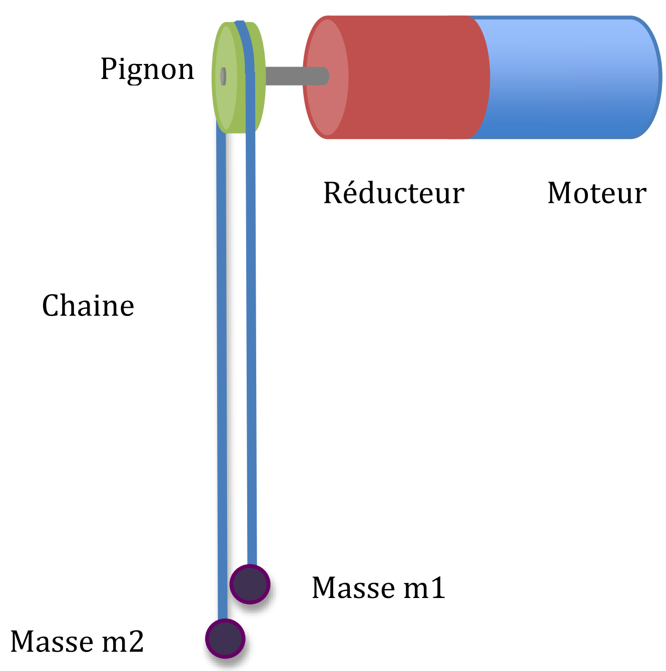
Bonjour,

Ce document vise à calculer le temps de réaction du système de pilotage du cerf-volant.

<u>Voici le problème de manière simplifiée :</u>

2 poids m_1 = 462,5 kg et m_2 = 537,5 kg sont suspendus aux deux extrémités d'une chaine. Cette chaine est à la fois suspendue et entrainée par un pignon de diamètre D = 7cm. Un moteur équipé d'un réducteur entraine l'axe du pignon afin de piloter l'écart de hauteur entre les deux poids suspendus.

Je voudrais trouver un moteur électrique alimenté en 48V max, capable de faire monter le poids m_2 de l=15 cm et de faire donc descendre m_1 de l=15cm, en 1 seconde.



N'ayant aucune expérience dans ce domaine, je prends au hasard un réducteur PLG75 de rapport R = 35 dont le rendement est η_{red} = 0,7. Je prends le moteur le plus puissant que j'ai trouvé dans mon domaine d'alimentation : un Dunkermotoren BG75*75 alimenté en 40V. Enfin, disons que les roulements de l'axe du pignon ont un rendement de η_{trans} = 0,9.

1/ Calcul du moment d'inertie du système ramené à l'axe du moteur :

En négligeant l'inertie apportée par le pignon, les éléments apportant de l'inertie sont :

- les 2 poids m_1 et m_2 : $J_{poids} = \dfrac{(m_1+m_2)*(\frac{D}{2})^2}{\eta_{trans}*\eta_{red}*R^2} = \dfrac{(462{,}5+537{,}5)*(\frac{0{,}07}{2})^2}{0{,}9*0{,}7*35^2} = 1{,}59*10^{-3}\,kg.m^2$

- le réducteur : $J_{red} = 1{,}5*10^{-4}\,kg.m^2$

- le rotor du moteur BG75*75 : $J_{rotor} = 6{,}2*10^{-5}\,kg.m^2$

D'où $J_{total} = J_{poids} + J_{red} + J_{rotor} = 1{,}59*10^{-3} + 1{,}5*10^{-4} + 6{,}2*10^{-5}$

