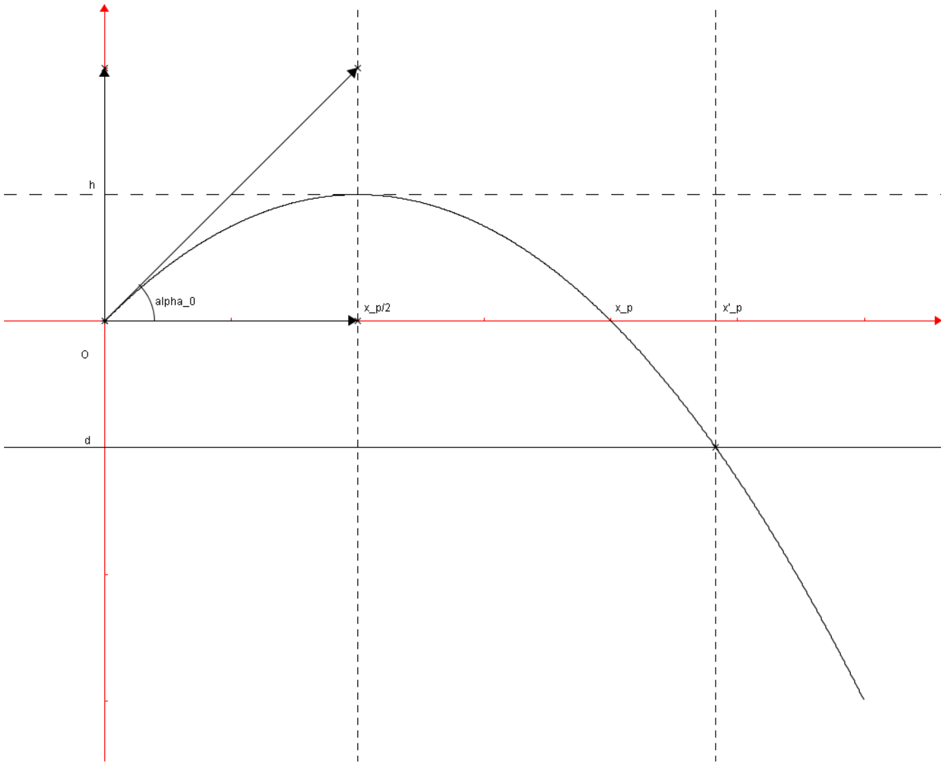

Expression de x'_p , abscisse du point d'impact sur une surface de hauteur algébrique d dans le repère (O, x, y) O point de départ du jet.

On a vu que dans le repère (O, x, y) la trajectoire du projectile a pour équation

$\boxed{f(x) = \frac{-\tan\alpha_0}{x_p} x^2 + \tan\alpha_0 x = \tan\alpha_0 \left(\frac{-1}{x_p} x^2 + x\right)}$ pour $\alpha_0 \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

et dans ce repère $f(x'_p) = d$

d'où $d = \tan\alpha_0 \left(\frac{-1}{x_p}(x'_p)^2 + x'_p\right)$ d'où $\frac{d}{\tan\alpha_0} = \frac{-1}{x_p}(x'_p)^2 + x'_p$ d'où

$0 = \frac{-1}{x_p}(x'_p)^2 + x'_p - \frac{d}{\tan\alpha_0}$ ou encore $0 = \frac{-\tan\alpha_0}{x_p}(x'_p)^2 + \tan\alpha_0 x'_p - d$

équation du second degré dans $\mathbb{R}$ du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = \frac{-\tan\alpha_0}{x_p}$; $b = \tan\alpha_0$ et $c = -d$

Calcul du discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac = \tan^2\alpha_0 - 4 \times \frac{-\tan\alpha_0}{x_p} \times (-d) = \tan^2\alpha_0 - 4 \times \frac{\tan\alpha_0}{x_p} \times d$ or $d < 0$ donc

