

Écoulement d'un fluide dans un lit de particules

Relation entre écoulement et pertes de charge

Écoulement laminaire

Au XIX^e siècle, l'ingénieur Darcy remarque que :

gradient de pression \propto vitesse du liquide

soit

$$\frac{\Delta P}{L} \propto v \quad (1)$$

où v est la vitesse superficielle (ou apparente) : $v = Q/A$ (Q débit volumique et A aire de la section du lit)

Ainsi :

$$\frac{\Delta P}{L} = K_1 \cdot \frac{Q}{A} \quad (2)$$

Si on assimile les pores à des tubes circulaires, on a la loi de Hagen-Poiseuille (loi "microscopique") :

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu.v}{d^2} \quad (3)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide (Pa.s)

De façon générale :

$$\frac{\Delta P}{L} = K_2 \cdot \frac{\mu.u}{d_e^2} \quad (4)$$

avec

u est la vitesse réelle (ou interstitielle) :

$$u = \frac{v}{\varepsilon} \quad (5)$$

(ε porosité du lit)

Remarque : vitesse apparente $v < u$ vitesse réelle

d_e diamètre équivalent défini par : *section d'écoulement/périmètre mouillé*

section d'écoulement = εA

périmètre mouillé = $S_b A$ où S_b est la surface des particules par unité de volume du lit

$$\frac{\text{surface des particules}}{\text{volume des particules}} \times \frac{\text{volume des particules}}{\text{volume du lit}} = \frac{\text{surface des particules}}{\text{volume du lit}}$$

Si S_o est la surface spécifique des particules

$$S_o(1 - \varepsilon) = S_b \quad (6)$$

d'où

$$d_e = \frac{\varepsilon A}{S_b} = \frac{\varepsilon A}{S_o(1-\varepsilon)} \quad (7)$$

On en déduit la relation de Carman-Kozeny:

$$\frac{\Delta P}{L} = K \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu \cdot v \cdot S_o^2 \quad (8)$$

K dépend de la forme et des propriétés de surface des particules.

$K \approx 5$ pour un écoulement laminaire dans un empilement aléatoire de sphères de diamètre d ($S_o = 6/d$), d'où :

$$\frac{\Delta P}{L} = 180 \cdot \frac{\mu \cdot v (1-\varepsilon)^2}{d^2 \varepsilon^3} \quad (9)$$

Écoulement turbulent

Pour un écoulement turbulent dans un empilement aléatoire de sphères de diamètre d :

$$\frac{\Delta P}{L} = 1,75 \cdot \frac{\rho_f \cdot v^2 (1-\varepsilon)}{d \varepsilon^3} \quad (10)$$

Équation générale

Généralisation basée sur des données expérimentales couvrant des gammes de taille et de forme plus larges :

Équation d'Ergun

$$\frac{\Delta P}{L} = 150 \cdot \frac{\mu \cdot v (1-\varepsilon)^2}{d^2 \varepsilon^3} + 1,75 \cdot \frac{\rho_f \cdot v^2 (1-\varepsilon)}{d \varepsilon^3} \quad (11)$$

Le régime d'écoulement est donné par le nombre de Reynolds de la particule :

$$Re_p = \frac{\rho_f \cdot v \cdot d}{\mu(1-\varepsilon)} \quad (12)$$

- pour $Re_p < 10$: régime laminaire
- pour $Re_p > 2000$: régime turbulent

Particules non-sphériques

Adaptation des relations de Carman-Kozeny et d'Ergun pour des particules non-sphériques :

$$\frac{\Delta P}{L} = 180 \cdot \frac{\mu \cdot v (1-\varepsilon)^2}{d_{sv}^2 \varepsilon^3} \quad (13)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 150 \cdot \frac{\mu \cdot v (1-\varepsilon)^2}{d_{sv}^2 \varepsilon^3} + 1,75 \cdot \frac{\rho_f \cdot v^2 (1-\varepsilon)}{d_{sv} \varepsilon^3} \quad (14)$$

avec d_{sv} le diamètre en surface/volume

Caractérisation des lits de particules

On considère un empilement de particules (milieu poreux non consolidé) placé dans une colonne cylindrique de diamètre D et de longueur L .

En régime laminaire, on a la loi de Darcy (1856) (loi macroscopique) :

$$\Delta P = \frac{\mu \cdot L \cdot u}{k} \quad (15)$$

soit

$$Q = k \frac{A \Delta P}{\mu \cdot L} \quad (16)$$

où k est la perméabilité du lit de particules. k est exprimé en m^2 ou en darcy ($1 \text{ Da} = 0.987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \approx 1 \mu\text{m}^2$).

L'espace poreux est assimilé à un ensemble de cylindres identiques de diamètre d de longueur effective L_e ($> L$) non connectés entre eux, mais débouchant sur les 2 côtés de la colonne.

À partir du modèle de Carman-Kozeny, on écrit :

$$k = \frac{1}{k_k} \frac{1}{S_o^2} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2} \quad (17)$$

avec k_k la constante de Kozeny :

$$k_k = 2\Psi\tau^2 \quad (18)$$

où Ψ facteur de sphéricité et τ la tortuosité :

$$\tau = \frac{L_e}{L} \quad (19)$$

Pour une sphère, $\tau = \pi/2$ et $\Psi = 1$. Ainsi, $k_k = 5$

On retrouve que la perméabilité d'un empilement de sphères est donnée par :

