Remplissage d'une baignoire

I. Géométrie du problème

On considère un réservoir de géométrie cylindrique de révolution, de section droite S_1 au fond duquel on perce un trou de section $S_2 < S_1$. On choisit l'axe vertical orienté vers le haut et d'origine le fond du réservoir. On note $h(t)$ la côte de la surface libre d'eau à une date t et Q_+ le débit volumique stationnaire d'eau qu'on fait s'écouler dans le réservoir.

II. Bilan de matière et mise en équation

On procède à un **raisonnement séquentiel**. Pendant un intervalle de temps dt est délivrée une hauteur d'eau $dh_+ = \frac{Q_+}{S_1}dt$. Cette hauteur d'eau exerce une pression sur le fond du réservoir, par lequel de l'eau va s'écouler. On suppose établi le régime tel qu'on puisse considérer une ligne de courant entre la surface libre, supposée immobile pendant dt et le fond de la cuve. L'application du théorème de Bernoulli amène à

$$P_0 + \rho.g.dh_+ = P_0 + \frac{1}{2}\rho.v_{out}^{\ 2} \qquad (1)$$

ce qui n'énonce rien de plus que le théorème de Toricelli :

$$v_{out} = \sqrt{2g.dh_+}$$

La hauteur d'eau ainsi perdue est donc donnée par

$$dh_- = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g.dh_+}\,dt \qquad (2)$$

Au cours de dt va donc s'accumuler une hauteur d'eau résultante dh telle que

$$dh = dh_+ - dh_- = \frac{Q_+}{S_1}dt - \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g.h}.dt \qquad (3)$$

Dans le second membre du second terme, on a considéré h et non plus dh_+ puisque c'est en fait toute la colonne d'eau qui fait pression.
Ré-écrivons (3) sous une forme plus commune :

$$S_1\frac{dh}{dt} + S_2\sqrt{2gh} = Q_+ \qquad (4)$$

Cette équation différentielle non-linéaire énonce la conservation de la matière. Elle affirme que la quantité de matière introduite se conserve sous la forme d'une hauteur d'eau cumulée à laquelle on retranche la quantité d'eau qui s'est écoulée par le fond du réservoir. On vérifie que chaque membre de l'équation est homogène à un débit volumique.

III. Solution particulière

On cherche une solution particulière de (4), en particulier celle du régime permanent, *i.e.* celui pour lequel la hauteur d'eau est suffisante pour que la quantité qu'on rajoute s'écoule dans le même temps par la bonde.
Notons h_s cette hauteur, elle vérifie

$$\frac{dh_s}{dt} = 0 \tag{5}$$

En injectant cette solution dans l'équation différentielle qui régit le remplissage de la cuve, il vient

$$h_s = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_+}{S_2}\right)^2 \tag{6}$$

Notons que ce résultat est apparemment contre-intuitif en ce que la hauteur limite atteinte par le fluide est invariante avec S_1 :

$$\frac{\partial h_s}{\partial S_1} = 0 \tag{7}$$

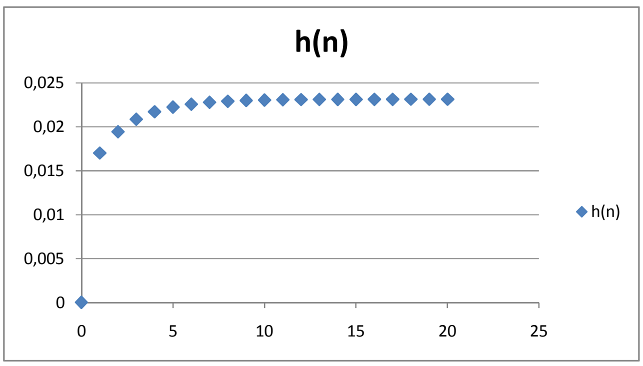
IV. Résolution numérique

Nous allons tâcher de résoudre (4) au moyen de la méthode numérique d'Euler.
Considérons la suite (h_n) dont chacun des termes représente la hauteur d'eau à la date $t_n = n.dt$.
L'équation (4) se traduit alors comme :

$$h_{n+1} = h_n + h_+ - \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2.g.h_n} \tag{8}$$

où $h_+ = Q_+ / S_1$ avec $dt = 1$ (on normalise à l'unité de temps)
N.B. : on reconnaît ici l'écriture de (3) sous sa forme discrète.

Nous prendrons un débit moyen Q_+ de 1 litre par minute. S_1 vaudra typiquement 10 cm² (carré de 3 cm de côté) et S_2 sera l'aire d'un carré de 0.5 cm de côté.
On considèrera qu'à l'origine des temps, la réservoir est vide.
La simulation sous Excel amène les résultats suivants :



V. Résolution

$$S_1 \frac{dh}{dt} + S_2\sqrt{2gh} = Q_+ \tag{4}$$

L'expression de la hauteur stationnaire de remplissage nous permet d'écrire

$$S_1 \frac{dh}{dt} + S_2\sqrt{2gh} = S_2\sqrt{2gh_s}$$

soit encore

$$\frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{h_s}{2g}}.\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{h_s}\right) = \sqrt{1-\frac{h}{h_s}} \tag{9}$$

Opérons à un changement de variables : posons $x = \sqrt{\frac{h}{h_s}}$ et $T = \frac{t}{\tau}$ où $\tau = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{h_s}{2g}}$

$$2x\frac{dx}{dT} = 1 - x \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}dx = dT \tag{10}$$

En extrayant la partie entière de la fraction du membre de gauche, il vient

$$\left(-2 + \frac{2}{1-x}\right)dx = dT \tag{11}$$

En intégrant membre à membre et en tenant comte des conditions initiales

$$x + \ln(1-x) = -\frac{t}{\tau}$$

soit

$$\sqrt{\frac{h}{h_s}} + \ln\left(1 - \sqrt{\frac{h}{h_s}}\right) = -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{\frac{g}{2h_s}}t \tag{12}$$