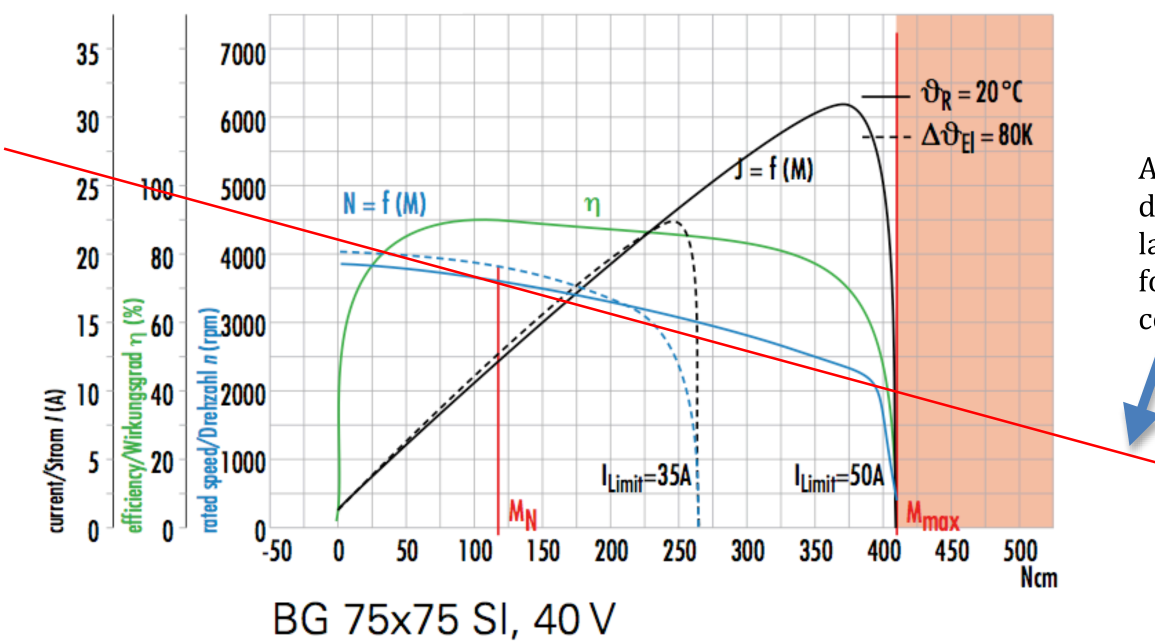
$$\boxed{J_{total} = 1{,}802*10^{-3}\,kg.m^2}$$

2/Calcul du couple résistant dû au fait que les deux poids n'ont pas la même masse :

$$C_{res} = \frac{(m2-m1)*g*\frac{D}{2}}{\eta_{trans}*\eta_{red}*R} = \frac{(537{,}5-462{,}5)*9{,}81*\frac{0{,}07}{2}}{0{,}9*0{,}7*35}$$

$$\boxed{C_{res} = 1{,}16N.m}$$

3/ Évaluation du couple de démarrage du moteur



Approximation de l'évolution de la vitesse en fonction du couple

L'analyse du diagramme ci-dessus démontre que grosso modo le moteur présente 2 phases d'accélération :

<u>Phase 1 :</u> le couple de démarrage est constant jusqu'à 2000 RPM et vaut $\boxed{C_{dem1} = 4N.m.}$

<u>Phase 2 :</u> le couple suit la relation suivante établie par les deux points : (2000RPM ; 4N.m) et (3500RPM ; 1,25N.m).

En RPM : ω = -545*C + 4181,8
En rad/s : ω = -57,12*C + 437,9

Enfin en inversant la relation on a : $\boxed{C_{dem2} = \frac{437{,}9 - \omega}{57{,}12}}$

Remarque : on constate que le couple nominal du moteur M_N = 1,2 N.m est supérieur au couple résistant. Ce dernier ne devrait donc pas engendrer une usure prématurée du moteur.

4/ Calcul de l'accélération du moteur :

<u>Phase 1 :</u> $$(\frac{d\omega}{dt})_1 = \frac{C_{dem1} - C_{res}}{J_{total}} = \frac{4 - 1{,}16}{1{,}802 * 10^{-3}}$$

$$\boxed{(\frac{d\omega}{dt})_1 = 1576 rad/s^2}$$

Équation de la vitesse : $\boxed{\omega_1(t) = 1576 * t}$

Calcul de la durée t_1 de la phase 1 : durée pour laquelle le moteur atteint la vitesse limite du modèle de la phase 1 : 2000RPM, soit ω_{1lim}= 209,4 rad/s :

$$\omega_{1\lim} = (\frac{d\omega}{dt})_1 * t_1 \quad \text{Donc} \quad t_1 = \frac{\omega_1}{(\frac{d\omega}{dt})_1} = \frac{209{,}4}{1576} \quad \text{D'où} \quad \boxed{t_1 = 0{,}13s}$$