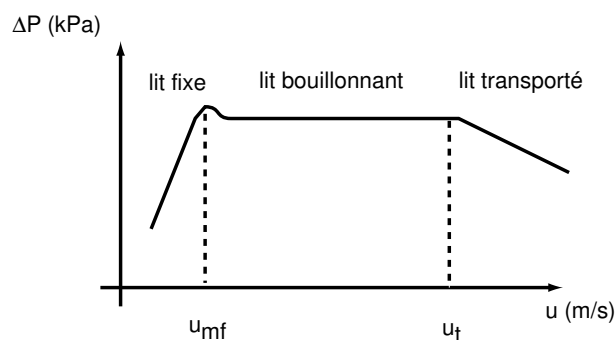
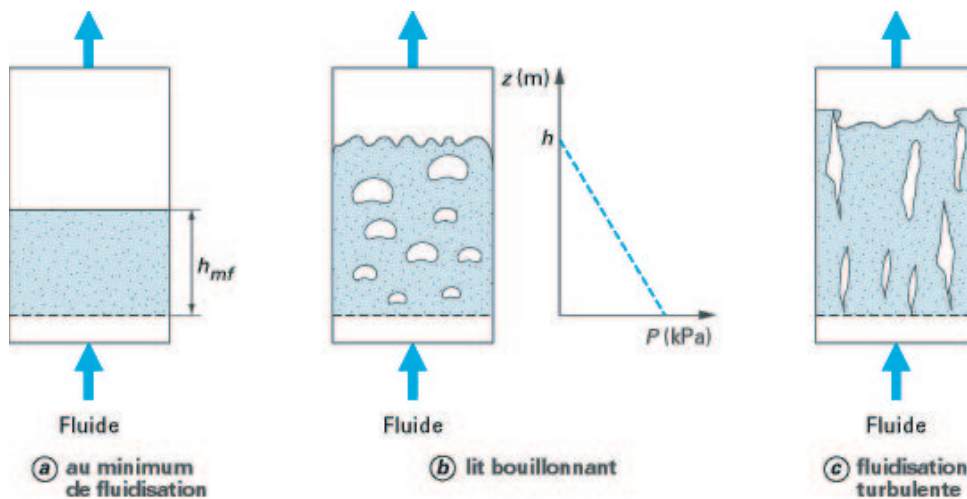
$$k = \frac{1}{180} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2} d^2 \quad (20)$$

Fluidisation

Particules solides dans un courant ascendant

Différents régimes (pour une vitesse apparente v_f du fluide croissante) :

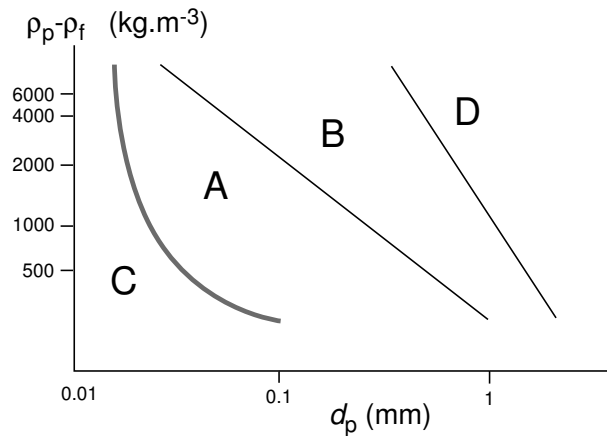
- (A) Traversée du lit : identique à l'écoulement dans un milieu granulaire confiné ;
- (B) Début de la fluidisation : légère dilatation du lit, les particules s'écartent les unes des autres ;
- (D) Lit fluidisé bouillonnant : apparition de poches de fluide ;
- (E) Lit fluidisé pistonnant : alternance de couches de particules et de poches de fluide ;
- (F) Transport pneumatique : les particules sont entraînées par le fluide.



Classification des poudres

Classification de Geldart :

- groupe (C) : particules adhésives (fortes interactions entre les grains)
→ difficile à fluidiser (farine, ciment...), écoulement à travers des canaux et des fissures, pas de formation de bulle



- groupe (A) : particules facile à fluidiser (silice, polystyrène)
- groupe (B) : particules centimétriques
→ début de la fluidisation avec formation de poches de fluide
- groupe (D) : grosses particules (gravier)
→ les poches de fluide sont grandes et les fluctuations de pressions sont importantes

Début de la fluidisation

Force de traînée = poids apparent du lit

Pour une particule,

$$0 = \vec{F}_s + \vec{F}_g \quad (21)$$

Force de traînée :

$$F_s = \frac{1}{2} \rho_f \cdot C_d \frac{\pi d^2}{4} u_r^2 \quad (22)$$

avec C_d coefficient de traînée, u_r la vitesse relative ($u_r = u_f - u_p$; u_f vitesse du fluide, u_p vitesse de la particule)

Poids apparent de la particule (poussée d'Archimède):

$$F_g = -\frac{\pi}{6} d^3 \cdot g (\rho_p - \rho_f) \quad (23)$$

D'où

$$\frac{1}{2} \rho_f \cdot C_d \frac{\pi d^2}{4} u_r^2 = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot g (\rho_p - \rho_f) \quad (24)$$

Pour un lit de particules, la perte de pression s'écrit :

$$\Delta P = L(1 - \epsilon)(\rho_p - \rho_f)g \quad (25)$$

Au début de la fluidisation et si le régime est laminaire :

$$\Delta P = \frac{\mu \cdot L \cdot u_{mf}}{k} \quad (26)$$

où u_{mf} est la vitesse minimum de fluidisation.

