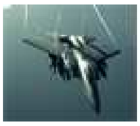
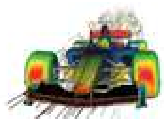
     

Licence L3 de Physique et Mécanique **Année 2010–2011**

— Phys M302 —

Mécanique Lagrangienne

Travaux dirigés

(Version du 4 novembre 2010)

Caroline Nore & Luc Pastur

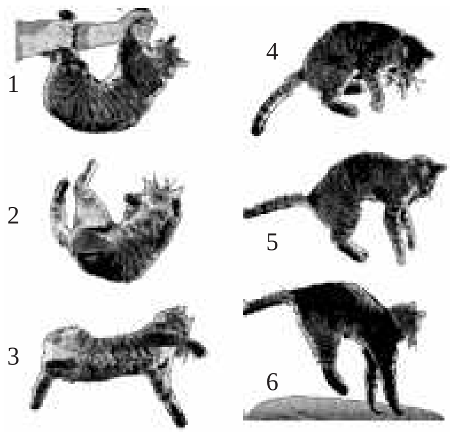


Table des matières

1 — Systèmes de coordonnées, principe de la dynamique **3**

2 — Énergie **6**

3 — Moment cinétique **8**

4 — Dynamique dans un référentiel non galiléen **12**

5 — Coordonnées généralisées ; classification des contraintes **14**

6 — Equations de Lagrange - I **16**

7 — Equations de Lagrange - II **18**

8 — Forces centrales **21**

9 — Cinématique du solide **24**

10 — Annexe 1 : Analogies dynamique linéaire / angulaire **31**

11 — Annexe 2 : Moments d'inertie usuels **32**

1 — Systèmes de coordonnées, principe de la dynamique

Exercice 1 : Vitesse, accélération et énergie cinétique

1) Écrire la vitesse, l'accélération et l'énergie cinétique en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques. Interprétez chacun des termes de l'accélération en coordonnées polaires.

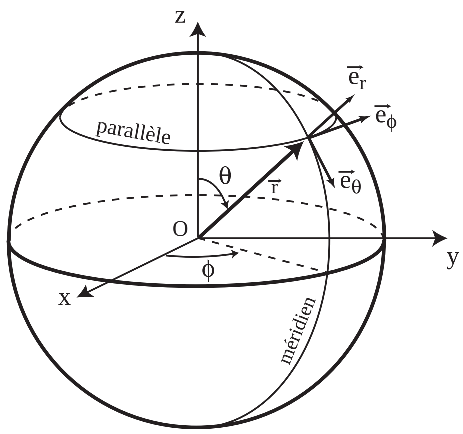
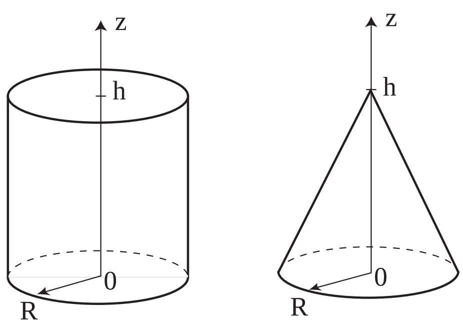


FIGURE 1 – Coordonnées sphériques. L'angle ϕ correspond à la longitude, et $\lambda = \pi/2 - \theta$ à la latitude.

2) Écrire la vitesse et l'énergie cinétique en coordonnées sphériques.
3) Une particule se déplace à vitesse $||\vec{v}||$ constante. Montrer que son accélération est toujours perpendiculaire à la vitesse.

Exercice 2 : Intégrales multiples



1) Rappeler l'expression d'un élément infinitésimal de volume d^3V en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
2) Retrouver le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h ; d'un cône de rayon R et de hauteur h.

Exercice 3 : L'oscillateur harmonique

On considère une masse m pouvant se déplacer horizontalement et sans frottement sur un axe Ox. Cette masse est fixée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0 dont l'autre extrémité est fixée à un support.

a) Écrire le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), et identifier par analyse dimensionnelle la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur en fonction des paramètres du problème. Donner la loi $x(t)$ sachant que la masse est lâchée sans vitesse initiale à une distance A_0 de sa position d'équilibre.

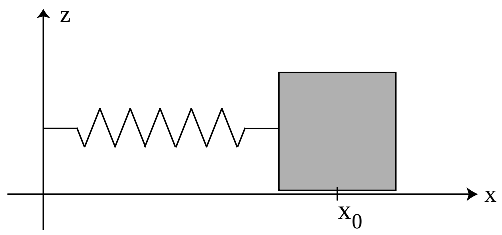
b) On suppose maintenant qu'il existe une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive (frottement fluide de type visqueux). Le signe moins signifie que cette force est opposée à la direction du mouvement. En supposant que la nouvelle trajectoire soit de la forme $x(t) = A_0 e^{\alpha t}$, montrer que α vérifie l'*équation caractéristique* suivante :

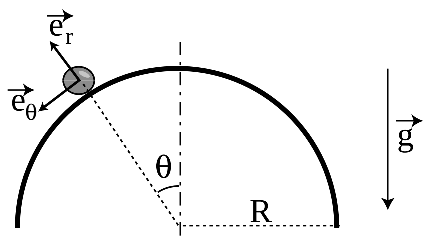
$$\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Dans le cas $\omega_0 \gg \lambda$ (frottement faible), écrire la solution sous la forme d'une oscillation amortie $x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t$, où l'on identifiera τ. Que devient la pseudo-période ω dans la limite $\lambda \to \omega_0$? Donner l'allure de la fonction $\omega = f(\lambda)$.

On revient au mouvement horizontal sans frottement. On suppose maintenant que la masse subit une excitation périodique de pulsation Ω, imposée de l'extérieur, lui communiquant ainsi une force supplémentaire $\vec{F}(t) = F_0 \cos \Omega t\, \vec{e_x}$ (il peut s'agir par exemple d'une charge dans un champ électrique, d'une membrane dans une onde acoustique...). La pulsation naturelle ω_0 de l'oscillateur va donc être "dérangée" par la nouvelle pulsation Ω, *a priori* différente de ω_0, qu'on essaie de lui imposer.

c) En admettant que l'oscillation du système se synchronise avec la fréquence d'excitation Ω choisie, on pourra écrire $x(t) = A \cos \Omega t$. Écrire l'amplitude de l'oscillation A en fonction de la pulsation propre ω_0 et de la pulsation imposée par l'extérieur Ω. Donner l'allure de la courbe $A = f(\Omega)$, et discuter les situations $\Omega \ll \omega_0$ et $\Omega \gg \omega_0$. Le comportement pour $\Omega \sim \omega_0$ est-il physique ? Connaissez-vous des illustrations de ce phénomène ?





Exercice 4 : La bille sur un cylindre

On pose une bille en haut d'un cylindre horizontal. Elle est évidemment en équilibre instable, et va tomber. Nous allons chercher pour quel angle elle quitte le cylindre.

On admet que la bille, de masse m, puisse être considérée comme ponctuelle, et qu'elle glisse sans frottement sur le cylindre de rayon R. Sa position est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. La bille est poussée de sa position initiale $\theta = 0$ avec une vitesse v_0 infinitésimale.

a) Écrivez le PFD, projeté sur le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

b) Déterminez la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ en intégrant le PFD projeté selon $\vec{e}_\theta$ (On peut également obtenir cette loi à partir de la conservation de l'énergie, cf TD suivant).

c) En reportant dans le PFD projeté selon $\vec{e}_r$, en déduire la réaction du support en fonction de θ. A quel angle la bille quitte-t-elle le cylindre ? Avec quelle vitesse ? Que devient alors sa trajectoire ?

Révisions :

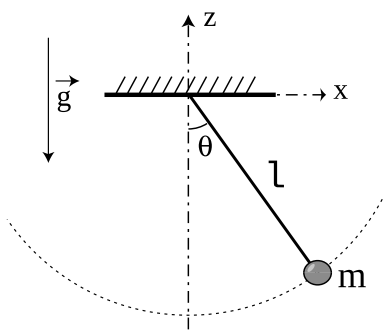
On reprendra si nécessaire quelques exercices classiques de DEUG. On pourra en particulier prolonger l'exercice 3 en étudiant l'oscillateur forcé avec amortissement.

Bibliographie conseillée :

– Bocquet, Faroux, Renault, Toute la Mécanique, 1 tome, Dunod (2002)
– Faroux, Renault, Mécanique, 2 tomes, Dunod (1996-97)
– Gié, Sarmant, Mécanique, 2 tomes, Tec Doc (1985 et 1996-97)
– Boutigny, Mécanique 1, Vuibert.

2 — Énergie

Exercice 1 : Le pendule simple

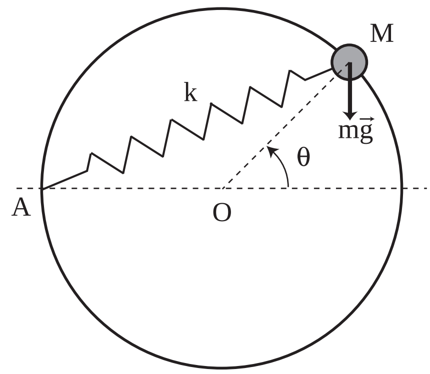


Une bille de masse m est suspendue par une tige de masse négligeable à un support fixe. On note la position de la bille par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale.

a) Discuter les forces dans ce problème, et justifier que le système est conservatif. De la conservation de l'énergie, déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) Résoudre cette équation dans l'approximation des petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$) si l'on lâche la bille avec un angle θ_0 sans vitesse initiale. Tracer l'allure de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction du temps.

Exercice 2 : Stabilité d'un équilibre



Une perle de masse m glisse sans frotter le long d'un cercle de rayon R. Elle est soumise à son poids $m\vec{g}$, ainsi qu'à la force de rappel d'un ressort, fixé en A, de raideur k et de longueur à vide nulle. La position de la bille est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la direction horizontale.

a) Calculer l'énergie potentielle $U(\theta)$, et en tracer l'allure. Discuter graphiquement les positions d'équilibre et leur stabilité.

b) Montrer que, pour des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable, ce système est analogue à un oscillateur harmonique, dont on déterminera la constante de raideur effective K.