<u>Phase 2 :</u> $$(\frac{d\omega}{dt})_2 = \frac{C_{dem2} - C_{res}}{J_{total}} = \frac{\frac{437{,}9 - \omega}{57{,}12} - 1{,}16}{1{,}802 * 10^{-3}}$$

$$\boxed{(\frac{d\omega}{dt})_2 = -9{,}72 * \omega + 3610{,}6}$$

Équation de la vitesse : $\boxed{\omega_2(t) = -573{,}39 * e^{-9{,}72 * t} + 371{,}46}$

Avec comme référence pour déterminer la constante k d'intégration : $\omega_2(t_1) = \omega_{1\lim}$

D'où $k = \frac{209{,}4 - 371{,}46}{e^{-9{,}72 * 0{,}13}} = -573{,}39$

5/ Calcul de l'angle N réalisé par le moteur en 1s :

$$N = \int_{0}^{t_1} \omega_1(t) * dt + \int_{t_1}^{1} \omega_2(t) * dt$$

$$N = \frac{1}{2} * 1576 * (0{,}13)^2 + \left[\frac{573{,}39}{9{,}72} * e^{-9{,}72*t} + 371{,}46 * t \right]_{0{,}13}^{1}$$

$$N = 13{,}32 + 3{,}54 * 10^{-3} + 371{,}46 - 16{,}67 - 48{,}29$$

$$\boxed{N = 319{,}82 rad}$$

6/ Calcul de l'angle à effectuer par l'axe du moteur :

Je veux que ma chaine parcourt l=15cm, ce qui correspond à une rotation de l'axe du moteur de :

$$N = \frac{l}{\pi * D} * R * 2 * \pi = \frac{0{,}15}{\pi * 0{,}07} * 35 * 2 * \pi$$

Le facteur 2π permet de convertir les rotations en radians.

$\boxed{N = 150 rad}$ Ce qui est inférieur à l'angle effectué par le moteur en une seconde.

Conclusion

Le moteur est capable d'être plus rapide que la réactivité que je demande. Si mes calculs sont bons, ce moteur avec ce réducteur devront faire fonctionner correctement mon système. L'annexe démontre par l'équation du mouvement que l'angle demandé est effectué en 0,55s.

Annexe : Équation du mouvement

En intégrant les deux équations de la vitesse et en ajoutant 2 fonctions porte*, deux constantes apparaissent : k1 et k2. k1 est nulle car à t=0, N = 0. k2 permet de garantir la continuité de N(t) lors du passage de la première à la seconde phase.

$$N(t) = porte(-\infty \rightarrow 0{,}13) * \int \omega_1(t) * dt + k_1 + porte(0{,}13 \rightarrow \infty) * \int \omega_2(t) * dt + k_2$$

$$N(t) = porte(-\infty \rightarrow 0{,}13) * 0{,}5 * 1576 * t^2 + porte(0{,}13 \rightarrow \infty) * \left[\frac{573{,}39}{9{,}72} * e^{-9{,}72*t} + 371{,}46 * t + k_2 \right]$$

$$N(t) = porte(-\infty \rightarrow 0{,}13) * 788 * t^2 + porte(0{,}13 \rightarrow \infty) * \left[58{,}99 * e^{-9{,}72*t} + 371{,}46 * t + k_2 \right]$$

A t=0,13s, $58{,}99 * e^{-9{,}72*0{,}13} + 371{,}46*0{,}13 = 64{,}96$
Donc k2 = $-64{,}96 + 788*0{,}13^2 = 64{,}96-13{,}32 = 51{,}64$

$$\boxed{N(t) = porte(-\infty \rightarrow 0{,}13) * 788 * t^2 + porte(0{,}13 \rightarrow \infty) * \left[58{,}99 * e^{-9{,}72*t} + 371{,}46 * t - 51{,}54\right]}$$

*fonction porte :
porte(abscisse d'ouverture de la porte → abscisse de fermeture de la porte)