Dans le cas où le régime d'écoulement est turbulent, il faut reprendre l'équation d'Ergun (éq. 11) avec des constantes caractéristiques des propriétés structurales du lit de particules :

$$\Delta P = C_1 \cdot u_{mf} + C_2 \cdot u_{mf}^2 \quad (27)$$

On peut alors écrire, en régime laminaire :

$$L(1 - \varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho_f)g = \frac{\mu \cdot L \cdot u_{mf}}{k} \quad (28)$$

ε_{mf} est la porosité du lit au début de la fluidisation

Ainsi

$$u_{mf} = k(1 - \varepsilon_{mf}) \frac{(\rho_p - \rho_f)g}{\mu} \quad (29)$$

Nombre de Reynolds au minimum de fluidisation :

$$Re_{mf} = \frac{\rho_f \cdot u_{mf} \cdot d_{sv}}{\mu} \quad (30)$$

Pour un empilement aléatoire de particules sphériques, on peut réécrire l'équation d'Ergun sous forme adimensionnelle :

$$Ar = 150 \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3} Re_{mf} + 1,75 \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} Re_{mf}^2 \quad (31)$$

avec Ar le nombre d'Archimède :

$$Ar = \frac{\rho_f(\rho_p - \rho_f) \cdot g \cdot d_{sv}^3}{\mu} \quad (32)$$

Au minimum de fluidisation, $\varepsilon_{mf} \approx 0,40$

L'équation (31) devient :

$$Ar = 1406 \cdot Re_{mf} + 27,34 \cdot Re_{mf}^2 \quad (33)$$

On trouve aussi :

$$Ar = 1650 \cdot Re_{mf} + 24,5 \cdot Re_{mf}^2 \quad (34)$$

ou encore

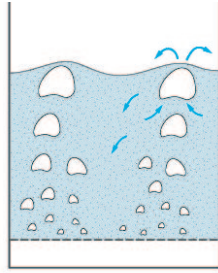
$$Ar = 1060 \cdot Re_{mf} + 159 \cdot Re_{mf}^{1,687} \quad (35)$$

Lit fluidisé bouillonnant ou pistonant

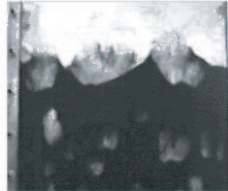
Lit fluidisé bouillonnant (bubbling fluidization) : apparition de poches de fluide

Théorie de Toomey et Johnstone (1952) :

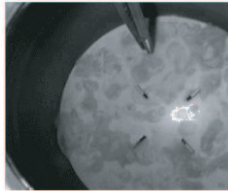
écoulement diphasique constitué des poches ou bulles de fluide (bubbling phase) et de la phase granulaire



(a) coalescence des bulles et rétro-mélangeage de la suspension par le mouvement des bulles



(b) forme des bulles dans un lit bidimensionnel de sable de 250 μm (vue de face)



(c) éclatement des bulles à la surface d'un lit d'alumine de calcination de 150 μm

- gaz passant à travers le lit sous forme de bulles = $Q - Q_{mf} = (u - u_{mf})A$
- gaz passant à travers la phase granulaire = $Q_{mf} = u_{mf}A$

Q est le débit réel de gaz et Q_{mf} le débit de gaz au minimum de fluidisation.

Expansion du lit :

$$\varepsilon_B = \frac{H - H_{mf}}{H} = \frac{Q - Q_{mf}}{A \cdot u_B} = \frac{u - u_{mf}}{u_B} \quad (36)$$

où ε_B est la fraction du lit occupée par les bulles, H la hauteur du lit à u , H_{mf} la hauteur du lit à u_{mf} et u_B est la vitesse moyenne des bulles de gaz dans le lit (corrélations)

Porosité moyenne du lit :

$$(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon_B)(1 - \varepsilon_{mf}) \quad (37)$$

Attention : cette théorie surestime le volume de gaz traversant le lit via les bulles.

→ débit des bulles $Q_B = \gamma(u - u_{mf})$

avec

- pour les poudres du groupe A : $0,8 < \gamma < 1,0$
- pour les poudres du groupe B : $0,6 < \gamma < 0,8$
- pour les poudres du groupe D : $0,25 < \gamma < 0,6$

Corrélations \Rightarrow vitesse de montée des bulles $u_B = f(d_B, D)$ (d_B diamètre des bulles, D diamètre du lit) selon le groupe A, B ou D.

Entraînement et transport pneumatique

Éjection des particules de la surface du lit et transport par le fluide

corrélations \Rightarrow hauteur du conduit (de la surface du lit à la sortie) : $TDH \propto d_B^n$

Transport pneumatique :

- transport en phase diluée
 - vitesse de gaz élevée ($> 20 \text{ m.s}^{-1}$)
 - faible concentration en particules ($< 1\%$ en volume)
 - faibles pertes de charge ($< 5 \text{ mbar.m}^{-1}$)
 - distance limitée
 - débit $< 10 \text{ t.h}^{-1}$
 - interaction fluide-particules

- transport en phase dense
 - vitesse de gaz faible ($1\text{-}5 \text{ m.s}^{-1}$)
 - forte concentration en particules ($> 30\%$ en volume)
 - grandes pertes de charge ($> 20 \text{ mbar.m}^{-1}$)
 - interaction particules-particules

Stockage et écoulement des poudres

- tas de sable, talus
- silo

Questions :

- comportement d'un tas = ou \neq d'un solide, d'un liquide ?
- dimensionnement d'un silo = ou \neq au réservoir de liquide ?

Interaction entre particules

Lois du frottement solide (Léonard de Vinci, Guillaume d'Amontons, Euler, Coulomb) :

- force de traction \propto poids total : $T = \mu.P$ (μ coefficient de frottement, P poids)
- force de traction T indépendante de la surface en contact
- frottement statique caractérisé par μ_s (solides initialement au repos) \neq frottement dynamique (μ_d) (solides déjà en mouvement à vitesse constante). On a toujours $\mu_d \leq \mu_s$ (Euler).

