Calcul de la profondeur d'un puits

Une des fonctions du logiciel de spéléologie Auriga est le calcul de la profondeur d'un puits à partir de la durée de la chute d'un caillou. Cette note décrit le modèle physique et l'algorithme de calcul utilisés par cette fonction.

1. Le modèle physique

Ce chapitre établit l'équation différentielle décrivant la vitesse et le déplacement d'un caillou tombant dans un puits.

1.1 Les forces en présence

Nous supposons que les deux seules forces agissant sur un caillou tombant dans un puits sont la force de gravité et la force de traînée causée par la résistance de l'air.

Théoriquement la force de gravité diminue à mesure que le caillou s'approche du centre de la terre (voir [1], Volume I, section 13-4). Cette force dépend aussi de la latitude. Nous supposerons cependant que la force de gravité est constante près de la surface de la terre.

La force de traînée sur un corps causée par la résistance de l'air dépend de plusieurs paramètres (Voir [2], équation 311). Elle est égale à $\frac{1}{2} C_d A \rho v^2$ où

C_d coefficient de traînée

A aire de la projection du corps sur un plan perpendiculaire au mouvement.
Si le corps est une sphère de diamètre d, alors $A = \pi \frac{d^2}{4}$.

ρ densité de l'air

v vitesse du corps

1.2. Le calcul du coefficient de traînée

Le coefficient de traînée dépend d'une manière compliquée du nombre de Reynolds du corps. Dans le cas d'une sphère, le nombre de Reynolds est défini comme $R = \frac{\rho}{\mu} d\, v$ où μ est la viscosité de l'air et la relation entre C_d et R a été mesurée expérimentalement (Voir [2], figure 259).

L'approximation suivante[1] de cette relation sera utilisée:

Si $R < 3X10^5$ alors $C_d = 0,4 + \frac{6}{1+\sqrt{R}} + \frac{24}{R}$.

Si $3X10^5 \le R < 3,5X10^5$ alors $C_d = A\left(R - 3X10^5\right)^2 + B$ où

$$A = \left[0,09 - \left(0,4 + \frac{6}{1+\sqrt{3X10^5}} + \frac{24}{3X10^5}\right)\right]\left(\frac{1}{0,5X10^5}\right)^2 \text{ et}$$

$$B = 0,4 + \frac{6}{1+\sqrt{3X10^5}} + \frac{24}{3X10^5}.$$

Si $3,5X10^5 \le R < 6X10^5$ alors $C_d = 0,09$.

Si $6X10^5 \le R < 4X10^6$ alors $C_d = 0,09\left(\frac{R}{6X10^5}\right)^{0,55}$.

Si $4X10^6 \le R$ alors $C_d = 0,255$.

---

[1] Voir la page de calcul du coefficient de traînée par M. S. Cramer (*www.fluidmech.net/jscalc/cdre01.htm*).

1.3. L'équation différentielle

En somme l'équation différentielle qui régit la chute d'un caillou est la suivante, en plaçant le sens positif vers le bas:

$$mg - \frac{1}{2} C_d \pi \frac{d^2}{4} \rho v^2 = mv' \quad \text{où m est la masse du caillou}$$

ou encore:

$$v' = g - \frac{\frac{1}{2} C_d \pi \frac{d^2}{4} \rho v^2}{m} \quad \text{où m est la masse du caillou}$$

Les valeurs suivantes de g, de la densité de l'air, de la viscosité de l'air et de la densité du calcaire seront utilisées dans cette équation:

g — $9{,}81\ m / s^2$.
Cette valeur correspond à une latitude de 45° à la surface de la Terre.

ρ — $1{,}194\ kg/m^3$.
La densité de l'air dépend de la température et de l'humidité relative. Dans Auriga on fixe la température à 20°C et le pourcentage d'humidité relative à 100%.

μ — $1{,}8134 \times 10^{-5}$ kg/ms.
La viscosité de l'air dépend de la température T et de la pression. Si la pression est la pression atmosphérique alors la viscosité de l'air est donnée par la formule $\mu = 1{,}458 \times 10^{-6} \frac{(T + 273{,}15)^{3/2}}{T + 383{,}55} kg / ms$.
Dans Auriga on fixe la température à 20°C et on suppose que la pression est la pression atmosphérique.

m — La masse du caillou est déterminée à partir de son volume et de sa densité. On supposera toujours que le caillou est sphérique. Dans Auriga on supposera qu'il est en calcaire (la densité du calcaire est $2{,}52 \times 10^3\ kg/m^3$).

2. La méthode de calcul de la profondeur du puits.

2. 1 La résolution de l'équation différentielle

La résolution de l'équation différentielle établie au chapitre précédent est la base de l'algorithme de calcul de la profondeur du puits à partir de la durée de la chute d'un caillou.

À l'aide de méthodes analytiques formelles on peut résoudre certaines équations différentielles et en trouver des solutions explicites. C'est le cas par exemple de l'équation différentielle $mg - pv(t) = mv'(t)$, où p est une constante, qui régit la chute d'un corps soumis à la force de gravitation et à une force de résistance proportionnelle à la vitesse. Si la vitesse initiale est nulle, cette équation a comme solution $v(t) = \frac{mg}{p}\left(1 - e^{\frac{-pt}{m}}\right)$. Puisque m, g et p sont connus, on peut directement calculer numériquement la vitesse pour tout temps t.

