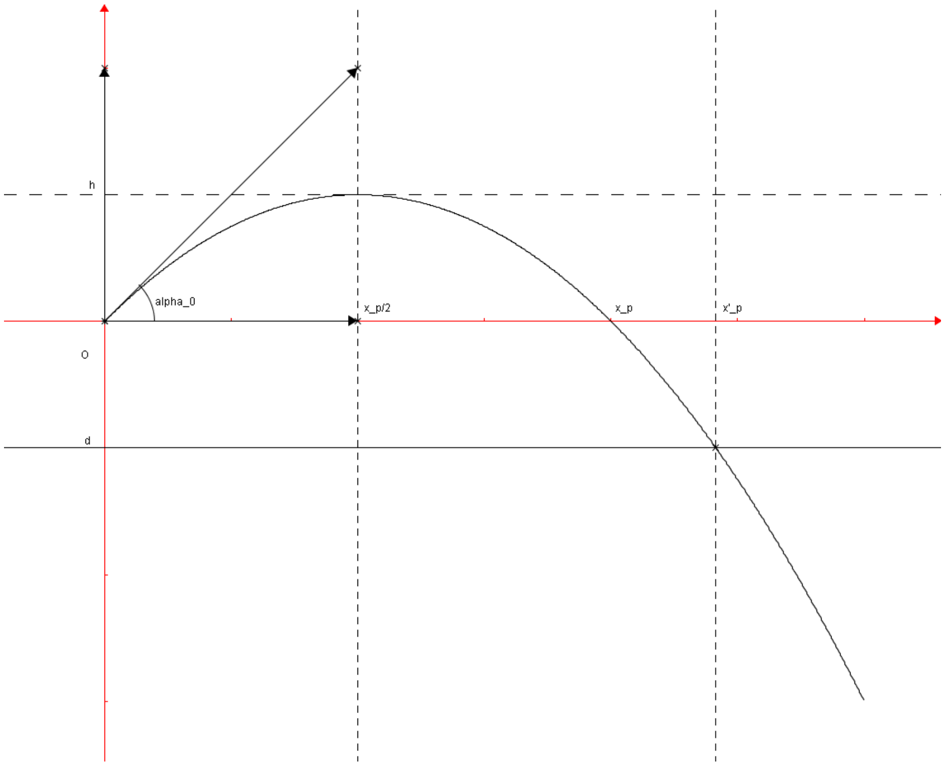
Pour quelles valeurs de α_0 , x_p est-il maximal ?



<u>1°) Expression de x_p , abscisse du point d'impact, en fonction de α_0 , angle de tir.</u>

De manière générale la trajectoire du projectile dans le repère (O, x, y) est la courbe représentative d'une fonction f du type : $f(x) = a x^2 + b x + c$

Avec $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ d'où $f(x) = a x^2 + b x = x(a x + b)$ (1)

$f(x_p) = 0 \Rightarrow x_p = \frac{-b}{a}$ (2)

$f'(0) = \tan \alpha_0$ (3)

$f'(x) = 2 a x + b \Rightarrow \tan \alpha_0 = b$ (4)

de (1) et (4) on tire : $a = \frac{-\tan \alpha_0}{x_p}$

d'où $\boxed{f(x) = \frac{-\tan \alpha_0}{x_p} x^2 + \tan \alpha_0 x = \tan \alpha_0 (\frac{-1}{x_p} x^2 + x)}$

Vérification pour quelques points

Pour $x = x_p$ $f(x_p) = \tan \alpha_0 (\frac{-1}{x_p} x_p^2 + x_p) = 0$ OK

2°) Expression de x_p en fonction de α_0

Pour $x=\frac{x_p}{2}$

On sait que $f(\frac{x_p}{2})=h$, d'où $f(\frac{x_p}{2})=\tan\alpha_0\times(\frac{-1}{x_p}(\frac{x_p}{2})^2+\frac{x_p}{2})=h$ d'où $h=\tan\alpha_0\times\frac{x_p}{4}$ soit

$$\boxed{\frac{4h}{\tan\alpha_0}=x_p}$$

Or h est dépend de $\tan\alpha_0$ et de la vitesse initiale $\vec{v_0}$.
Soit $\vec{v_{0x}}$ la composante horizontale de $\vec{v_0}$ et $\vec{v_{0y}}$ la composante verticale de $\vec{v_0}$.
Soit g , l'accélération terrestre