Friction

- métal/métal : $\mu \approx 1$
- roche/roche : $\mu \approx 0,7$
- papier/papier : $\mu \approx 0,4$

μ très peu dépendant de la nature des matériaux en contact

\Leftarrow analyse micrographique de la surface des solides

Aspérités : taille de l'ordre du micron

sous faibles contraintes : déformation plastique

\Rightarrow déformation à pression constante P jusqu'à supporter la charge normale N :

ainsi $N = P.A$ (A aire de contact)

Sous l'action d'une force tangentielle T suffisamment grande : séparation des surfaces en contact

\Leftrightarrow résistance au cisaillement caractérisée par une constante s

d'où $T = s.A$

Ainsi

$$\mu_s = \frac{T}{N} = \frac{s}{P} \quad (38)$$

Glissements et rotations

- roulement sans glissement
- glissement sans roulement
- rotation frustrée
- mouvement stick-slip (collé-glissé)

Contact de Hertz

Contact entre 2 sphères de rayon R et de module élastique E :

r rayon de la surface de contact, δ profondeur de pénétration,

$$r^2 \approx R \cdot \delta \quad (39)$$

$$P \approx E \frac{\delta}{r} \quad (40)$$

$$F \approx P \cdot r^2 \approx E \cdot \delta \cdot r^2 \quad (41)$$

⇒ Loi de Hertz

$$F \propto \delta^{3/2} \quad (42)$$

Problème : qualité et nature de l'interface solide-solide → écarts à la relation de Hertz

⇒ modèle de la couche molle (de Gennes, 1995)

sphères inhomogènes : sphères recouvertes d'une couche mince d'épaisseur e et de module d'élasticité E_e inférieur à celui au cœur E

déformation localisée en surface :

$$P \approx E_e \frac{\delta}{e} \quad (43)$$

d'où

$$F \approx P \cdot r^2 \approx E_e \cdot r^2 \frac{\delta}{e} \approx E_e \frac{R}{e} \delta^2 \quad (44)$$

soit

$$F \propto \delta^2 \quad (45)$$

Loi de friction dans un granulaire

Expérience de Dawes

Traction T pour cisailer le matériau sous une charge P

▷ cellule de Casagrande-Jenike

On observe une loi équivalente à la loi de la friction solide

$$T = \mu_s P \quad (46)$$

$\mu_s = \tan\theta \approx 0,7$ soit $\theta \approx 35^\circ$ (voir plus loin avec l'angle de talus)

En fait, de façon générale,

$$T = \mu_s P + C \quad (47)$$

où C cohésion mécanique :

- $C = 0$ pour des poudres non-cohésives
- $C \neq 0$ pour des poudres cohésives (adhésion entre les particules, humidité...)

On trouve aussi la loi de Warren-Spring :

$$\left(\frac{T}{C}\right)^n = \frac{P + \tau}{\tau} \quad (48)$$

où τ est la contrainte de rupture à la traction

De façon identique, il existe une cellule de cisaillement pour la friction poudre/paroi :

$$\tan\theta_w = \frac{T_w}{\sigma_w} \quad (49)$$

θ_w angle dynamique, T_w force de cisaillement et σ_w contrainte normale à la paroi.

Statique d'un empilement granulaire

Problème de grande complexité : histoire du matériau, désordre des contact et de la répartition des forces

Deux principes de base :

- mobilisation de la friction
- dilatance de Reynolds

Mobilisation de la friction

Caractéristiques d'un empilement réel :

- désordre des contacts
 - dispersion des formes et des tailles des grains
 - équilibres hyperstatiques
 - frottement entre grains
 - points de contacts non indispensables
- désordre des forces de friction
 - réactions entre 2 solides en contact

- * force normale au plan tangent au point de contact (OK)
 - * réaction tangentielle au contact des 2 solides = résistance de frottement (indéterminée)
- histoire de l'empilement (manière dont l'équilibre a été atteint)

Comportement d'un matériau granulaire soumis à une contrainte :

- écart avec la loi d'élasticité linéaire (loi de Hooke)
- enrichissement des chemins de contraintes (rigidité croissante)
- redirection des forces dans des directions perpendiculaires à la contrainte initiale
- effets de voûte

▷ Voûte en équilibre sous son propre poids

Équilibre d'un segment (quelques grains)

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \rho \cdot \vec{g} \cdot dl \quad (50)$$

avec ρ la densité linéique de la chaîne, \vec{F}_A et \vec{F}_B les forces s'exerçant aux extrémités du segment dl

Si θ est l'angle entre le segment dl et l'horizontale :

$$\frac{dx}{dl} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{dy}{dl} = \sin\theta \quad \text{et} \quad dx^2 + dy^2 = dl^2 \quad (51)$$

Or, en projetant sur x et y :

$$F \frac{dx}{dl} = F_x \quad (52)$$

avec F_x composante horizontale

$$\left(F \frac{dy}{dl} \right)_A - \left(F \frac{dy}{dl} \right)_B - \rho \cdot g \cdot dl = 0 \quad (53)$$

soit

$$\frac{d}{dl} \left(F \frac{dy}{dl} \right) + \rho \cdot g = 0 \quad (54)$$

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\rho \cdot g}{F_x} = 0 \quad (55)$$

D'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\rho \cdot g}{F_x} \frac{dl}{dx} = -\frac{\rho \cdot g}{F_x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (56)$$

→ équation de la chaînette :

$$y = -\frac{F_x}{\rho \cdot g} \left[\cosh \left(-\frac{\rho \cdot g}{F_x} x - 1 \right) \right] \quad (57)$$

relation valable si les particules sont en condition de roulement sans glissement.