Cependant l'équation différentielle établie au chapitre précédent, qui a la forme $mg - Kv^2(t) = mv'(t)$ où K dépend de v, n'a pas de solution explicite. Pour la résoudre on a recours à une méthode numérique. Voici un exemple de méthode numérique. Si, à partir de la vitesse initiale au temps 0 on veut calculer la vitesse disons à t=10, on calcule numériquement la vitesse aux temps h, 2h, 3h, ..., 10 pour un nombre h très petit. À chaque étape on suppose que la vitesse v(t) et l'accélération v'(t) sont constantes entre t et t+h. et, à partir de v(t), on calcule $v(t+h) = v(t) + hv'(t)$. Évidemment v'(t) est calculé à partir de l'équation $v'(t) = g - \frac{K}{m}v^2(t)$. On arrive par itérations à v(10). On ne peut pas calculer v(10) sans calculer un grand nombre de valeurs v(t) pour t entre 0 et 10. La méthode décrite ci-dessus s'appelle la méthode d'Euler. Elle n'est pas précise. D'autres méthodes numériques ont une précision bien meilleure et par plusieurs ordres de grandeur. La plus simple de ces dernières est la méthode de Runge-Kutta dont on trouvera une explication intuitive dans [3], section 16.1.

Nous nous contenterons d'énoncer précisément les formules de calcul utilisées dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Supposons en général que la vitesse v(t) et le déplacement d(t) d'un corps sont régis par le système d'équations différentielles $v' = f(t, v)$ et $d' = v$. L'approximation de v(t+h) fournie par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est la suivante :

$$k_{1v} = h\,f(t, v)$$
$$k_{2v} = h\,f\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{k_{1v}}{2}\right)$$
$$k_{3v} = h\,f\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{k_{2v}}{2}\right)$$
$$k_{4v} = h\,f\left(t + h, v + k_{3v}\right)$$
$$v(t+h) = v + \frac{1}{6}\left(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}\right) + O\left(h^5\right)$$

Le symbole $O\left(h^5\right)$ représente une quantité de l'ordre de h^5, qui est donc négligeable si h est petit.

De même l'approximation de d(t+h) fournie par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est la suivante :

$$k_{1d} = h\,v$$
$$k_{2d} = h\left(v + \frac{k_{1v}}{2}\right)$$
$$k_{3d} = h\left(v + \frac{k_{2v}}{2}\right)$$
$$k_{4d} = h\left(v + k_{3v}\right)$$
$$d(t+h) = d + \frac{1}{6}\left(k_{1d} + 2k_{2d} + 2k_{3d} + k_{4d}\right) + O\left(h^5\right)$$

Notons qu'on peut simplifier ainsi le calcul de d(t+h) :
$$d(t+h) = d + h\left(v + \frac{k_{1v} + k_{2v} + k_{3v}}{6}\right) + O\left(h^5\right)$$

Cette méthode permet donc de calculer pour tout temps t la vitesse et le déplacement (c'est-à-dire la profondeur atteinte par le caillou) au temps t.

2.2 Comment tenir compte de la vitesse du son

Il reste à expliquer comment tenir compte de la vitesse de propagation du son dans l'air. Supposons pour fixer les idées que le temps écoulé entre le lâcher du caillou et l'audition du choc au fond du puits est de 5 secondes. À partir d'une vitesse initiale nulle et d'un déplacement nul au temps 0, on calcule successivement v(t) et d(t) pour t = h, 2h, 3h, ..., jusqu'à ce que pour la première fois on trouve $t + \frac{d(t)}{v_{son}} \geq 5$, où v_{son} est la vitesse du son dans l'air. Soit t_1 cette première valeur du temps. On sait donc que si $t_0 = t - h$, alors $t_0 + \frac{d(t_0)}{v_{son}} < 5$. Donc $d(t_0)$ est inférieur à la profondeur réelle du puits parce que le temps écoulé entre le lâcher du caillou et l'audition du choc au fond d'un puits de profondeur $d(t_0)$ serait inférieur à 5 secondes. De même, puisque $t_1 + \frac{d(t_1)}{v_{son}} \geq 5$, $d(t_1)$ est supérieur ou égal à la profondeur réelle du puits parce que le temps écoulé entre le lâcher du caillou et l'audition du choc au fond d'un puits de profondeur $d(t_1)$ serait supérieur ou égal à 5 secondes. On a donc coincé la profondeur réelle du puits entre deux bornes $d(t_0)$ et $d(t_1)$. Nous allons raffiner notre estimation en divisant par 2 l'écart temporel $t_1 - t_0$ entre ces deux bornes. Prenons $t_2 = t_0 + \frac{h}{2}$, le point milieu entre t_0 et t_1, et calculons $d(t_2)$. Si $t_2 + \frac{d(t_2)}{v_{son}} < 5$ alors par les mêmes arguments que ci-dessus on a coincé la profondeur réelle du puits entre deux bornes $d(t_2)$ et $d(t_1)$. Sinon $t_2 + \frac{d(t_2)}{v_{son}} \geq 5$ et on a coincé la profondeur réelle du puits entre deux bornes $d(t_0)$ et $d(t_2)$. On poursuit la réduction de l'écart temporel entre les deux bornes, en le divisant par 2 à chaque fois, jusqu'à ce que l'écart (différence de profondeur) entre les deux bornes soit considéré comme négligeable.

Cette méthode de raffinements successifs s'appelle la fouille dichotomique. Elle est largement utilisée dans la conception d'algorithmes efficaces.

Références

[1] The Feynman Lectures on Physics, Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, Addison-Wesley, 1964.

[2] Elementary Fluid Mechanics, John K. Vennard, John Wiley & Sons, 1963.

[3] Numerical Recipes in C, William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, Cambridge University Press, 1992.