Exercice 3 : Travail, énergie et puissance

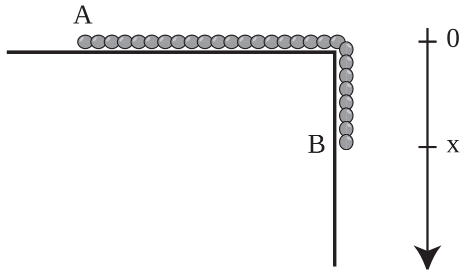
On élève à une hauteur h, avec une accélération constante a, un objet de masse m initialement posé sur le sol.

a) Quel travail doit-on fournir ? Pourquoi est-il supérieur à mgh ? Sous quelle forme est son énergie mécanique totale ?

b) Quelle puissance est nécessaire pour élever cet objet ? Comment la minimiser ?

Exercice 4 : La chaîne tombante

Une chaîne inextensible, de longueur totale L et de masse linéique $\mu = dm/dx$, repose sur une table horizontale, et son extrémité B pend dans le vide sur une longueur x. A l'instant $t = 0$ on lâche la chaîne sans vitesse initiale. On suppose les frottements négligeables.



a) Exprimer les énergies cinétique, potentielle et mécanique de la chaîne en fonction de la distance x de B par rapport au plan de la table ainsi que de sa vitesse $\dot{x}$.

b) Justifier que ce système est conservatif, et en déduire l'équation du mouvement. Étudier et tracer les variations de $x(t)$ et $v(t)$.

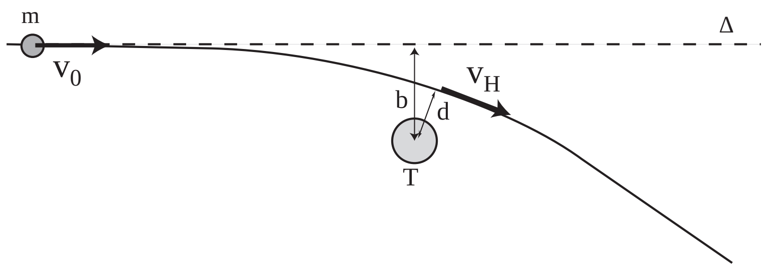
c) Au bout de combien de temps la chaîne quitte-t-elle la table ? Avec quelle vitesse ?

Révisions :

- On pourra reprendre la résolution de l'oscillateur harmonique sans frottement (TD 1) en utilisant la conservation de l'énergie ($E_p = \frac{1}{2}kx^2$).
- Exercices supplémentaires suggérés : n^o 8, 10 et 15 du chap. 5 du livre *Exercices de mécanique*, Dedonder, Mouchet, Schmauss et Valentin, Ed. Hermann, 1989.
- Sur le pendule simple : La correction à la fréquence d'oscillation lorsque l'approximation des petites oscillations ne s'applique plus peut être trouvée dans l'exercice 9 du chapitre 11 de Bertin *et al*, t. 1.
- Lorsqu'une bille rebondit sur un mur, elle repart en faisant un angle égal à l'angle d'incidence (= angle entre la direction d'arrivée et la normale au mur). Décrivez ce qui se passe du point de vue de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

3 — Moment cinétique

Exercice 1 : Danger météorite



Une météorite de masse m a, très loin de la Terre, une vitesse $v_0 = 30$ km/s portée par un axe Δ situé à une distance b du centre de la Terre. Sa trajectoire va être déviée par l'attraction de la Terre, et la météorite va passer à une distance minimale d de la Terre. On suppose que la Terre, beaucoup plus massive que la météorite, reste immobile. On veut déterminer à partir de quelle valeur de b la météorite entre en collision avec la Terre.

On donne $\mathcal{G} = 6,7\ 10^{-11}$ uSI, $M_T = 6\ 10^{24}$ Kg, $R_T = 6400$ km.

a) On se place en coordonnées polaires. Calculer le moment cinétique de la météorite par rapport à T en fonction de r et $\dot{\theta}$.

b) Montrer que le moment cinétique reste constant. Déterminer cette constante en la calculant pour $t = -\infty$, bien avant que la météorite ne ressente l'attraction de la Terre. En déduire la vitesse v_H de la météorite au point H, au moment où elle est le plus proche de la Terre (on note $d = ||\vec{TH}||$).

c) Exprimer l'énergie mécanique totale de la météorite en fonction de r et $\dot{r}$. En utilisant la conservation de l'énergie, calculer cette énergie mécanique au point H, et en déduire b en fonction de d, v_0, m, M et $\mathcal{G}$.

d) Calculer la valeur minimale de b pour que la collision n'ait pas lieu.

Exercice 2 : L'effet patineuse

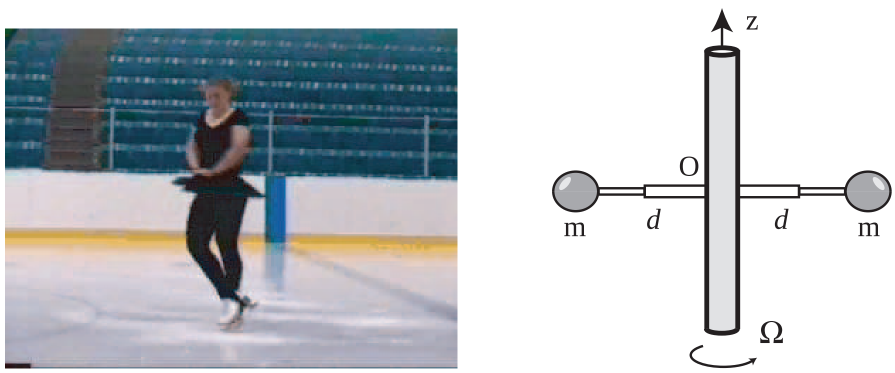


Figure 2 – Un modèle (très) simplifié de patineuse.

On cherche à comprendre le mécanisme par lequel une patineuse augmente sa vitesse angulaire en resserant les bras près du corps (voir la figure). On considère le système modèle, constitué de deux masses ponctuelles m, liées en O par deux bras telescopiques de longueur variable d à un cylindre d'axe Δ. On néglige la masse du cylindre central et des bras devant m.

a) Le système tourne initialement à vitesse angulaire Ω_0 autour de Δ, les deux masses étant à une distance initiale d_0 du cylindre. Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe $\vec{J}_{\Delta 0}$ et l'énergie cinétique E_{c0} du système.

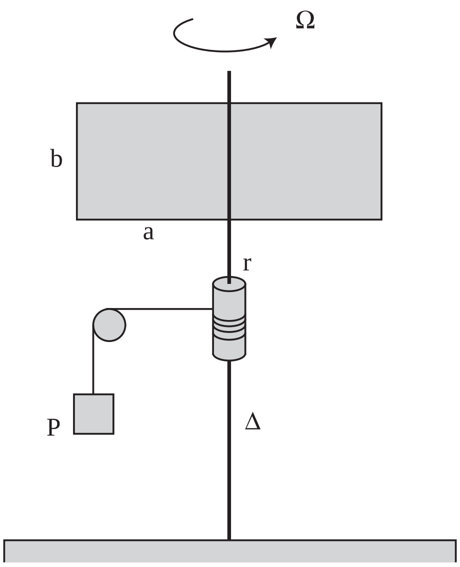
b) Un petit moteur actionne les bras, amenant les masses à une distance finale $d_f < d_0$. Décrire ce qui se passe, et calculer la nouvelle vitesse angulaire Ω_f (on donne $d_f = d_0/2$).

c) L'énergie cinétique du système est-elle conservée ? Si non, d'où vient l'apport d'énergie cinétique ?

Exercice 3 : Moments d'inertie

Calculer les moments d'inertie d'un cylindre ou d'un cône (cf. exercice 2, TD. 1) par rapport à leur axe de symétrie Δ.

Exercice 4 : Frottement sur des ailettes en rotation



On considère le dispositif constitué de deux fines ailettes rectangulaires, de dimension $a \times b$, fixées sur un axe de rotation vertical Δ pouvant pivoter sans frottement. Sur cet axe est fixé un cylindre de rayon r, autour duquel est enroulé un fil inextensible. A l'extremité de ce fil est attachée une masse m pouvant mettre en rotation les ailettes par l'intermédiaire d'une poulie, dans la direction $\Omega > 0$. Lorsqu'elles sont en rotation, les ailettes subissent un couple de frottement $\vec{\Gamma}_f$ provenant de la friction avec l'air environnant.

a) Ecrire l'équation différentielle pour la vitesse angulaire $\Omega(t)$ en fonction du moment d'inertie I des ailettes, de r, $P = mg$, et du couple de frottement Γ_f.

b) Si l'on pouvait négliger les frottements avec l'air, comment varierait $\Omega(t)$, les ailettes étant initialement immobiles ?

c) On veut exprimer Γ en fonction de Ω. On suppose que la force de frottement exercée par l'air sur un petit élément de surface $d\vec{S}$ a pour intensité :

$$dF = k\rho v^2 \, dS,$$

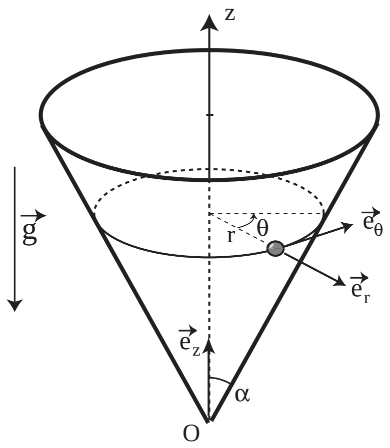
où ρ est la densité de l'air, et k une constante sans dimension. En intégrant sur toute la surface des ailettes, calculer le couple de frottement Γ_f.

d) Calculer la vitesse angulaire qu'atteint le système en régime stationnaire.

e) Au moment où le poids touche le sol, la rotation va progressivement diminuer. Calculer la loi de variation $\Omega(t)$ dans ce cas (on note $\Omega(0) = \Omega_0$).