▷ Voûte supportant une charge également distribuée

voûte de poids négligeable qui supporte une masse linéique m_o également répartie :

$$m_o \cdot g \cdot dx = \rho \cdot g \cdot dl \quad (58)$$

En reprenant l'équation (55),

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{m_o \cdot g}{F_x} \frac{dx}{dl} = 0 \quad (59)$$

soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m_o \cdot g}{F_x} = 0 \quad (60)$$

On en déduit :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{m_o \cdot g}{F_x} x^2 \quad (61)$$

→ voûte de forme parabolique (cas 2D)

En 3D, voûte en forme de dôme : $y \propto x^3$

Dilatance de Reynolds

Un matériau granulaire fortement compacté placé dans une enveloppe flexible, voit son volume augmenter lorsque cette enveloppe est déformée.

Déformation \Rightarrow dilatation

Modélisation simple : déformation d'un losange élémentaire

Remarque : on a un déplacement d'une nappe de grains par rapport à la nappe adjacente si $T > \text{seuil}$, c'est-à-dire quand $\theta = \arctan \mu_s$

Récipient cylindrique : modèle de Janssen

Modélisation du silo due à Janssen puis reprise par Rayleigh : basée sur la réorientation des contraintes verticales vers les parois latérales

- Milieu considéré comme continu (!)
- Pression verticale appliquée sur le matériau \Rightarrow pression horizontale telle que $p_h = K \cdot p_v$ (cf modèle des losanges)

On considère une tranche d'épaisseur dh située à l'altitude h dans un cylindre de section A et de périmètre ϖ . L'équilibre de cette tranche est donné par :

- une force dirigée vers le haut (la pression augmente avec la profondeur) : Adp_v
- le poids de la tranche : $\rho \cdot g \cdot Adh$ (ρ densité apparente de la poudre indépendante de la profondeur)
- la résultante des forces de frottement à la paroi : $\mu_s \cdot p_h \cdot \varpi \cdot dh$ (hypothèse) soit $K \cdot \mu_s \cdot p_v \cdot \varpi \cdot dh$.

Ainsi,

$$Adp_v + K \cdot \mu_s \cdot p_v \cdot \varpi \cdot dh = \rho \cdot g \cdot Adh \quad (62)$$

$$\frac{dp_v}{dh} + \left(K \cdot \mu_s \cdot \frac{\varpi}{A} \right) p_v = \rho \cdot g \quad (63)$$

L'intégration conduit à :

$$p_v \cdot e^{(K \cdot \mu_s \cdot \varpi / A)h} = \rho \cdot g \cdot \frac{A}{\varpi \cdot K \mu_s} e^{(K \cdot \mu_s \cdot \varpi / A)h} + C \quad (64)$$

C constante à déterminer selon les conditions limites

Pour un cylindre de diamètre D , :

$$p_v = \rho \cdot g \cdot \frac{D}{4K\mu_s} \left[1 - e^{-\left(\frac{4K\mu_s}{D}\right)h} \right] \quad (65)$$

Remarques :

- profil exponentiel caractéristique des silos
- si le silo est petit, la pression est similaire à la pression hydrostatique d'un liquide :

$$p_v = \rho \cdot g \cdot h \quad (66)$$

- si le silo est grand, p_v devient indépendant de la hauteur (typiquement quand $h > 4D$) :

$$p_v = \frac{\rho \cdot g \cdot D}{4K\mu_s} = \frac{\rho \cdot g \cdot D}{4K \tan \theta_w} \quad (67)$$

Milieux granulaires en écoulement

Tas de sable à l'équilibre et angle de talus

Angle de talus : $\approx 35^\circ$ à comparer avec $\arctan \mu$

- facteur géométrique (courbure de l'empilement) : θ_s
- facteur inhérent à la physique de l'empilement (expérience du tambour tournant) : angle de mouvement θ_m et angle de repos θ_r

Écoulement à la sortie d'un sablier ou d'un silo

On observe en effet que la vitesse de vidange d'un sablier est indépendante de la hauteur de sable et ne dépend que du diamètre du col D contrairement à un écoulement d'eau. Cela s'explique simplement par le fait que la pression au niveau du trou qui contrôle l'écoulement est indépendante de la hauteur de grains. Il est alors possible de raisonner par analyse dimensionnelle pour trouver la vitesse de vidange. La hauteur h de matériau n'intervient pas, et si les grains sont petits devant l'ouverture, leur taille n'intervient pas non plus. La seule longueur pertinente

restante est le diamètre d'ouverture D : il vient alors que la vitesse de vidange est de l'ordre de :

$$v = \sqrt{g.D} \quad (68)$$

et donc le débit de matière J dans un sablier ou un silo d'ouverture D s'écrit :

$$J = \rho.v.D^2 \quad (69)$$

On en déduit la loi suivante, proposée par Hagen en 1852 :

$$J = \rho.g^{1/2}.D^{5/2} \quad (70)$$

Brown et Richard (1960) et Beveloo ont montré un diamètre minimal D_m , de l'ordre de 4 à 5 diamètres de grains au-dessous duquel le débit s'annule :

$$J = \rho.g^{1/2}.(D - D_m)^{5/2} \quad (71)$$

Le phénomène de blocage de l'écoulement correspond à la formation spontanée d'une voûte au niveau du col.

