

Devoir de physique n°1

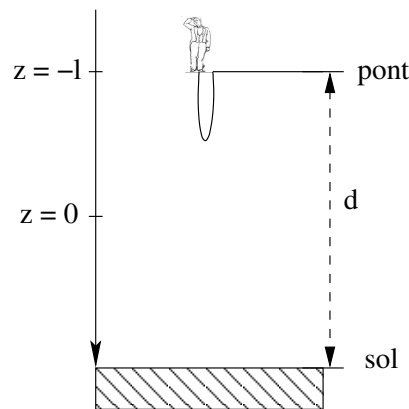
L1-S2 PHYS 103

2011

à distribuer la semaine du 14 février, à rendre la semaine du 28 février

Le saut à l'élastique

Vous vous préparez à sauter avec un élastique accroché à vos pieds, d'un pont d'une hauteur d . Le but de ce problème est de déterminer la durée du saut et la longueur à vide ℓ maximale de l'élastique pour que vous ne vous fracassiez pas contre le sol. On suppose que vous sautez avec une vitesse initiale nulle, la chute sera donc verticale. On assimilera le sauteur à une masse ponctuelle m , que l'on repère par sa côte z . L'axe Oz est vertical dirigé vers le bas. L'origine des coordonnées O est située à une hauteur $d - \ell$ du sol, c'est à dire que la côte du pont est $z = -\ell$. On négligera la masse de l'élastique, et on supposera que ce dernier réagit comme un ressort, c'est à dire qu'il exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement. On notera k la constante de rappel du ressort. De plus on négligera les frottements.



1 Préliminaires (2 points)

1. Vous êtes immobile suspendu à l'élastique. Déterminer votre côte z_e en fonction de votre masse m , de l'accélération de la pesanteur g et de k .
2. Montrer qu'au cours du saut, il y a deux phases différentes : $z < 0$ et $z > 0$. Pour chacune des phases, faites un bilan des forces qui s'appliquent sur le sauteur. On fera un schéma représentant les vecteurs forces et on donnera leurs expressions en fonction des paramètres du problème et de la côte z .
3. Le vendeur d'élastiques vous donne la caractéristique de ses élastiques de la façon suivante : "avec une tension de 2000 N l'élongation est de 100%"
 - (a) En déduire la valeur numérique du produit $k\ell$. On prendra $g \simeq 10$.
 - (b) On suppose que votre masse est $m = 70$ kg, en déduire la valeur numérique du rapport $\frac{\ell}{z_e}$.

2 Détermination de ℓ (8.5 points)

1. L'objectif est d'obtenir l'expression de la côte z_m du point le plus bas que vous atteignez au cours du saut, en fonction de ℓ et z_e . Pour cela, nous allons utiliser le théorème de l'énergie cinétique :
 - (a) Donner l'expression du travail du poids $W_{-\ell \rightarrow z_m}(\vec{P})$ entre le point de départ $z = -\ell$ et le point $z = z_m$, en fonction de m , g , ℓ et z_m .
 - (b) Donner l'expression du travail de la tension $W_{-\ell \rightarrow z_m}(\vec{T})$ entre le point de départ $z = -\ell$ et le point $z = z_m$, en fonction de k et z_m .
 - (c) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, en déduire que z_m est solution d'une équation du second degré. Résoudre cette équation et montrer que :

$$\frac{z_m}{z_e} = 1 + \sqrt{1 + 2\frac{\ell}{z_e}}.$$

2. Déterminer la valeur numérique de $\frac{z_m}{z_e}$.
3. En déduire la valeur maximale $\ell_{\max}$ de ℓ . On exprimera $\ell_{\max}$ en fonction de d et des deux rapports $\frac{z_m}{z_e}$ et $\frac{z_e}{\ell_{\max}}$.
4. Calculer la valeur numérique de $\ell_{\max}$ sachant que $d = 30$ m. On supposera dans la suite du problème que la longueur à vide de l'élastique a cette valeur. C'est à dire que $\ell = \ell_{\max}$.
5. Jusqu'à quelle hauteur remontez vous après avoir atteint la côte z_m ? Justifier précisément votre réponse.

3 Quelques points particuliers de la trajectoire (4 points)

Pour résoudre ces questions, on ne demande pas de déterminer l'équation horaire du mouvement.

1. Déterminer le point de la trajectoire où la norme $\|\vec{a}\|$ de votre accélération est nulle.
2. Déterminer le point de la trajectoire où $\|\vec{a}\|$ est maximale.
3. Exprimer la valeur maximale de la norme de l'accélération a_m en fonction de g et du rapport $\frac{z_m}{z_e}$. Faites l'application numérique. Qu'en pensez vous au plan des sensations ?
4. Déterminer le point de la trajectoire où la vitesse est nulle.
5. Déterminer le point de la trajectoire où la norme de votre vitesse est maximale.
6. Donner l'expression de cette vitesse maximale v_m en fonction de g et ℓ . Faites l'application numérique.

4 Durée du saut

On veut déterminer le temps écoulé entre le départ du pont ($z = -\ell$) et le point le plus bas de la trajectoire ($z = z_m$).

4.1 Première phase du saut $z \leq 0$ (1.5 points)

On considère la première phase du saut du point $z = -\ell$ au point $z = 0$.

1. Donner l'expression de la position $z(t)$ en fonction du temps, en un point quelconque de la trajectoire.
2. En déduire la durée T_1 de la première phase du saut, en fonction de ℓ et g .
3. Déterminer votre vitesse v_o au point $z = 0$ en fonction de ℓ et g .

4.2 Seconde phase du saut $z \geq 0$ (7 points)

On considère maintenant la seconde phase du saut, du point $z = 0$ au point $z = z_m$. Pour cette seconde phase, on choisira l'origine des temps de telle sorte qu'à $t = 0$ on ait $z(t = 0) = 0$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour la seconde phase du saut et en déduire l'équation différentielle du mouvement c'est à dire l'équation différentielle que doit satisfaire $z(t)$.
2. Donner l'expression de la solution générale (l'ensemble des solutions) de cette équation différentielle.
3. Donner l'expression de l'unique solution qui satisfait aux conditions initiales en $z = 0$.
4. En déduire que la durée de la seconde phase du saut peut s'écrire de la façon suivante :

$$T_2 = \sqrt{\frac{z_e}{g}} \left\{ \pi - \arcsin \left[\left(\frac{z_e}{2\ell} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

où $\arcsin(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $\sin(x)$.

5. En déduire la durée totale du saut en secondes.