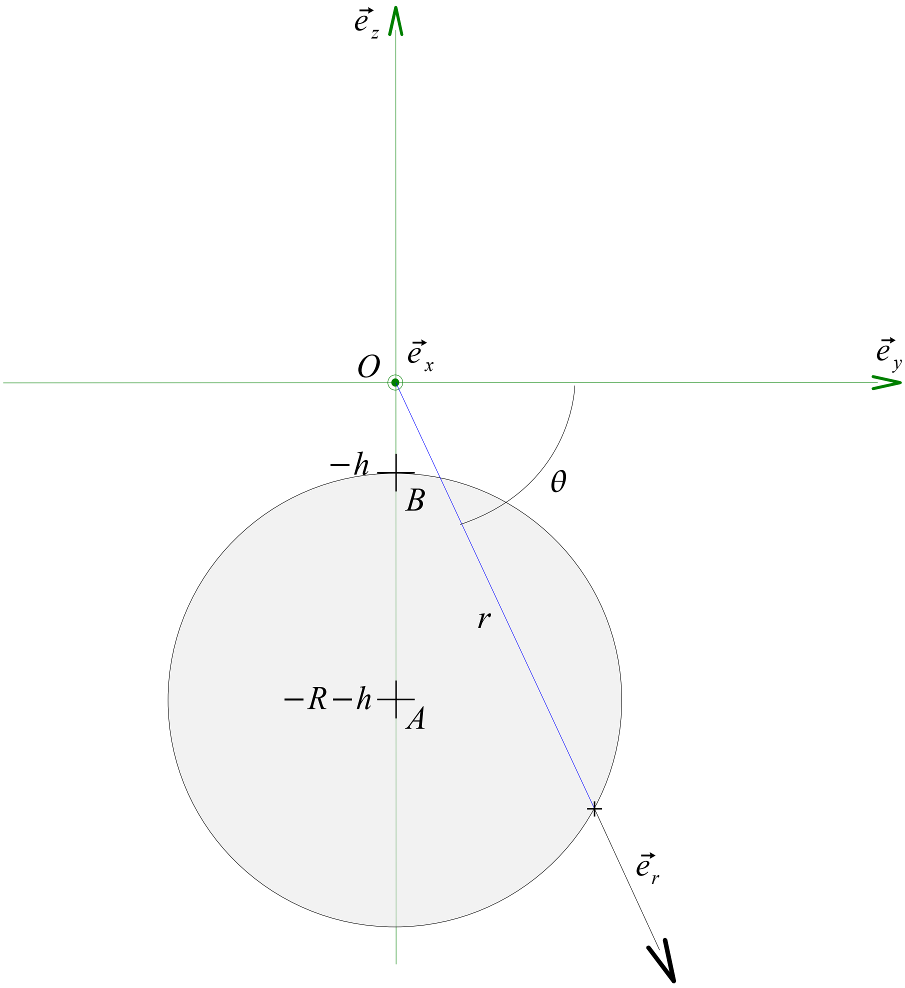
Vérification du Théorème de Gauss

par Aimé Savouret

Nous allons nous intéresser à la détermination des actions causées par les interactions à distance en $\frac{\alpha}{r^2}$ dans le cas d'une distribution sphérique de rayon R . Pour facilité la compréhension, on va s'intéresser à l'interaction gravitationnelle.

Champ gravitationnel à l'extérieur du corps :

Pour étudier le champ gravitationnel, on introduit une masse m centrée en O , l'origine du repère d'étude $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.



On considère une boule sphérique homogène de masse M , de rayon R et centrée en $A=(0,R+h,0)$.

La masse m se trouve à une distance $h>0$ de la surface de la boule.

Les plans $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ et $(O,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de masse donc l'action gravitationnelle qui s'applique sur la masses m est de la forme: $\vec{F}_{grav}=F\cdot\vec{e}_z$

On s'intéresse à l'action gravitationnelle crée par un élément infinitésimal de volume dV de la boule de rayon R . On a $dV=dr\cdot r\,d\,\theta\cdot 2\pi\,r\cos\theta=2\pi\,r^2\cos\theta\cdot dr\cdot d\,\theta$

On a $d\,\vec{F}_{grav}=\frac{G\cdot m\cdot\rho\,dV}{r^2}\cdot\vec{e}_r$ avec $\rho=\frac{3M}{4\pi R^3}$ et on notera $d\,F_{grav}=d\,\vec{F}_{grav}\cdot\vec{e}_z$.

Il vient $\boxed{d\,F_{grav}=\frac{3G\,m\,M}{2R^3}\cdot\cos\theta\sin\theta\cdot dr\cdot d\,\theta}$

Le coupe de la sphère associée à la boule de rayon R dans le plan $(O,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ à pour équation :

$$\begin{Bmatrix} y_s(t)=R\cdot\cos t \\ z_s(t)=R(\sin t-1)-h \end{Bmatrix}$$

d'où $r^2=2\cdot(1-\sin t)\cdot(R^2+2Rh)+h^2$ et $\boxed{a=\sin t=\frac{h^2-r^2}{2\cdot(R^2+Rh)}+1}$

On calcul $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_r}\cos\theta\sin\theta\cdot d\,\theta=\frac{1}{2}\cdot(\sin^2\theta_r-1)$

On définit θ_r par $\cos\theta_r=\frac{y_s(t)}{r}$ et $\sin\theta_r=\frac{z_s(t)}{r}$.