Dimensionnement d'un silo

Protocole en 3 étapes permettant de déterminer l'ouverture D du silo et son demi-angle d'ouverture θ de façon à éviter la formation d'arches :

- Caractérisation de la poudre à stocker en déterminant son lieu cinématique de rupture, c'est-à-dire le cisaillement τ à partir duquel il y a rupture pour une contrainte normale σ . Cette mesure est faite pour différents états de compaction (consolidation). Idem à la paroi.
- On en déduit la fonction d'écoulement $\sigma_p = FF(\sigma_l)$, qui est la contrainte maximale que peut supporter une arche en fonction de la contrainte maximale supportée par la poudre à un taux de compaction donnée. σ_l est la contrainte de consolidation.
- Connaissant les angles de friction à la paroi ϕ_w et interne δ , on peut déterminer un demi-angle d'ouverture θ permettant soit un écoulement en masse, soit un écoulement en noyau. Enfin, la géométrie du convergent étant fixée, et connaissant l'angle de friction interne, les calculs de Jenike permettent d'obtenir le ratio des contraintes principales, supposées radiales et orthoradiales dans un convergent conique. Ce ratio est appelé le facteur d'écoulement ff . Ces calculs sont résumés en une série d'abaques. La comparaison de la fonction d'écoulement de la poudre et du facteur d'écoulement permet de calculer une ouverture minimale D pour qu'il n'y ait pas de formation d'arche.

Nombre de Bagnold

Écoulement de nappes (matériau granulaire incliné avec un angle $>$ angle de talus) : strates parallèles dont la vitesse décroît rapidement avec la profondeur

similaire au transfert de quantité de mouvement (viscosité)

gradient de vitesse :

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (72)$$

→ perte d'énergie cinétique

vitesse relative d'une particule de diamètre d et de masse m par rapport à la nappe sous-jacente : $d\gamma$

dissipation de l'énergie cinétique E_c sur une longueur caractéristique l due à la force de friction F_c :

$$F_c = \frac{\partial E_c}{\partial x} = \frac{m \cdot d^2}{2 \cdot l} \gamma^2 \quad (73)$$

avec $l \approx \text{qq } d$

Si F_v est la force de frottement due à l'interaction visqueuse avec le fluide, alors

$$v \cdot \gamma = \frac{F_v}{d^2} \quad (74)$$

En comparant ces deux effets, on aboutit au nombre de Bagnold :

$$B = \frac{F_c}{F_v} = \frac{m\gamma}{2l \cdot v} \quad (75)$$

⇒ deux régimes :

- $B < 40$: régime macro-visqueux (rôle important de la viscosité du fluide dans la dissipation d'énergie)
- $B > 450$: régime granulaire (chocs et frottements entre grains responsables de la dissipation)

⇒ boues, pâtes alimentaires, sédimentologie marine...

Exemple du tambour

tambour avec une vitesse de rotation Ω

phénomènes intéressants :

- à très faible vitesse ($\Omega < 0,1$ tour/minute) : régime d'écoulement intermittent :
oscillation de la nappe superficielle entre 2 angles θ_m et θ_r , définition assez précise de l'angle θ , série d'avalanche décrite par une statistique particulière
- vitesse de rotation plus importante (typiquement 5 tours/minute) : écoulement continu :
déformation de la surface (en forme de S), particules au sommet de la nappe entraînées par la force centrifuge
- hystérésis lors de la variation d' Ω

Phénomène typiquement critique :

variation du flux de granulés s'écoulant en surface en fonction de θ

Analogie avec les transitions critiques (exemple : transition de phase, isolant-conducteur...)

On cherche à vérifier une loi du type :

$$J \approx (\theta - \theta_c)^m \quad (76)$$

où J est le flux de matière et θ_c l'angle critique

Remarquons que : J est donné par la loi de conservation de la matière (rég. stationnaire)

Pour un tambour à moitié rempli, (au moins dans la partie centrale de l'écoulement) :

$$J = \frac{1}{2} e \cdot \Omega \cdot R^2 \quad (77)$$

où e est l'épaisseur du tambour et R son rayon.

Expérimentalement, on vérifie que

$$J \approx (\theta - \theta_c)^m \quad (78)$$

avec $m = 0,5 \pm 0,1$

Calcul fait à partir de la force de friction $F_c \propto \gamma^2 \propto (\nabla v)^2$ et la loi de frottement (Coulomb)

Remarque : pour un fluide newtonien d'épaisseur h , de densité ρ et de viscosité μ , s'écoulant sur un plan incliné à θ par rapport à l'horizontale :

$$J = \frac{\rho \cdot g \cdot h^3}{3\mu} \sin\theta \quad (79)$$

ainsi, $m = 1$ et $\theta_c = 0$.

Mélange et ségrégation

Mélange des solides divisés : opération clé (pharmacie, agroalimentaire, ciments, matières plastiques...)

De façon quasi générale, les matériaux granulaires secs présentent une grande résistance au mélange homogène. Écart entre :

- les masses spécifiques
- la forme
- la taille
- les propriétés micromécaniques (coefficient de restitution élastique et de friction)

⇒ ségrégation → démixtion plus ou moins complète du matériau

↔ auto-organisation (rassemblement des particules identiques entre elles)

Exemples :

- ségrégation des grosses pierres lors de travaux de terrassement ou de labour
- séparation par agitation, des grosses graines issus d'une récolte (pb des Noix du Brésil)
- mélange de granulés (type Kellogs)
- ...

Aspects physiques

Illustration : tambour d'Oyama (ségrégation → couches alternées après quelques rotations à vitesse lente (raison inconnue) ← ségrégation par rotation,

On peut citer plusieurs processus de mélange et de ségrégation :

- cisaillement, c'est-à-dire provoquée par écoulement différentiel de nappes superposées (grosses pierres poussées en surface);
- convection, c'est-à-dire un déplacement de blocs de particules d'un lieu à un autre conduisant à un réarrangement à l'échelle de l'appareil (mélangeur);
- diffusion, c'est-à-dire un déplacement individuel des particules conduisant à des réarrangements à l'échelle de quelques particules, mais pour des temps caractéristiques plus longs;
- vibration, c'est-à-dire provoquée par agitation (verticale souvent).

En réalité, combinaison des différents processus.

Raisons encores inconnues, ségrégation par taille surtout étudiée.