$-4\times\frac{\tan\alpha_0}{x_p}\times d>0$ donc $\Delta>0$ pour tout $d<0$

Il existe donc deux solutions dans $\mathbb{R}$

$x'_{1p}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'_{2p}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ or $x'_p\geq 0$ donc il n'existe qu'une solution positive soit
$x'_p=x'_{1p}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ car $a=\frac{-\tan\alpha_0}{x_p}\leq 0$ et $-b-\sqrt{\Delta}<0$

En exprimant a , b et Δ on obtient

$$x'_p=\frac{-\tan\alpha_0-\sqrt{\tan^2\alpha_0-4\times\frac{\tan\alpha_0}{x_p}\times d}}{2\frac{-\tan\alpha_0}{x_p}} \quad \text{or} \quad x_p=2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g} \quad \text{d'où}$$

$$x'_p=\frac{-\tan\alpha_0-\sqrt{\tan^2\alpha_0-4\times\frac{\tan\alpha_0}{x_p}\times d}}{2\frac{-\tan\alpha_0}{2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}}} \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{x'_p=-\cos^2\alpha_0\times\frac{(v_0)^2}{g}\left(-\tan\alpha_0-\sqrt{\tan^2\alpha_0-4\times\frac{\tan\alpha_0}{x_p}\times d}\right)}$$

Cette formule nous permet de calculer x'_p l'abscisse du point d'impact sur une surface se trouvant à d mètres en dessous du départ du jet, tout en connaissant son angle de tir α_0 , la distance qu'il aurait atteint pour $d=0$ et la norme de sa vitesse initiale v_0

Si on ne connait pas x_p mais que l'on connait v_0 , la norme de la vitesse initiale, et l'angle de tir, on a $x_p=2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}$

d'où $x'_p=-\cos^2\alpha_0\times\frac{(v_0)^2}{g}\left(-\tan\alpha_0-\sqrt{\tan^2\alpha_0-4\times\frac{\tan\alpha_0}{2\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{(v_0)^2}{g}}\times d}\right)$ soit

$x'_p=-\cos^2\alpha_0\times\frac{(v_0)^2}{g}\left(-\tan\alpha_0-\sqrt{\tan^2\alpha_0-\frac{2g}{\cos^2\alpha_0(v_0)^2}\times d}\right)$ qui après factorisation de $\frac{1}{\cos^2\alpha_0}$ sous le radical et ensuite de $\frac{-1}{\cos\alpha_0}$ dans la parenthèse donne :

$$\boxed{x'_p=\cos\alpha_0\times\frac{(v_0)^2}{g}(\sin\alpha_0+\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2g}{(v_0)^2}\times d})}$$ attention $d<0$

ou encore $$\boxed{x'_p=\frac{(v_0)^2}{g}(\frac{1}{2}\sin 2\alpha_0+\cos\alpha_0\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2g}{(v_0)^2}\times d})}$$

Cette formule permet donc en connaissant quatre paramètres : l'angle de tir α_0 , la norme de la vitesse initiale v_0 , l'accélération g et la hauteur algébrique d dans le repère (O,x,y) O point de départ du jet, de calculer l'abscisse du point d'impact du projectile.

Étude de la fonction

En posant $K=\frac{(v_0)^2}{g}>0$ et $d\leq 0$ constants, on étudie la fonction h de α_0 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ telle que :

$$\boxed{x'_p=h(\alpha_0)=\cos\alpha_0\times K(\sin\alpha_0+\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d})}$$ (1) ou encore

$$\boxed{x'_p=K(\frac{1}{2}\sin(2\alpha_0)+\cos\alpha_0\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2d}{K}})}$$ (2)

On a $K=\frac{(v_0)^2}{g}>0$ et $d\leq 0$ donc $-\frac{2}{K}\times d\geq 0$ d'où $(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)\geq 0$ pour tout $\alpha_0\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

$(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)=0$ pour $d=0$ et $\alpha_0=0$

donc pour d et α_0 non nuls en même temps $(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)\neq 0$

La fonction h est du type d'après (1) :