Exercice facultatif : La bille dans un cône

Une bille de masse m et de dimension négligeable glisse sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de demi-angle au sommet α. Elle est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), et on note $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.



a) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ de la bille en fonction des coordonnées (r, θ) et de leurs dérivées. Projeter la Relation Fondamentale de la Dynamique selon $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ puis, en éliminant la réaction du support entre ces deux équations, en déduire l'équation différentielle :

$$M\ddot{r} = -\frac{mg}{\tan\alpha} + mr\dot{\theta}^2, \qquad \text{avec} \quad M = \left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)m. \tag{1}$$

b) Exprimer le moment cinétique $\vec{J}$ par rapport à O en fonction de m, des coordonnées (r, θ, z) et de leurs dérivées. Montrer que la composante J_z selon la verticale est conservée.

c) En exprimant $\dot{\theta}$ en fonction de J_z, déduire de (1) l'équation différentielle pour r sous la forme :

$$M\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r}, \tag{2}$$

où $V_{\text{eff}}(r)$ est un potentiel effectif que l'on exprimera en fonction de m, g, α et J_z. Tracer l'allure de $V_{\text{eff}}(r)$ pour $J_z = 0$ et $J_z \neq 0$.

d) Calculer l'énergie mécanique totale, et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r). \tag{3}$$

Justifier le fait que E_m est conservée. On vérifiera que cette conservation permet bien de retrouver l'équation différentielle (2).

e) On s'intéresse uniquement aux trajectoires dont les conditions initiales sont de la forme $r(0) = r_0$ et $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{e}_\theta$. Exprimer J_z en fonction de ces conditions initiales. A quelle condition sur v_0 la bille atteint-elle le fond du cône ? Quelle est alors la nature de sa trajectoire ?

f) Déterminer v_0 pour que la trajectoire soit un cercle de rayon r_0 et d'altitude constante.

Pour s'entraîner

– Retrouver, par le théorème du moment cinétique, l'équation du mouvement du pendule simple (ex. 1 du TD 2).

– Exercices supplémentaires suggérés : No 5, 11, 13 du chapitre 8 de Bertin *et al*; No 4, 12, 15 du chapitre VII de Dedonder *et al.*
– Pour gagner plus facilement au bilboquet, faites tourner la boule sur elle-même avant de la lancer…
– Pour distinguer un œuf dur d'un œuf cru, on les fait tourner sur eux-même, puis on les arrête brusquement. Lorsqu'on les relâche, l'œuf cru reprend spontanément sa rotation. Qui l'eût cru ?

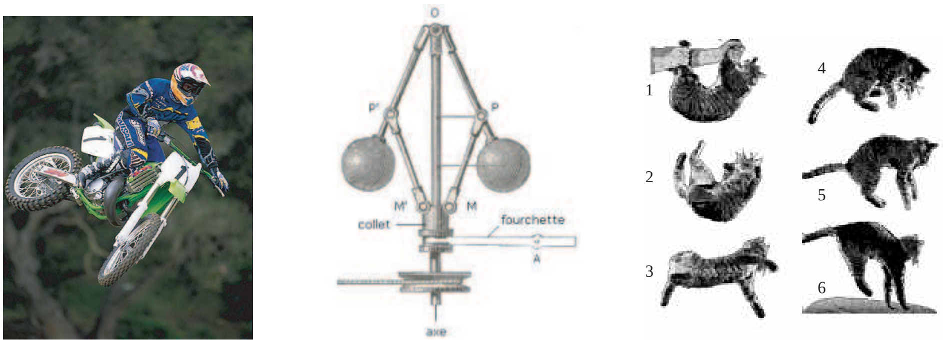


Figure 3 – Trois exemples du bon usage de la conservation du moment cinétique. Le second exemple représente un régulateur de Watt, destiné à réguler la vitesse de rotation d'un système mécanique. Pouvez-vous décrire son fonctionnement ?

Note : On pourra s'aider pour ce TD des deux Annexes en fin de fascicule.

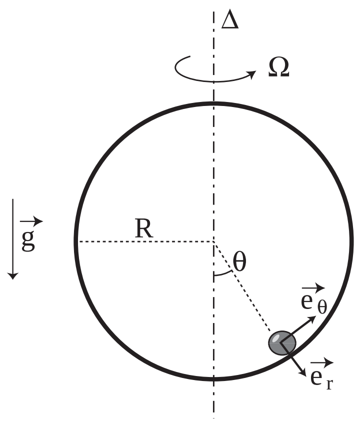
4 — Dynamique dans un référentiel non galiléen

Exercice 1 : Poids apparent dû à la rotation de la Terre

a) Quelle est la modification de l'accélération de la pesanteur à l'équateur due à la rotation de la Terre ? (rayon terrestre 6400 km) A Orsay ? Au pôle nord ?
b) Quelle devrait être la période de rotation de la Terre pour que l'accélération diminue d'un quart à l'équateur ? pour que les Equatoriens soient éjectés dans l'espace ?

Exercice 2 : La bille dans un rail tournant

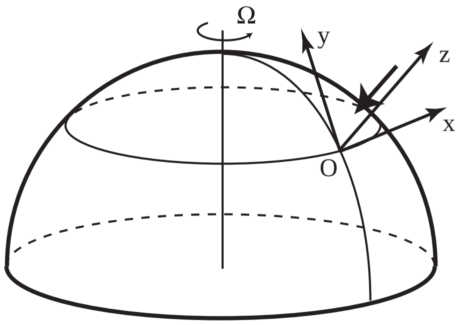
Une bille de masse m est placée dans un rail circulaire de rayon R dans le plan vertical, où elle peut glisser sans frottement. On note θ l'angle que fait la bille avec la verticale. Ce rail peut tourner autour d'un axe vertical Δ passant par le centre, à une vitesse angulaire Ω imposée par l'expérimentateur.



a) On se place dans un premier temps en l'absence de rotation du rail ($\Omega = 0$). Ecrire l'équation du mouvement pour θ(t), et l'intégrer dans l'approximation des petites oscillations.
b) On met en rotation le rail à vitesse angulaire constante Ω, et on se place dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ lié au rail. Trouver intuitivement, sans calcul, les angles d'équilibre pour Ω très faible et Ω très élevé. Écrire le PFD dans le référentiel tournant. Que peut-on dire de la force de Coriolis ?
c) Déterminer le(s) angle(s) d'équilibre de la bille θ_{eq} en fonction de Ω, et tracer l'allure de la courbe $\theta_{eq} = f(\Omega)$. Indiquer quels sont les équilibres stables ou instables.

Exercice 3 : La déviation vers l'est

On lâche sans vitesse initiale une masse m du somment d'une tour de hauteur de $h = 100$ m, à la latitude de 45^o Nord. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (d'axes $Oxyz$) lié à la tour. On ne s'intéresse ici qu'à l'effet de la force de Coriolis sur la chute de la masse, et on négligera la force d'entraînement.
a) Comparer l'ordre de grandeur de la force de Coriolis au poids, et en déduire que l'on peut considérer celle-ci essentiellement selon la direction x.
b) Intégrer les équations du mouvement dans $\mathcal{R}'$, et en déduire la position la masse lorsque celle-ci touche le sol.



c) Retrouver ce phénomène de déviation vers l'est en raisonnant sur la conservation du moment cinétique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Qu'en est-il dans l'hémisphère Sud ?

Pour s'entraîner

- On trouvera quelques exercices simples sur les référentiels non Galiléens dans le chapitre 6 du Bertin *et al* t. 1, chap. IV du Dedonder *et al*, et chap. 3 et 7 du Boutigny. La lecture du chapitre 4 de l'*Univers Mécanique*, L. Valentin, Ed. Hermann, est particulièrement conseillée.
- Calculer la force de Coriolis agissant sur un avion qui se déplace le long d'un parallèle à la vitesse de 1100 km/h. La comparer à son poids.
- Il est bien connu que la force de Coriolis est responsable du sens de rotation des tourbillons dans une baignoire qui se vide. Y croyez-vous ?

GASPARD GUSTAVE CORIOLIS (1792-1843) – *extrait de l'Encyclopedia Universalis.*

Ingénieur et mathématicien français. Assistant à l'École polytechnique à Paris, Gustave Coriolis étudie la composition des vitesses et des accélérations.

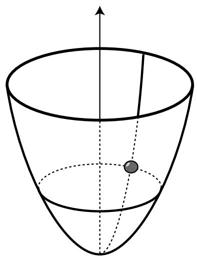
Dans un article "Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps" (1835), il montre que, pour un corps en mouvement sur la surface d'un solide en rotation, il s'introduit un terme supplémentaire dans l'accélération, équivalant à une force nommée depuis force de Coriolis. Cette force, perpendiculaire à la vitesse, a pour conséquence d'imposer une trajectoire courbe à un corps qui autrement se déplacerait de façon rectiligne. Sur terre, la force de Coriolis détermine la direction générale des vents (alizés) et des courants marins, et explique la rotation des ouragans et des tornades.

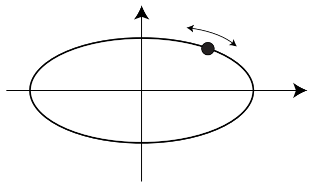
Coriolis a introduit les termes de travail et d'énergie cinétique avec leur sens actuel dans son ouvrage Du calcul de l'effet des machines (1829). Il est aussi l'auteur de la Théorie mathématique des effets du jeu de billard et du Traité de la mécanique des corps solides.