Constatation assez générale : mouvements internes ou de surface tendent à expulser les objets les plus grands vers la périphérie.

Mécanismes de ségrégation par taille (Williams, 1990)

- ségrégation par trajectoires :

si une petite particule de diamètre d et de densité ρ_p a un mouvement horizontal régi par la loi de Stokes avec une vitesse v dans un fluide de viscosité μ et de densité ρ_f , alors la distance qu'elle peut parcourir est :

$$l = \frac{v \cdot \rho_p \cdot d^2}{18\mu} \quad (80)$$

Rappel : la force de traînée appliquée sur une particule est :

$$\frac{1}{2} C_d \cdot \rho_f \cdot v^2 \frac{\pi d^2}{4} \quad (81)$$

La décélération de la particule est le rapport force de traînée/masse de la particule. En régime de Stokes $C_d = 24/Re_p$. D'où la décélération :

$$\frac{18v \cdot \mu}{\rho_p \cdot d^2} \quad (82)$$

Une particule de vitesse initiale v et de décélération constante $18v \cdot \mu / \rho_p \cdot d^2$ parcourt une distance l avant son arrêt :

$$l = \frac{v \cdot \rho_p \cdot d^2}{18\mu} \quad (83)$$

- ségrégation par percolation :

lorsqu'un milieu granulaire est mis en mouvement, un réarrangement s'opère. Ainsi les petites particules glissent dans les trous créés et se retrouvent dans la partie inférieure, les plus grosses remontant à la surface (flottation). Dans le cas de la mise en tas, les plus grosses se retrouvent sur les bords et les petites au cœur.

- ségrégation par élutriation :

il s'agit du ralentissement des plus fines particules lors de leur chute du fait de l'air chassé par les plus grosses. C'est le cas souvent avec des particules de $< 50 \mu\text{m}$. La vitesse de l'air peut être supérieure à la vitesse terminale de chute des fines. Ainsi, les plus grosses se retrouvent dans le bas et les fines au-dessus.

On peut aussi ajouter la ségrégation par effets d'arche

Énergie potentielle d'un empilement hétérogène

ségrégation granulaire par taille : conséquence du principe de dilatance de Reynolds

quelques remarques : 2 types de sphère de même matériau (petit rayon r et de masse m et grand rayon R et de masse M)

Si la plus grosse se trouve au dessus, l'énergie potentielle de cet empilement élémentaire :

$$E_p = m \cdot g \cdot r + M \cdot g \cdot (R + 2r) \quad (84)$$

Ayant même densité volumique :

$$E_p \propto r^4 + R^4 + 2r.R^3 \quad (85)$$

expression n'est pas symétrique entre R et r :

configurations r/R et R/r non équivalentes du point de vue énergétique

▷ particule plus lourde en bas (les plus grosses)

Mis en défaut par l'expérience !

Superposition d'empilements

2 couches superposées de 2 sortes de billes de tailles différentes :

en l'absence de défauts structurels, empilements A/B et B/A énergétiquement équivalents
réseau triangulaire compact (compacité maximale) plus stable qu'un empilement carré et donc à E_p plus faible

Or seul le réseau compact présente les caractéristiques imposés par le principe de dilataance de Reynolds. Soumis à une distorsion qq, il ne peut que se dilater. \Rightarrow création de défauts

Où se trouvent ces défauts, en bas ou en haut ?

A priori, minimum d'énergie pour des défauts en haut (moins dense)

En 2D, insertion de défauts par insertion d'un grand disque dans un empilement :

- portion inférieure compacte
- ordre de la partie supérieure perturbé par le grand disque

d'où la remarque : ségrégation = conséquence du principe de dilataance

Mais explication insuffisante

ségrégation : succession d'états relaxés

Ségrégation par vibrations

vibration d'un ensemble particulière : exploration d'un grand nombre de configurations

Rq: se prête bien à la simulation par ordinateur (dynamique moléculaire)

Expérimentalement, suivi d'une particule marquée placé dans un environnement enrichi de quelques traceurs (mvt des autres particules)

Phénomènes :

mise en équilibre d'un intrus par effet d'arche

Recherche des conditions de stabilité \rightarrow modèle :

description de l'ascension de l'intrus : montée continue ou intermittente (cad par palier)

\rightarrow diagramme d'ascension

un petit intrus voit les discontinuités de l'environnement granulaire

Cause ? processus moteur ?

Apparition de fractures autour de l'intrus

- un petit intrus (rapport des rayons $R/r < 13$) déplacement relatif important (seuil d'agitation nécessaire élevé)
- un grand intrus ($R/r > 13$) : progression plus facile en restant constamment en situation d'arche (seuil beaucoup plus faible)

⇒ un grand intrus remonte beaucoup plus aisément

Qualité de mélange

Objectif : à partir d'un ensemble de solides divisés, obtenir une certaine quantité de matière dont l'homogénéité est satisfaisante

En pratique, il n'est pas possible d'obtenir un mélange parfait. Généralement, le but est de produire un mélange aléatoire, c'est-à-dire un mélange dans lequel la probabilité de trouver une particule d'un des constituants est la même partout et égale à la proportion de celui-ci dans l'ensemble du mélange. La composition réelle μ est rarement connue, néanmoins une estimation \bar{y} peut être obtenue par échantillonnage.

- Composition moyenne \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (86)$$

avec N nombre total d'échantillons, y_i composition des échantillons en constituants i .

- écart-type σ et la variance σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad \text{pour } \mu \text{ connu} \quad (87)$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{pour } \mu \text{ inconnu} \quad (88)$$

Limites théoriques de la variance :

- limite haute (mélange complètement ségrégué) :

$$\sigma_o^2 = p(1-p) \quad (89)$$

- limite basse (mélange aléatoire) :

$$\sigma_r^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (90)$$

avec p la composition en nombre de particules du mélange en constituant clé et n le nombre de particules dans un échantillon.