Par exemple $porte(0{,}13 \rightarrow \infty) = 0{,}5 * \dfrac{\sqrt{(x-0{,}13)^2} + x - 0{,}13}{x - 0{,}13}$

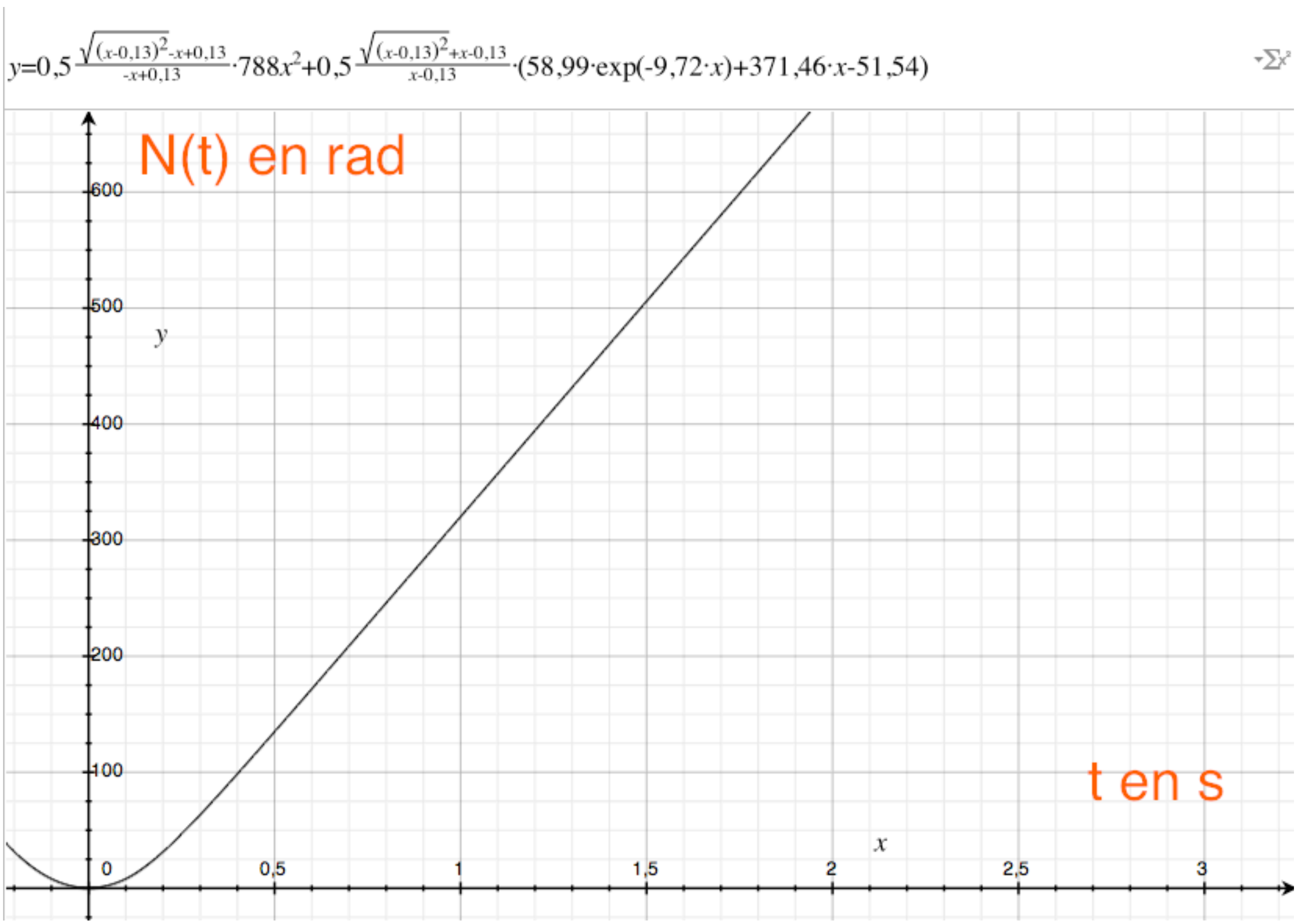


Figure 1 - évolution de l'angle de l'axe du moteur en fonction du temps