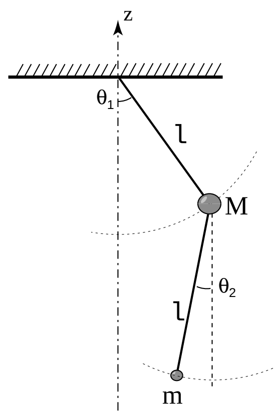
5 — Coordonnées généralisées ; classification des contraintes

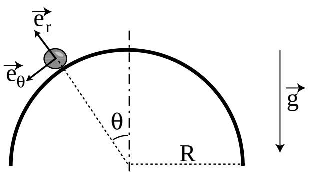
Exercice 1 : Degrés de liberté et coordonnées généralisées

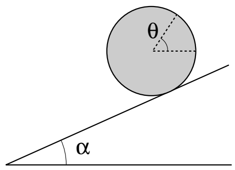
- Compter les degrés de liberté d'un système de N particules.
- Compter de plusieurs façons différentes les degrés de liberté d'un solide indéformable.
- Compter les degrés de liberté d'une toupie dont la pointe est astreinte à se déplacer sur un plan ; d'une toupie dont la pointe est astreinte à rester en un point fixe du plan ; d'un solide astreint à tourner autour d'un axe fixe.

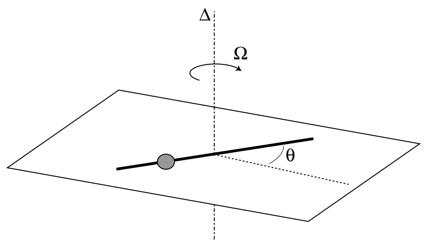












Exercice 2 : Classification des contraintes

Dire pour chacun des systèmes suivants s'il est (i) holonôme ou non-holonôme, (ii) scléronôme ou rhéonôme. Préciser leur nombre de degrés de liberté, et proposer un système de coordonnées généralisées (expliciter la fonction de liaison $f(\{q_i\}, t) - a = 0$ lorsque c'est possible, avec a une constante éventuellement non nulle).

- Un point matériel glissant sur la surface intérieure d'un paraboloïde de révolution.
- un point matériel astreint à se déplacer sur une ellipse.
- une roue roulant sur un plan ; selon une droite.
- les deux masses d'un pendule double oscillant dans un plan.
- Une masse ponctuelle glissant sur un cylindre fixe depuis son sommet.
- Un cylindre descendant sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (discuter les cas de glissement sans frottement, de roulement sans glissement, et intermédiaire).
- Un point matériel se déplaçant sans frottement sur un fil infiniment long tournant autour d'un axe horizontal Δ avec une vitesse angulaire constante.
- Une balle qui rebondit sur le sol.

– Une masse attachée à un ressort astreinte à se déplacer selon un axe.

Exercice 3 : Forces et coordonnées généralisées

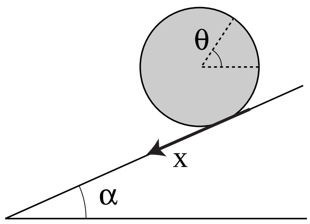
Rappel : En coordonnées cartésiennes, une force $\vec{F} = F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y}$ appliquée à un déplacement $\delta\vec{r} = \delta x\, \vec{e_x} + \delta y\, \vec{e_y}$ donne lieu à un travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y$. De manière plus générale, on définit la **force généralisée** Q_i telle que, appliquée à un déplacement δq_i, elle donne lieu à un travail élémentaire $\delta W = \sum_i Q_i\,\delta q_i$.

Les **coordonnées généralisées** $\{q_i\}$ n'étant pas nécessairement homogènes à une distance, les dimensions des nouvelles forces $\{Q_i\}$ doivent être telles que leur produit avec la coordonnée associée soit bien homogène à un travail (en Joule).

a) Dans le cas des coordonnées polaires, on a $q_1 = r$ et $q_2 = \theta$, soit

$$\delta W = Q_r\,\delta r + Q_\theta\,\delta\theta.$$

Calculer les forces généralisées $\{Q_i\}$ en fonction de la force $\vec{F}$ et de son moment par rapport à l'origine $\vec{\Gamma}_0 = \vec{r}_\wedge\vec{F}$. Que deviennent ces forces généralisées dans le cas d'une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e_r}$?



b) On considère un cylindre sur un plan incliné, et on choisit x et θ pour coordonnées généralisées. Dans chacun des cas suivants, distinguer les contraintes et les forces appliquées, et écrire le travail virtuel associé à un déplacement virtuel (compatible avec les contraintes) :
– Roulement avec glissement,
– Glissement pur (pas de frottement),
– Roulement pur (pas de glissement). Quelle est la nature de la contrainte liant x à θ dans ce cas ?

c) Dans le cas du roulement pur, si l'on choisit la coordonnée θ pour repérer la position du cylindre, identifier la force généralisée Q_θ représentant le poids du cylindre.

Pour en faire plus

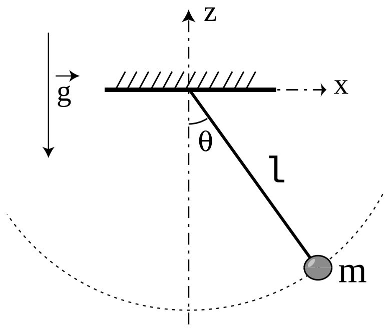
– Sur la classification des contraintes : Chapitre 1 du *Classical Mechanics*, Goldstein, Ed. Addison Wesley, et Chapitre 6 du *Principles of Dynamics*, Greenwood, Ed. Prentice Hall.
– Un point, repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y), est soumis à une force $\vec{F}$. Calculer les forces généralisées $\{Q_\eta, Q_\xi\}$ associées aux nouvelles coordonnées $\{\eta, \xi\}$ lors des changements :

$$\begin{aligned}(x,y) \quad &\to \quad (\eta,\xi) = (x+y, x-y),\\ (x,y) \quad &\to \quad (\eta,\xi) = (e^{-x/x_0}, e^{-y/y_0}).\end{aligned}$$

6 — Equations de Lagrange - I

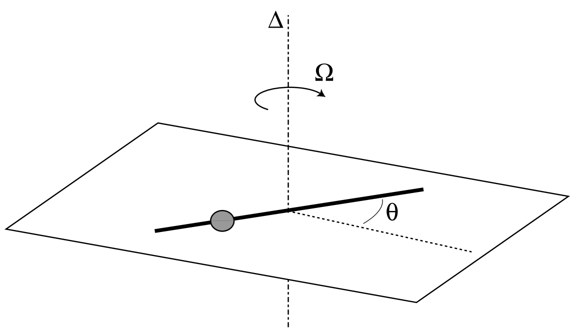
Exercice 1 : Approche lagrangienne du pendule simple

On reprend le problème du pendule simple (que l'on sait déjà traiter par le Principe de la Dynamique, le théorème du moment cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique. . .) Une masse m est suspendue à une tige rigide, de longueur l et de masse négligeable, et oscille sans frottement dans le plan vertical. Sa position est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale.



a) Détailler les forces et les contraintes de ce système. Le système est-il holonôme ? Scléronôme ou rhéonôme ? Discuter ces questions dans le cas où la tige rigide est remplacée par un fil.
b) Combien y a-t-il de degré de liberté ? Quelle coordonnée (généralisée) utiliser ? Écrire le Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$, et en déduire l'équation du mouvement à partir de l'équation de Lagrange.

Exercice 2 : L'anneau coulissant sur une tige tournante



Un anneau de masse m coulisse sans frottement sur une tige tournant dans le plan horizontal autour d'un axe vertical Δ à vitesse angulaire Ω constante.
a) Combien l'anneau a-t-il de degré de liberté ? Quelle(s) coordonnée(s) généralisée(s) choisir ?
b) Écrire l' (les) équation(s) de Lagrange et en déduire la trajectoire de l'anneau.
c) Discuter la résolution de cet exercice, en comparant avec la résolution "classique" par le Principe Fondamental de la Dynamique.

Exercice 3 : Invariant de Jacobi

On considère un système mécanique décrit par un ensemble $\{q_i\}$ de coordonnées généralisées, tel que le Lagrangien ne dépende pas explicitement du temps : on a $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ (mais $d\mathcal{L}/dt \neq 0$).

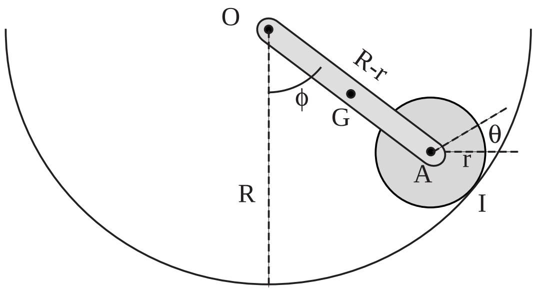
a) Calculer $d\mathcal{L}/dt$ en fonction des dérivées partielles par rapport aux q_i et $\dot{q}_i$, et montrer que l'on a :

$$\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = C = \text{cste.}$$

b) Identifier ce que vaut cette constante dans le cas d'une particule à 1 degré de liberté dans un potentiel $V(x)$.

c) Identifier ce que vaut cette constante dans l'exercice de l'anneau coulissant sur une tige tournante, et interpréter.

Exercice 4 : Pendule roulant



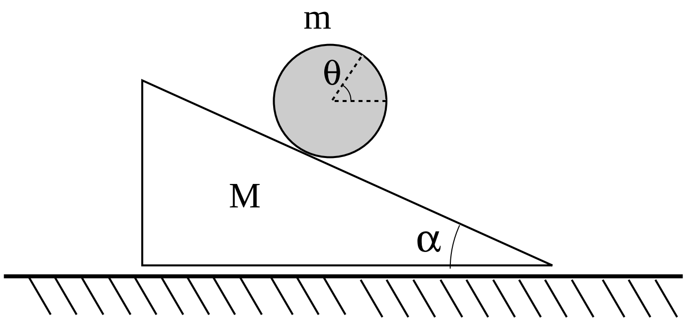
Calculer la période des petites oscillations du système mécanique représenté sur la figure ci-dessus. Un disque, de masse m et de rayon $AI = r$, roule sans glisser à la surface intérieure d'un support circulaire de rayon R (I est le point de contact disque-support). Ce disque est relié au centre O du cercle par une tige, de masse M et de longueur $OA = 2OG = R - r$.