$h=u\times(v+\sqrt{w})$ avec $u(\alpha_0)=\cos\alpha_0\times K$, $v(\alpha_0)=\sin\alpha_0$ et $w(\alpha_0)=\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d$ avec $w(\alpha_0)\neq 0$ donc h est dérivable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Calcul de la dérivée

$$h'=u'\times(v+\sqrt{w})+u\times(v+\sqrt{w})'=u'\times(v+\sqrt{w})+u\times(v'+(\sqrt{w})')=u'\times(v+\sqrt{w})+u\times(v'+\frac{1}{2}\frac{w'}{\sqrt{w}})$$

avec $u'(\alpha_0)=-\sin\alpha_0\times K$, $v'(\alpha_0)=\cos\alpha_0$ et $w'(\alpha_0)=2\cos\alpha_0\sin\alpha_0$

d'où $h'(\alpha_0)=-\sin\alpha_0\times K\times(\sin\alpha_0+\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d})+\cos\alpha_0\times K\times(\cos\alpha_0+\frac{1}{2}\frac{2\cos\alpha_0\sin\alpha_0}{\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d}})$

en posant $\sqrt{\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d}=A$

$$h'(\alpha_0)=-\sin\alpha_0\times K\times(\sin\alpha_0+A)+\cos\alpha_0\times K\times(\cos\alpha_0+\frac{\cos\alpha_0\sin\alpha_0}{A})$$

$$h'(\alpha_0)=K[-\sin\alpha_0\times(\sin\alpha_0+A)+\cos\alpha_0\times(\cos\alpha_0+\frac{\cos\alpha_0\sin\alpha_0}{A})]$$

$h'(\alpha_0)=K[-\sin^2\alpha_0-A\sin\alpha_0+\cos^2\alpha_0+\frac{\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0}{A}]$ or $-\sin^2\alpha_0+\cos^2\alpha_0=\cos(2\alpha_0)$ d'où

$$h'(\alpha_0)=K[\cos(2\alpha_0)-A\sin\alpha_0+\frac{\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0}{A}]$$

$h'(\alpha_0)=K[\frac{(A\cos(2\alpha_0)-A^2\sin\alpha_0+\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0)}{A}]$ or $(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)=A^2$

$h'(\alpha_0)=K[\frac{(A\cos(2\alpha_0)-(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)\sin\alpha_0+\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0)}{A}]$ or $A>0$ et $K>0$ donc

$h'(\alpha_0)$ a le signe de $E(\alpha_0)=(A\cos(2\alpha_0)-(\sin^2\alpha_0-\frac{2}{K}\times d)\sin\alpha_0+\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0)$ et s'annule pour $E(\alpha_0)=0$

Calcul de quelques valeurs

$E(0)=(A\cos(0)-(\sin^2 0-\frac{2}{K}\times d)\sin 0+\cos^2 0\sin 0)$

$E(0)=(A-(0-\frac{2}{K}\times d)0+0)$

$E(0)=\sqrt{-\frac{2}{K}\times d}\geq 0$ (rappel $d\leq 0$) donc pour tout $d\leq 0$, $E(0)\geq 0$.

$E(\frac{\pi}{4})=(A\cos(2\frac{\pi}{4})-(\sin^2\frac{\pi}{4}-\frac{2}{K}\times d)\sin\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$

$E(\frac{\pi}{4})=(0-(\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\times d)\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}})$

$E(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{4}-(\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\times d)\frac{\sqrt{2}}{2})$ remarque si $d=0$ alors $E(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{4}-(\frac{1}{2})\frac{\sqrt{2}}{2})=0$, si $d<0$ alors $-\frac{2}{K}\times d>0$ d'où $(\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\times d)>\frac{1}{2}$ d'où $(\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\times d)\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\frac{\sqrt{2}}{4}-(\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\times d)\frac{\sqrt{2}}{2}<0$. Donc pour tout $d<0$, $E(\frac{\pi}{4})<0$.

Donc comme E est continue sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ et que $E(\alpha_0)$ change de signe, il existe au moins une solution comprise entre $[0; \frac{\pi}{4}]$ à l'équation $E(\alpha_0)=0$. Cette solution dépend de d.