On a $\tan\alpha_0=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ (1) et $h=\frac{1}{2}\times\frac{(v_{0y})^2}{g}$ (2) *(ou* $h=\frac{-1}{2}\times\frac{(v_{0y})^2}{g}$ *je ne sais pas trop bien gérer les signes)*

D'où de (1) on tire $v_{0x}\tan\alpha_0=v_{0y}$, d'où (2) devient $h=\frac{1}{2}\times\frac{(v_{0x}\tan\alpha_0)^2}{g}$

D'où $\frac{4h}{\tan\alpha_0}=x_p$ devient $x_p=\frac{4(\frac{1}{2}\times\frac{(v_{0x}\tan\alpha_0)^2}{g})}{\tan\alpha_0}=2\tan\alpha_0\times\frac{(v_{0x})^2}{g}$

Donc $x_p=2\tan\alpha_0\times\frac{(v_{0x})^2}{g}$

D'autre part $v_{0x}=\cos\alpha_0 v_0$ d'où $x_p=2\tan\alpha_0\times\frac{(\cos\alpha_0 v_0)^2}{g}=2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}$

Donc $x_p=2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}$ or $2\sin\alpha_0\cos\alpha_0=\sin(2\alpha_0)$

Donc $\boxed{x_p=\sin(2\alpha_0)\frac{(v_0)^2}{g}}$

On voit donc que la portée x_p dépend de l'angle α_0 de tir, de sa vitesse initiale v_0 et de l'accélération g .

Soit p la fonction de α_0 telle que $p(\alpha_0)=2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}$.

En posant $K=2\dfrac{(v_0)^2}{g}>0$ constant, on obtient $\boxed{x_p=p(\alpha_0)=K\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$

3°) Étude de la fonction p pour $\alpha_0\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

p est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ donc p est dérivable sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

$p'(\alpha_0)=K(\cos^2\alpha_0-\sin^2\alpha_0)=K(1-2\sin^2\alpha_0)$

Puisque $K>0$ alors $p'(\alpha_0)$ a le signe de $(1-2\sin^2\alpha_0)$

a) Résolution de $p'(\alpha_0)=0$

$(1-2\sin^2\alpha_0)=0 \Leftrightarrow \sin^2\alpha_0=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha_0=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ or $\alpha_0\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$ donc $p'(\alpha_0)=0$ pour $\alpha_0=\frac{\pi}{4}$

Donc $p(\alpha_0)$ atteint un extrémum pour $\boxed{\alpha_0=\frac{\pi}{4}}$

b) Variations de p

On prend

$0\leq\alpha_0\leq\frac{\pi}{4}$ d'où $\sin 0\leq\sin\alpha_0\leq\sin\frac{\pi}{4}$ car la fonction sinus est croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$

d'où $0\leq\sin\alpha_0\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $0\leq\sin^2\alpha_0\leq\frac{1}{2}$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}]$

d'où $0\geq-\sin^2\alpha_0\geq\frac{-1}{2}$ d'où $0\geq-2\sin^2\alpha_0\geq-1$ d'où $1\geq 1-2\sin^2\alpha_0\geq 0$ d'où

$K\geq K(1-2\sin^2\alpha_0)\geq 0$ car $K>0$

Donc $K\geq p'(\alpha_0)\geq 0$ pour $\alpha_0\in[0\,;\frac{\pi}{4}]$. Donc p est croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et comme $p(\alpha_0)$ atteint un extrémum pour $\alpha_0=\frac{\pi}{4}$,

conclusion : $p(\frac{\pi}{4})$ est le maximum de la fonction p .

Quelque soit la hauteur de départ, la portée maximale est atteinte avec un angle de tir de 45°.