Quelques exercices supplémentaires

- Entraînez-vous à retrouver, par les équations de Lagrange, l'équation du mouvement d'une chute libre ou d'un oscillateur harmonique.
- Exercices 6-5 et 6-17 du "Principles of Dynamics", D. Greenwood, Ed. Prentice Hall.

7 — Equations de Lagrange - II

Exercice 1 : Le cylindre roulant sur un patin incliné glissant



Un cylindre, de masse m et de rayon R, roule sans glisser sur un patin triangulaire. Ce patin est posé sur le sol, sur lequel il peut glisser sans frottement. On note α l'angle du patin avec l'horizontale et M sa masse.

Lorsque l'on lâche le cylindre, celui-ci va rouler vers la droite. Par conservation de la quantité de mouvement, il est clair que le patin devra glisser vers la gauche. Nous allons chercher à déterminer les trajectoires de ces deux éléments.

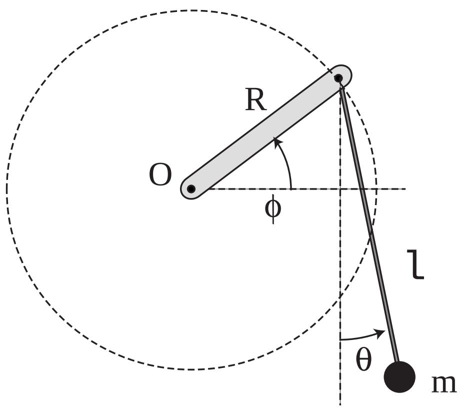
a) Quelles sont les contraintes de ce système ? De quelle nature sont ces contraintes ?

b) Combien le système a-t-il de degrés de liberté ? Quelles coordonnées généralisées choisir ?

c) Écrire les énergies cinétique T et potentielle V, ainsi que le lagrangien $\mathcal{L}$. Pour l'expression de T, on cherchera à exprimer la vitesse du centre de masse du cylindre par rapport à une référence fixe.

d) Écrire les équations de Lagrange pour chacune des coordonnées, et en déduire les trajectoires des deux éléments du système.

Exercice 2 : Un pendule forcé



On considère un pendule fixé à l'extrémité d'un bras tournant à vitesse angulaire $\Omega = \dot{\phi}$ constante ; on repère sa position par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. On considère que le bras tournant et la tige de longueur ℓ sont de masse négligeable devant m.

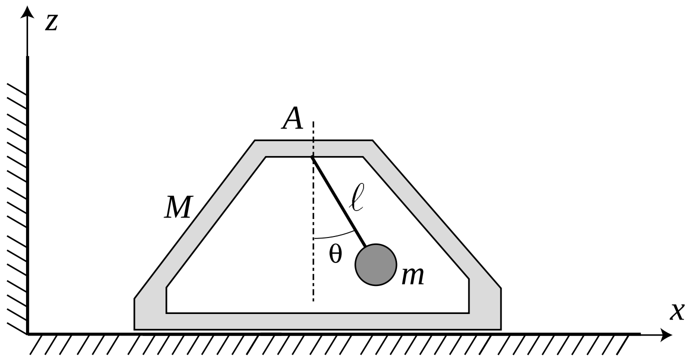
a) Écrire l'équation du mouvement pour θ.

b) Pour de faibles fréquences de rotation du bras tournant ($\Omega \ll \omega_0 = \sqrt{g/l}$), on peut faire l'approximation des petites oscillations. Montrer que l'équation du pendule devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \Omega^2 \frac{R}{\ell} \cos(\Omega t).$$

c) En supposant que le pendule se synchronise avec le forçage, on peut écrire $\theta(t) = A \cos \Omega t$. Calculer l'amplitude des oscillations en fonction du rapport Ω/ω_0. Décrire qualitativement l'évolution de cette amplitude pour Ω croissant.

Exercice 3 : Le balancier (partiel Novembre 2001)



On considère le système représenté sur la figure : un chariot, de masse M, glisse sans frotter sur un rail rectiligne suivant Ox dans le plan horizontal. Un balancier de masse m, suspendu au point A, oscille sans frottement dans le plan xOz. On assimile ce balancier à une masse ponctuelle suspendue à une tige de longueur ℓ et de masse négligeable.

1) Combien ce système a-t-il de degrés de liberté ? (on explicitera les équations de liaison et la nature des contraintes). Pouvez-vous deviner la fréquence propre d'oscillation du balancier dans l'approximation $M \gg m$?

2) On choisit les coordonnées généralisées x (position du chariot) et θ (angle que fait le balancier avec la verticale). Calculer la vitesse du balancier par rapport à un point de référence fixe, et écrire le Lagrangien du système.

3) Montrer que les équations du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{\ell} + \frac{m}{m+M} \left(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right) = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{\ell} \cos\theta + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Calculer l'accélération $\ddot{x}_G$ du centre de masse G de ce système, et en déduire la nature de la trajectoire du point G. Que pensez-vous de la réaction du support ?

4) Montrer que, dans l'approximation des petites oscillations ($\theta \ll 1$), l'équation différentielle pour θ se ramène à

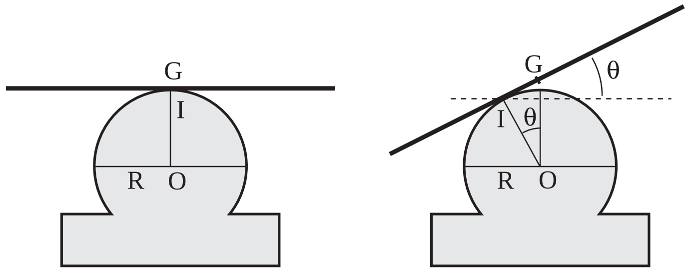
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

où l'on identifiera la pulsation ω en fonction de g, l, m et M. Comparer la limite $M \gg m$ avec la question (1) ; que pensez-vous de la limite $M \ll m$?

5) Dans l'approximation des petites oscillations, déterminer la trajectoire du système $\theta(t), x(t)$ si l'on lance le chariot avec une vitesse initiale $\dot{x}(0) = v_0$ en lâchant le balancier d'un angle $\theta(0) = \theta_0$ sans vitesse initiale (dans le référentiel du chariot). Dessiner l'allure de $\theta(t), x(t)$.

Exercice 4 : Planche à bascule

Une planche homogène d'épaisseur négligeable, de longueur ℓ et de masse m est placée sur un cylindre de rayon R et fixé à l'horizontal (voir la figure). Elle roule sans glisser sur ce cylindre, et on repère sa position par l'angle $\theta(t)$. On note I le point de contact planche – cylindre. Quand la planche est horizontale, c'est son centre de masse G qui est en contact avec le cylindre.



a) En utilisant la condition de roulement sans glissement, calculer la hauteur du point G en fonction de θ (on prendra pour origine O le centre du cercle sur la figure). En déduire l'énergie potentielle $V(\theta)$, et la tracer pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Donner les points d'équilibre et discuter leur stabilité.

b) Calculer l'énergie cinétique T de la planche sous la forme

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{I}_I(\theta)\dot{\theta}^2$$

où l'on exprimera $\mathcal{I}_I(\theta)$, le moment d'inertie de la planche par rapport au point I, en fonction de m, ℓ, R et θ.

c) Donner le Lagrangien du système et l'équation différentielle que satisfait $\theta(t)$. Décrire le mouvement dans l'approximation des petites oscillations, et donner sa période.

Quelques exercices supplémentaires

– Exercices 1, 2 et 4, chapitre I, du livre "Mécanique", Landau et Lifchitz, Ed. Mir / Ellipses.

8 — Forces centrales

Exercice 1 : L'étoile triple

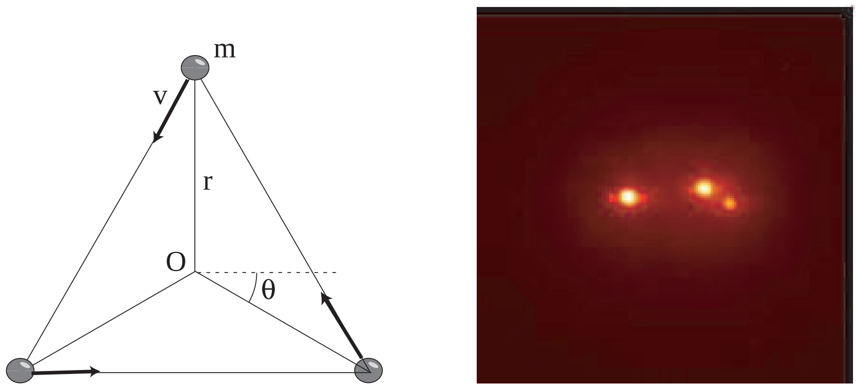


FIGURE 4 – Une étoile triple (photo : *Iota Cassiopée*).

Mizar, l'une des "étoiles" de la constellation de la Grande Ourse, est en fait une étoile triple, c'est-à-dire un ensemble de trois étoiles de masse comparable (environ 1,6 fois la masse du Soleil). On considère trois étoiles de même masse m en interaction gravitationelle mutuelle. Initialement, les trois étoiles ont même vitesse v_0, comme indiqué sur la figure, et sont au sommet d'un triangle équilatéral. On repère par $\vec{r}_i = \vec{OA_i}$ le vecteur position de l'astre i, où O est le centre de masse du système (avec $r_i(t=0) = r_0$). Le potentiel d'interaction V_{ij} entre deux étoiles i et j séparées d'une distance $r_{ij} = ||\vec{r}_j - \vec{r}_i||$ s'écrit

$$V_{ij} = V(r_{ij}) = -\frac{\mathcal{G} m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Par symétrie, les trois étoiles restent à chaque instant au sommet d'un triangle équilatéral de centre O.

a) En tenant compte de la symétrie, écrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système en fonction des coordonnées r et θ (l'angle repérant la position d'une des trois étoiles).