On obtient $\boxed{b=\sin\theta_r=\frac{R(a-1)-h}{r}}$

Finalement $\boxed{F_{grav}=\int d\,F_{grav}=\frac{3\,G\,m\,M}{4R^3}\int_h^{2R+h}(b^2-1)\cdot dr}$

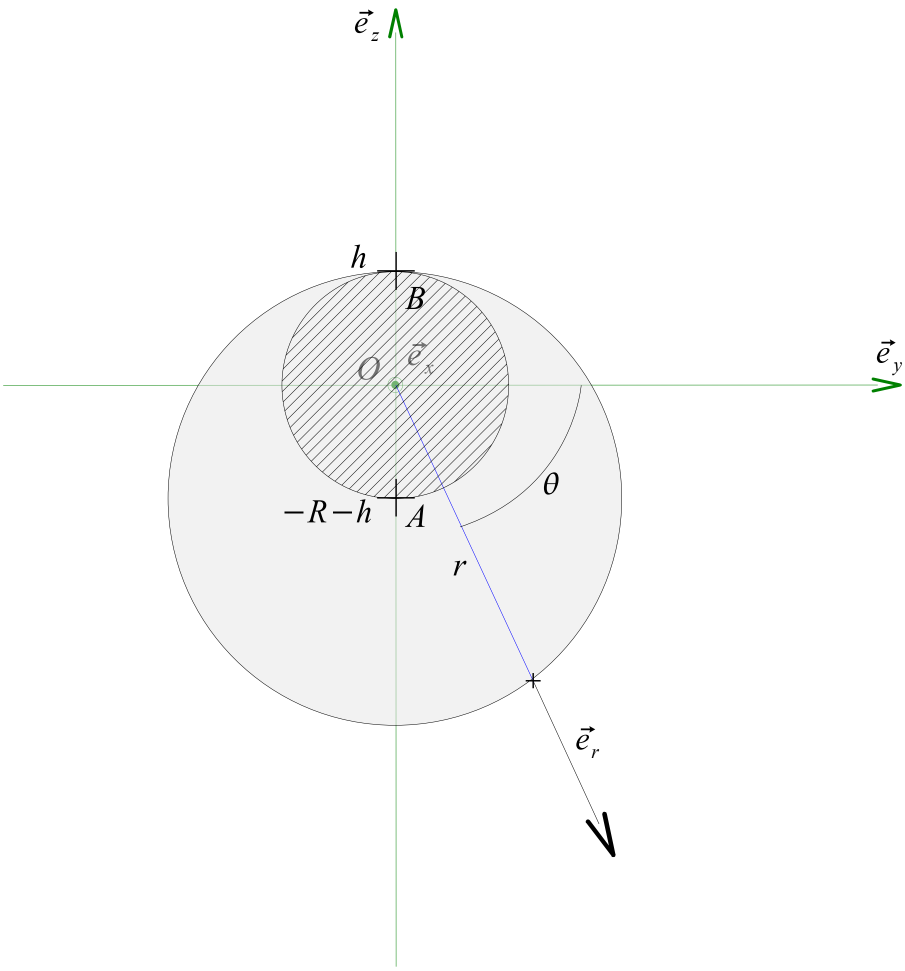
Avec Maple, on trouve $\int_h^{2R+h}(b^2-1)\cdot dr=\frac{-4R^3}{3(R+h)^2}$

Ce qui donne $\boxed{\vec{F}_{grav}=\frac{-G\,m\,M}{(R+h)^3}\cdot\vec{e}_z}$

Conclusion 1 : Lorsqu'on se trouve à l'extérieur d'un corps de répartition de masse sphérique et homogène, l'effet gravitationnel est le même qu'une masse ponctuelle de même masse placée en son centre de gravité. C'est en accord avec le théorème de Gauss.

Champ gravitationnel à l'intérieur du corps :

Dans ce cas, on a :



Dans ce cas, on intègre sur la boule de rayon R privée de la boule de centre O et de rayon $h>0$ car les actions gravitationnelles causées par cette dernière sur la masse m se compensent par symétrie centrale.

De même $\boxed{F_{grav}=\int d\,F_{grav}=\frac{3\,G\,m\,M}{4\,R^3}\int_h^{2\mathrm{R}-h}(b^2-1)\cdot dr}$

Avec Maple, on trouve $\int_h^{2\mathrm{R}-h}(b^2-1)\cdot dr=\frac{-4}{3}\cdot R+\frac{4}{3}\cdot h$

Ce qui donne $\boxed{\vec{F}_{grav}=-G\,m\,M\cdot\left(\frac{1}{R^2}-\frac{h}{R^3}\right)\cdot\vec{e}_z}$

L'application du théorème de gauss donne $\vec{F}_{grav}=\frac{-G\,m\,M\,(R-h)}{R^3}\cdot\vec{e}_z$ donc c'est en accord.

Conclusion 2 : Lorsqu'on se trouve à l'intérieur d'un corps de répartition de masse sphérique et homogène, l'effet gravitationnel est le même qu'une masse ponctuelle affecter de la masse de la boule de rayon correspondant à notre distance de son centre de gravité.