^2$ et $\cos\varphi$.

c) Montrer que cette relation permet de retrouver une des équations obtenue en I-c).

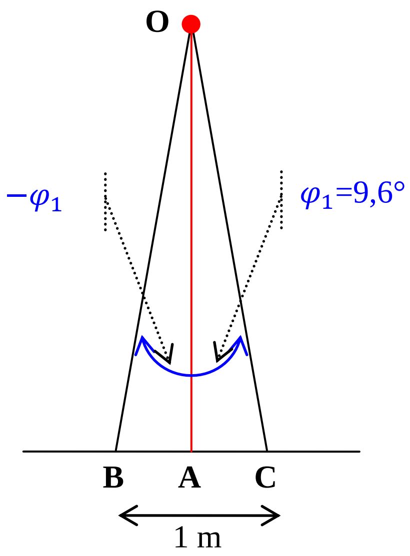
3

a) Déterminer la vitesse minimale à communiquer à la nacelle au point le plus bas pour qu'elle puisse faire un tour complet. (On suppose l'enfant solidement attaché à la nacelle.) Faire l'application numérique.

b) On considère maintenant que la nacelle est suspendue à l'axe par une corde inextensible. On désire encore faire accomplir un tour complet à la balançoire mais on veut que la corde reste constamment tendue.

- Ecrire cette condition.
- Déterminer la vitesse initiale à communiquer à la nacelle au point le plus bas pour qu'elle puisse faire un tour complet. Faire l'application numérique et comparer cette vitesse à celle obtenue en 3a) dans le cas de la tige rigide.

4 Les vitesses initiales obtenues ci-dessus étant très élevées, on ne peut les communiquer en une seule fois. On opère alors de la manière suivante : on pousse la nacelle lors de son passage au point le plus bas. Plus précisément, on pousse sur une longueur de 1 m, centrée en A, en exerçant une poussée F de 500 N. On admet que le déplacement est pratiquement rectiligne horizontal (en effet, il correspond approximativement pour φ à l'intervalle de valeurs $[-(0{,}5)/3\ ;\ (0{,}5)/3]$, c'est-à-dire [-9,6° ; 9,6°], et donc pour $\cos\varphi$ à l'intervalle [0,986 ; 1,0]).



a) Pour la première poussée, la balançoire étant dans la position φ = -9,6° (point B), on pousse sans vitesse initiale sur longueur d = 1 m, entre les points B et C. Déterminer en fonction de F, m et d la vitesse v_1 prise par la nacelle en fin de poussée (lorsqu'elle arrive au point C).

b) Pour les poussées ultérieures, on laisse la nacelle accomplir son oscillation, et, lorsqu'elle redescend et passe par le point B (en venant de la gauche sur la figure), on exerce la même poussée constante F jusqu'en C. Déterminer de même la vitesse v_2 en C à l'issue de la deuxième poussée.

c) En déduire la vitesse v_n en C à l'issue de la n$^{\text{ième}}$ poussée.

d) Combien de poussées semblables doit-on exercer pour que, dans le cas de la tige rigide, la balançoire accomplisse un tour complet ?

e) Quelles sont les durées de la première et de la dernière poussée (si on exerce le nombre de poussées déterminé en d)) ?

5 Bonus : étude de cas.

On se place dans le cas où la nacelle est reliée au point O par une corde inextensible de longueur ℓ. On communique à la nacelle une vitesse initiale v_0 au point A. Lorsque la nacelle parvient en un point E de coordonnée $z_E = -\frac{1}{2}\ell$, la tension de la corde s'annule. On exprimera toutes les réponses sous forme littérales.

a) Déterminer la vitesse v_0 et la vitesse de la nacelle en E.

b) Quelle est alors la trajectoire de la nacelle au-delà du point E ? Caractériser cette trajectoire en donnant son point le plus haut et son point le plus bas.

c) Faire un schéma.