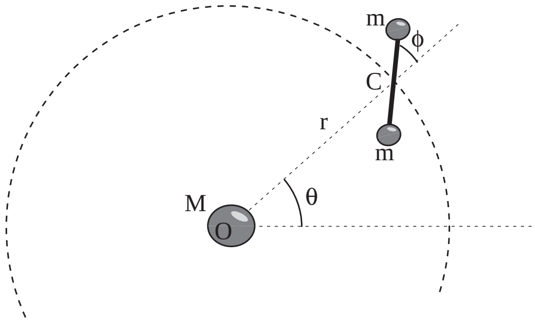
b) Quelle quantité conservée provient du fait que la coordonnée θ (dite *cyclique*) ne figure pas dans $\mathcal{L}$? Montrer que l'énergie totale est conservée, et qu'on peut l'écrire sous la forme

$$E = \frac{3}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

où l'on explicitera le potentiel effectif $V_{eff}(r)$.

c) Tracer l'allure de $V_{eff}(r)$, et déterminer les différents types de trajectoire en fonction de v_0. Dessiner l'allure des trajectoires des trois étoiles. Dans le cas d'une vitesse initiale $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}m/r_0}$, calculer les bornes r_{min} et r_{max} de la trajectoire.

NB : Cette solution particulière du problème à 3 corps, périodique et stable, a été proposée par Lagrange lui-même (1772). Une animation peut être trouvée sur http ://www.math.washington.edu/˜hampton/Lagrange.html. Quelques animations d'autres solutions exotiques du problème à n corps, périodiques et (probablement) stables, sont sur le site http ://www.soe.ucsc.edu/˜charlie/3body/



Exercice 2 : L'haltère en orbite

On considère un satellite en forme d'haltère, en orbite autour de la Terre (de masse M). Le satellite est constitué de deux masses identiques m reliées par une tige sans masse $2a \ll r$. On note O le centre de la Terre, C le *centre de masse* du satellite (différent du *centre de gravité*!) et $\vec{r} = \vec{OC}$ le vecteur position. Enfin, on note θ l'angle entre $\vec{r}$ et une direction fixe quelconque, et ϕ l'angle entre $\vec{r}$ et l'axe du satellite.

a) Écrire le Lagrangien du système sous la forme

$$\mathcal{L} = T_{CM} + T_{rot} - V(r_1, r_2)$$

où T_{CM} est l'énergie cinétique du centre de masse, T_{rot} l'énergie cinétique de rotation du satellite et $V(r_1, r_2)$ l'énergie potentielle de gravitation (r_i est la distance masse i – centre de la Terre). Expliciter chacun de ces 3 termes.

b) En exprimant r_1 et r_2 en fonction de a, r et ϕ, montrer que l'énergie potentielle s'écrit, au second ordre en a/r,

$$V(r, \phi) = -\frac{2\mathcal{G}Mm}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(3\cos^2\phi - 1\right)\right).$$

(on rappelle le développement limité $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + o(x^3)$.)

c) On suppose que l'orbite du centre de masse est circulaire. Montrer que, au premier ordre en a/r, on a $\dot{\theta} = \omega_0$ =cste (que l'on déterminera).

d) Montrer, à partir de l'équation de Lagrange pour la coordonnée ϕ, que l'axe du satellite oscille avec une pulsation $\sqrt{3}\omega_0$ (dans l'approximation $\phi \ll 1$). La trajectoire est-elle périodique ?

Question subsidiaire : pourquoi voit-on toujours la même face de la Lune ?

Exercice 3 : Précession d'une orbite

Afin de prendre en compte la non sphéricité de certaines planètes, comme Mercure, on peut introduire un terme correctif en $1/r^3$ dans la force d'attraction. On va chercher à déterminer l'orbite $r(\theta)$ d'une masse m ponctuelle dans un champ de force central s'écrivant sous la forme

$$f(r) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} + \frac{C}{r^3}.$$

a) Écrire l'équation différentielle pour r.

b) En utilisant la conservation du moment cinétique, exprimer la dérivée d/dt en fonction de $d/d\theta$. En posant $u = 1/r$, en déduire une équation différentielle pour $u(\theta)$ sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha^2 u = K,$$

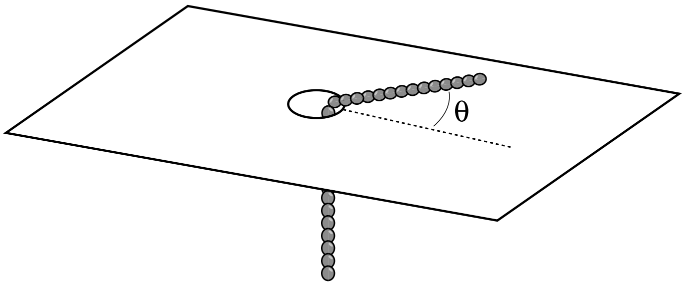
où α et K sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $\mathcal{G}$, M, m, J et C.

c) Montrer que l'équation de l'orbite peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \alpha\theta}$$

(on retrouve bien l'ellipse classique pour $\alpha = 1$). Tracer l'allure de cette orbite, et discuter le sens de précession selon le signe de C.

Exercice 4 : Une chaîne tombante



On considère une chaîne flexible glissant sans frottement sur un plan horizontal, et tombant par un orifice. On note ℓ la longueur totale de la chaîne, et r la longueur du segment horizontal. La masse de la chaîne est $M = \mu\ell$, où $\mu = dm/dr$=cste est la masse linéique. On note θ l'angle que fait le segment horizontal avec une direction fixe quelconque (on admettra que ce segment reste rectiligne).

a) Calculer les énergies cinétiques T_h et T_v des parties horizontales et verticales. Calculer l'énergie potentielle V, et le lagrangien $\mathcal{L} = T - V$. Montrer que le moment cinétique est conservé.

b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement pour r. Comparer avec le résultat de la chaîne tombante à 1D (exercice 2 TD 3).

c) On s'intéresse aux premiers instants de la chute. On pose $r = \ell(1-\epsilon)$, avec $\epsilon \ll 1$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ϵ. Montrer qu'au-delà d'une certaine valeur de la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$, la chaîne ne peut pas tomber. Dans le cas où la chaîne tombe, que devient la vitesse angulaire $\dot{\theta}$?

De très nombreux sites Internet présentent des animations Java de la trajectoire des planètes. Essayez par exemple :

– http ://www.astro.queensu.ca/˜musgrave/cforce/
– http ://observe.arc.nasa.gov/nasa/education/reference/orbits/orbit_ sim.html

9 — Cinématique du solide

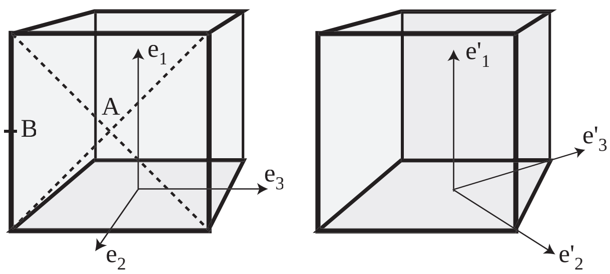
Exercice 1 : Quelques tenseurs d'inertie

Calculer, dans un système d'axe principal, la matrice d'inertie par rapport au centre de masse des solides suivants :

- une sphère ;
- deux masses m ponctuelles distantes de L ; quatre masses m ponctuelles situées aux quatre coins d'un carré de coté a ;
- une barre homogène par rapport à son centre ; par rapport à l'une de ses extrémités ;
- un cerceau ; un disque homogène ; un disque de rayon R et de densité surfacique $\sigma(r) = \sigma_0(1 - (r/R)^2)$.

Exercice 2 : Axes principaux d'inertie

a) Calculer le tenseur d'inertie d'un cube de cÙtÈ a par rapport à G (centre de masse du cube) dans le système d'axe principal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, puis par rapport à A et B. Calculer ce tenseur d'inertie par rapport à G dans le système $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.



b) On considère un solide, dont la matrice d'inertie par rapport au centre de masse s'écrit

$$\mathcal{I}_0 = Ma^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie associés. Exprimer la matrice de rotation passant du système d'axe initial au système d'axe principaux.

c) Calculer le tenseur d'inertie par rapport à l'origine d'un système de trois points A, B et C, de masses identiques m et de coordonnées respectives $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ et $(0, 2a, a)$. Déterminer les axes principaux et moments principaux d'inertie de ce système.

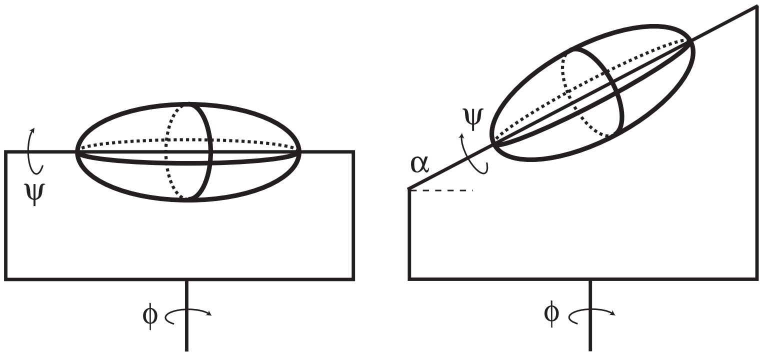
Exercice 3 : L'ellipsoïde tournant

On considère un ellipsoïde homogène, de moments d'inertie $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Cet ellipsoïde est mis en rotation autour d'un axe horizontal $\vec{e}_3$ à vitesse angulaire $\dot{\psi}$, lui-même monté sur un manège tournant autour d'un axe vertical à vitesse angulaire $\dot{\phi}$.

a) Donner l'expression du vecteur instantanné de rotation $\vec{\Omega}$ dans le reférentiel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié à l'ellipsoïde.

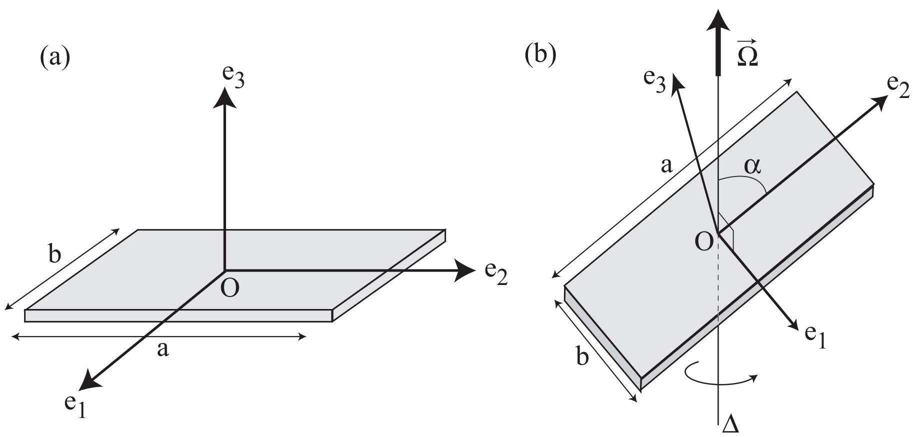
b) Calculer l'énergie cinétique de rotation de cet ellipsoïde. Que devient cette expression si l'ellipsoïde est symétrique de révolution autour de x_3 ?

c) Même question si l'axe de symétrie x_3 fait maintenant un angle α avec l'horizontale.



Exercice 4 : Rotation d'une plaque

On souhaite étudier l'influence d'un défaut d'alignement dans la rotation d'une plaque plane. On considère la plaque rectangulaire homogène dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ représentée sur la figure ci-dessous (a), de dimensions $a \times b$ et d'épaisseur selon $\vec{e}_3$ négligeable. On note m sa masse et $\sigma = m/ab$ sa densité surfacique. Cette plaque est mise en rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z$ autour de l'axe Δ passant par son centre O et faisant un angle $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ avec l'axe $\vec{e}_1$ (figure b). Le système d'axes orthogonaux $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ reste lié à la plaque.

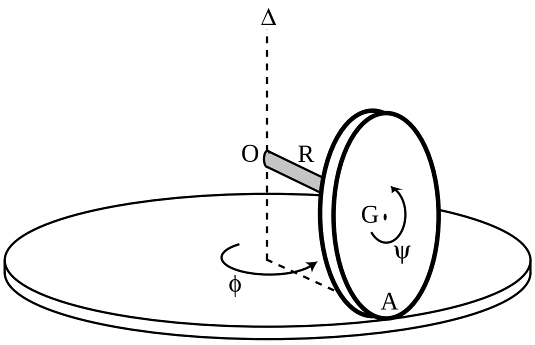


1) Calculer le tenseur d'inertie $\mathcal{I}_O$ de cette plaque par rapport à O dans le système d'axe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. S'agit-il de ses axes principaux ?
2) La plaque est en rotation autour de Δ à vitesse angulaire constante Ω. Exprimer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le système $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, puis l'énergie cinétique de rotation T en fonction de l'angle α. Tracer l'allure de $T(\alpha)$ et commenter. Quelle valeur de α minimise cette énergie ?
3) Quelle(s) valeur(s) de α permet(tent) *intuitivement* de minimiser les vibrations lors de la rotation ? Afin d'estimer l'importance de ces vibrations, calculer le "coefficient de vibration" :

$$\beta(\alpha) = \frac{J_\perp}{J_\parallel},$$

où $J_{//} = \vec{J} \cdot \vec{e}_z$ désigne la composante selon Δ du moment cinétique $\vec{J} = \mathcal{I}_0 \vec{\Omega}$, et $J_\perp$ désigne le module de la composante transverse du moment cinétique $\vec{J}_\perp = \vec{J} - J_{//}\vec{e}_z$. Commenter l'allure de $\beta(\alpha)$. Que pensez-vous de l'effet d'un léger défaut d'alignement (α proche de 0 ou $\pi/2$) lors de la rotation à grande vitesse de la plaque ?

Exercice 5 : La roue de manège



La roue d'un véhicule de manège roule sans glisser sur le sol immobile, en décrivant un cercle de rayon R autour de l'axe vertical Δ. L'axe de rotation de la roue, de masse négligeable, est relié en O à l'axe Δ de sorte que OG est horizontal (G est le centre de masse de la roue) et α est l'angle entre OG et OA. On note $a = GA$ le rayon de la roue (d'épaisseur négligeable), ϕ l'angle que fait l'axe OG avec une direction arbitraire et ψ l'angle décrivant la rotation de la roue sur elle-même.

a) Quel est l'axe instantané de rotation de la roue ? Écrire le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, où $\vec{e}_1$ est selon $\vec{GA}$, $\vec{e}_3$ selon $\vec{OG}$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$.

b) Calculer le tenseur d'inertie de la roue par rapport à son centre de masse G dans le système d'axe propre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

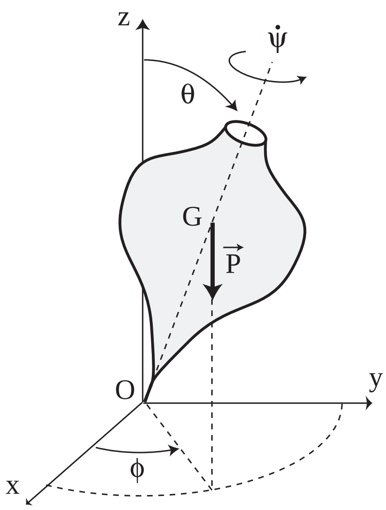
c) Écrire le Lagrangien du système et résoudre l'équation de Lagrange.

Pour en faire plus

– La lecture du chapitre VI du "Mécanique" de Landau et Lifchitz est conseillée pour sa grande clarté. De nombreux exercices peuvent être trouvés dans "Principles of Dynamics" de Greenwood (Attention toutefois : la convention des angles d'Euler utilisée y est différente !)

TD 10 : Dynamique du solide en rotation

Exercice 1 : Précession d'une toupie rapide



Une considère une toupie, de moment d'inertie I par rapport à son axe de symétrie, et dont la pointe O est fixe sur le support. On suppose que son axe fait un angle θ avec la verticale. On note $a = OG$ la distance entre la pointe et le centre de gravité de la toupie. L'expérience montre que la toupie va *précesser*, c'est-à-dire que son axe de rotation va lui-même tourner autour de l'axe vertical, décrivant ainsi un cône de demi-angle θ.

a) Le moment cinétique total de la toupie doit dépendre à la fois de la rotation de la toupie sur elle-même (vitesse angulaire $\dot{\psi}$) et de sa précession (vitesse angulaire $\dot{\phi}$). Si l'on admet toutefois que la précession est très lente par rapport à la rotation, écrire le moment cinétique par rapport à O.

b) Discuter la nature des forces en O. Calculer le moment par rapport à O des forces s'exerçant sur la toupie, et écrire le théorème du moment cinétique.

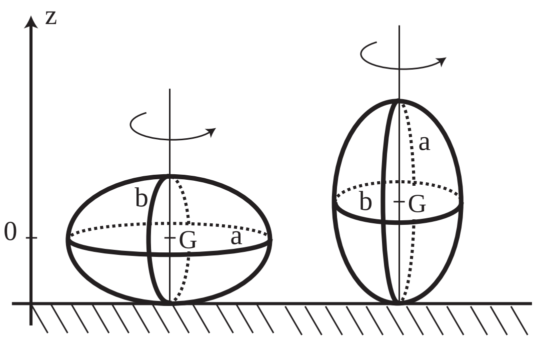
c) En déduire l'ordre de grandeur de la vitesse de précession $\dot{\phi}$ (on proposera une estimation pour le moment d'inertie I ainsi que la vitesse de rotation $\dot{\psi}$). Vérifier que l'on a bien $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$. Décrire qualitativement l'effet des forces de frottement.

Exercice 2 : Rotation d'un œuf

Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation autour de son petit axe. On constate qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire, l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe (cf. figure). Dans ce problème, on ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.

On modélise l'œuf par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m et de demi-axes a (selon $\vec{e}_1$) et b (selon $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$), avec $b < a$; on néglige la légère asymétrie de l'œuf (le centre de masse G est au centre de l'éllipsoïde). Les moments principaux d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à son centre de masse G sont $I_1 = \frac{2}{5}mb^2$ et $I_2 = I_3 = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$.

a) Quel est le vecteur instantané de rotation ? Exprimer l'énergie mécanique totale d'un œuf tournant à vitesse angulaire Ω, en position horizontale et en position verticale. On pourra prendre comme origine de l'énergie potentielle la hauteur de G lorsque l'oeuf est horizontal. Tracer ces énergies en fonction de Ω sur un même graphe.



b) Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire Ω_c, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale. Calculer Ω_c pour $a = 3$ cm, $b = 2$ cm et $g = 10$ m.s^{-2}.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \omega$ (avec $\omega \ll \Omega_c$). L'œuf se redresse, et tourne alors à une vitesse angulaire finale Ω_f, que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\,\omega$, où r est un nombre sans dimension.

c) Écrivez l'énergie mécanique totale avant et après le redressement, au premier ordre en ω. En utilisant la conservation de l'énergie, en déduire r en fonction de a et b. L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \simeq b$? (œuf quasi-sphérique).

d) Calculer le moment cinétique de l'œuf par rapport à son centre de masse avant (L_0) et après (L_f) le redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_f - L_0$ en fonction de Ω_c, m, a et b. L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

e) Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'œuf a subit un couple $\vec{\Gamma}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport au centre de masse peut s'écrire

$$\Gamma_z \simeq \frac{2mg(b-a)}{\Omega_c\,\Delta t}.$$

(on approximera dans le théorème du moment cinétique la dérivée temporelle par une différence finie). Le poids peut-il être responsable d'un tel couple ? Et la réaction du support ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

Exercice 3 : Rotation libre d'une toupie symétrique

Nous allons mettre en évidence le phénomène de précession régulière lors de la rotation *libre* d'une toupie symétrique (c'est-à-dire non soumise à aucune force ni moment de force), sans utiliser l'approximation de rotation rapide de l'exercice précédent.

Nous considérons dans un premier temps un solide quelconque, de moments d'inertie principaux I_1, I_2 et I_3 différents. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ les axes principaux associés au solide, et Ω_1, Ω_2, Ω_3 les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ projetées selon ces axes principaux.

a) A partir du théorème du moment cinétique exprimé dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié au solide,

$$\frac{d}{dt}\vec{L} + \vec{\Omega}_\wedge \vec{L} = \vec{\Gamma},$$

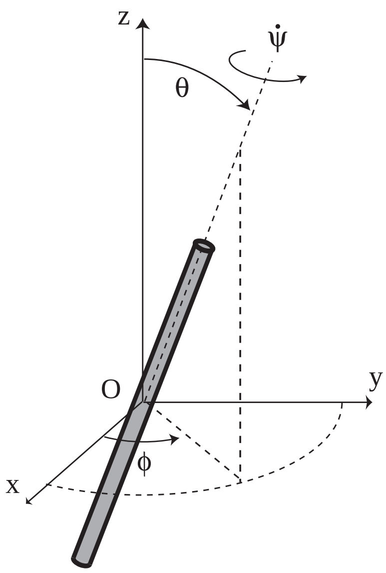
exprimer les équations du mouvement sous la forme des équations d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &=& \Gamma_1 \\ I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 &=& \Gamma_2 \\ I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 &=& \Gamma_3. \end{array} \right. \tag{5}$$

Que vaut $\vec{\Gamma}$ ici ?

b) Dans la suite, on ne considère que le cas de la toupie symétrique libre : $I_1 = I_2 \neq I_3$. Écrire les équations d'Euler sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\Omega}_1 &=& \omega\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 &=& -\omega\Omega_1, \end{array} \right. \tag{6}$$

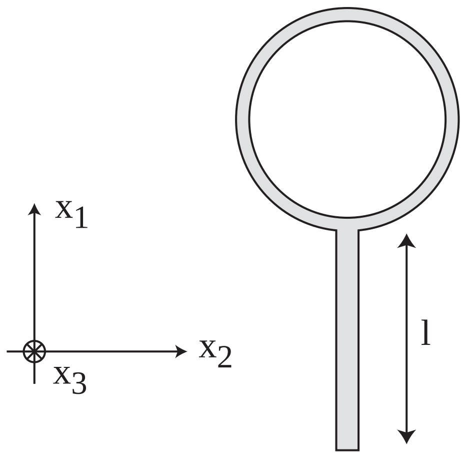


où l'on identifiera la constante ω. Intégrer ce système (on pourra poser $\alpha = \Omega_1 + i\Omega_2$) et décrire le mouvement du vecteur instantané de rotation dans le repère mobile $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

c) Décrire les cas limites de la toupie sphérique ($I_1 = I_2 = I_3$) et de la toupie "cigare" ($I_1 = I_2$, $I_3 = 0$, ou "rotateur").

Exercice 4 : Rotation d'une raquette de tennis

Si l'on lance une raquette de tennis, on constate que la rotation autour de l'axe $\vec{e}_3$ s'effectue sans problème, alors que celle autour de l'axe $\vec{e}_2$ s'accompagne d'un mouvement de vrille.



On schématise une raquette de tennis comme l'assemblage d'une tige homogène de longueur ℓ et de masse m, et d'un cerceau de diamètre ℓ et de même masse m (voir la figure). On note G le centre de masse de la raquette, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le repère lié à la raquette.

a) Calculer le tenseur d'inertie $\mathcal{I}_G$, par rapport au centre de masse G, sous la forme

$$\mathcal{I}_G = m\ell^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(on constate que $a + b = c$; pouvez-vous justifier ce résultat ?)

On rappelle l'équation du mouvement libre dans le repère lié au solide (équations d'Euler) :

$$I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 = 0 \tag{7}$$

(avec permutation circulaire des indices 1, 2 et 3), où $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ sont les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Afin d'étudier la stabilité de la rotation successivement autour des axes $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, on suppose la rotation de la forme

$$\vec{\Omega} = \Omega_0\,\vec{e}_i + \vec{\omega}, \qquad \text{(avec } \omega \ll \Omega_0\text{)}.$$

Ω_0 représente la vitesse angulaire de rotation autour de l'un des 3 axes, et ω est une petite perturbation. On va résoudre l'équation du mouvement pour $\omega(t)$, et vérifier si la perturbation décroît (rotation stable) ou au contraire croît (rotation instable).

b) Linéariser les équations d'Euler et résoudre l'équation du mouvement pour $\vec{\omega}(t)$, en choisissant successivement $i = 1$, 2 et 3. En déduire que la rotation autour des axes $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ est stable, alors que celle autour de l'axe $\vec{e}_2$ est instable.

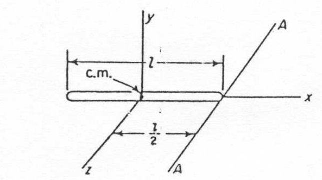
10 — Annexe 1 : Analogies dynamique linéaire / angulaire

(Principe fondamental de la dynamique / Théorème du moment cinétique)

Translations	Rotations
Masse $$m$$	**Moment d'inertie** (parfois noté J) $$I = mR^2$$
Quantité de mouvement (parfois *impulsion* ou encore *moment*) $$\vec{p} = m\vec{v},$$ où $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ est la vitesse.	**Moment cinétique** (parfois *moment angulaire*, également noté $\vec{L}$ ou $\vec{\sigma}$) $$\vec{J} = \vec{r}_\wedge\vec{p} = I\vec{\omega},$$ où $\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$ est la vitesse angulaire orientée selon l'axe de rotation
Force $$\vec{F}$$	**Moment de la force** (éventuellement *couple*, également noté $\vec{M}$) $$\vec{\Gamma} = \vec{r}_\wedge\vec{F}$$
Principe fondamental de la dynamique (ou *Théorème du centre d'inertie*) $$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum \vec{F}_{ext}$$ Pendant un temps Δt, la force modifie la quantité de mouvement d'une quantité $\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$.	**Théorème du moment cinétique** $$\frac{d}{dt}\vec{J} = \sum \vec{\Gamma}_{ext}$$ Pendant un temps Δt, le moment de la force modifie le moment cinétique d'une quantité $\Delta\vec{J} = \vec{\Gamma}\,\Delta t$.
Travail élémentaire $$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$ où $d\vec{x}$ est un petit déplacement.	**Travail élémentaire** $$\delta W = \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\theta}$$ où $d\vec{\theta}$ est une petite rotation.
Puissance $$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$	**Puissance** $$P = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$$
Energie cinétique de translation $$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$	**Energie cinétique de rotation** $$E_c = \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 = \frac{\vec{J}^2}{2I}$$

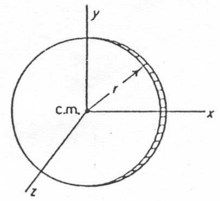
11 — Annexe 2 : Moments d'inertie usuels

"Principle of Dynamics", D.T. Greenwood, Ed. Prentice Hall, 1982.



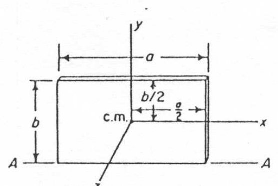
Thin rod

$$I_{xx} = 0$$
$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{ml^2}{12}$$
$$I_{AA} = \frac{ml^2}{3}$$



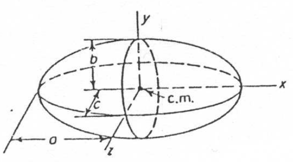
Thin circular disk

$$A = \pi r^2$$
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{mr^2}{4}$$
$$I_{zz} = \frac{mr^2}{2}$$



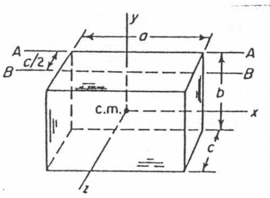
Thin rectangular plate

$$A = ab$$
$$I_{xx} = \frac{mb^2}{12}$$
$$I_{yy} = \frac{ma^2}{12}$$
$$I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$
$$I_{AA} = \frac{mb^2}{3}$$



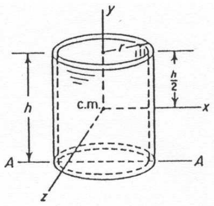
Ellipsoid

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$
$$I_{xx} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$$
$$I_{yy} = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$$
$$I_{zz} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$$



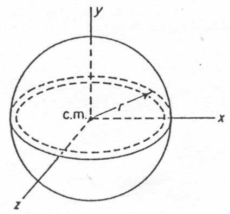
Rectangular prism

$$V = abc$$
$$I_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$
$$I_{yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$
$$I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$
$$I_{AA} = \frac{m}{3}(b^2 + c^2)$$
$$I_{BB} = \frac{m}{12}(4b^2 + c^2)$$



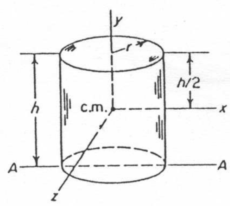
Thin circular cylindrical shell

$$A = 2\pi rh$$
$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{m}{12}(6r^2 + h^2)$$
$$I_{yy} = mr^2$$
$$I_{AA} = \frac{m}{6}(3r^2 + 2h^2)$$



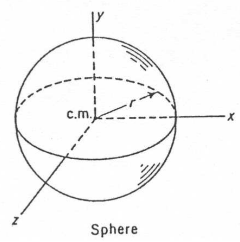
Thin spherical shell

$$A = 4\pi r^2$$
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$$



Right circular cylinder

$$V = \pi r^2 h$$
$$I_{xx} = I_{zz} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$$
$$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$$
$$I_{AA} = \frac{m}{12}(3r^2 + 4h^2)$$



Sphere

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$$