Un état de mélange donné est à comparer avec ces deux limites.

D'où les indices de mélange :

- Indice de Lacey (1954) :

$$\frac{\sigma_o^2 - \sigma^2}{\sigma_o^2 - \sigma_r^2} \quad (91)$$

- Indice de Kramer (1954) :

$$\frac{\sigma_o - \sigma}{\sigma_o - \sigma_r} \quad (92)$$

- Indice de Poole (1964) :

$$\frac{\sigma}{\sigma_r} \quad (93)$$

- Indice de Ashton :

$$\frac{\log[\sigma_o^2/\sigma^2]}{\log[\sigma_o^2/\sigma_r^2]} \quad (94)$$

- Indice de Rose :

$$1 - \frac{\sigma}{\sigma_o} \quad (95)$$

Cas des mélanges multiconstituants et polydispersés : relations de Stange

Cas des poudres cohésives : relations de Coelho

Problème : échantillonnage

technique de prélèvement (statique, dynamique), validité statistique de la mesure, perturbation...

Types de mélangeurs

Séparation, classification

Séparateurs :

- tamis : refus, fines
- cyclone (gaz), hydrocyclone

Cyclone :

Écoulement rotationnel (vortex \rightarrow gradient de pression radial

Nombre d'Euler : rapport forces de pression / forces d'inertie:

$$Eu = \frac{2\Delta p}{\rho_f \cdot v^2} \quad (96)$$

où Δp : perte de charge dans le cyclone, ρ_f densité du gaz, v vitesse caractéristique définie par :

$$v = \frac{4q}{\pi D^2} \quad (97)$$

q débit de gaz, D diamètre intérieur du cyclone

Efficacité de séparation : coupe de partage

écart probable :

$$\frac{d_{75\%} - d_{25\%}}{2} \quad (98)$$

imperfection (normée à $d_{50\%}$)

$$\frac{d_{75\%} - d_{25\%}}{2d_{50\%}} \quad (99)$$

Pour un cyclone avec les débits

- M des particules solides,
- M_f des fines
- M_g des grosses

Le bilan total en masse donne :

$$M = M_f + M_g \quad (100)$$

Le bilan sur chaque constituant de taille x donne :

$$M \frac{dF}{dx} = M_f \frac{dF_f}{dx} + M_g \frac{dF_g}{dx} \quad (101)$$

avec les dF/dx , les distributions de taille en fréquence par masse (fraction massique de taille x), F les distributions de taille en fréquence cumulée par masse.

L'efficacité totale de séparation est alors :

$$E = \frac{M_g}{M} \quad (102)$$

L'efficacité avec laquelle le cyclone collecte les particules d'une certaine taille est le grade :

$$G(x) = \frac{M_g (dF_g/dx)}{M (dF/dx)} \quad (103)$$

soit

$$G(x) = E \cdot \frac{(dF_g/dx)}{(dF/dx)} \quad (104)$$

On a aussi :

$$(dF/dx) = E \cdot (dF_g/dx) + (1 - E) (dF_f/dx) \quad (105)$$

En cumulée :

$$F = E \cdot F_g + (1 - E) \cdot F_f \quad (106)$$

Dimensionnement d'un cyclone :

Basé sur le nombre de Stokes (rapport force centrifuge / force de traînée) :

$$Stk_{50} = \frac{x_{50}^2 \rho_p \cdot v}{18\mu \cdot D} \quad (107)$$

Justification théorique

Perry (1984) :

$$grade = \frac{(x/x_{50})^2}{1 + (x/x_{50})^2} \quad (108)$$

∃ approximation utile pour les cyclones (bien dimensionnés) :

$$Eu = \sqrt{\frac{12}{Stk_{50}}} \quad (109)$$

Fragmentation et granulation

Broyage - fracture

Réduction de taille : augmentation de la surface

Très gourmand en énergie : rendement faible ($\approx 1\%$)

Réduction de taille : passage du comportement élastique à plastique \Rightarrow limites de broyabilité
origine : défauts internes

Énergie de relaxation des contraintes $>$ énergie requise pour créer de nouvelles surfaces \Rightarrow propagation de fissures

Énergie requise

Rittinger (1867) propose $E \propto$ aire de la surface créée $E = C \cdot (S_1 - S_2)$

volume initial de la particule :

$$k_v \cdot d_1^3 \quad (110)$$

volume final de la particule :

$$k_v \cdot d_2^3 \quad (111)$$

k_v facteur de forme volumique indépendant de la taille

chaque particule de taille d_1 donne d_1^3/d_2^3 particules de taille d_2 . Si le facteur de forme surfacique k_s est indépendant de la taille, la nouvelle surface créée est :

$$\left(\frac{d_1^3}{d_2^3}\right) k_s \cdot d_2^2 - k_s \cdot d_1^2 \quad (112)$$

soit

$$k_s \cdot d_1^3 \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right] \quad (113)$$

d'où l'énergie requise pour broyer :

$$E = C \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right] \quad (114)$$

C une constante Sous forme différentielle (avec x la taille):

$$\frac{dE}{dx} = -C \frac{1}{x^2} \quad (115)$$

Cependant, la relation sous-estime l'énergie nécessaire.

Exemple : broyage de particules de 50 à 10 μm : $E = 13$ kWh/t. On en déduit que $C = 162,5$.
Pour le broyage de 75 à 25 μm : 4,33 kWh/t.

Kick (1885) propose plutôt $E \propto$ rapport des volumes initial et final :

$$E = C \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right) \quad (116)$$

Selon le même exemple : $C = 8,08$ et $E = 8,88$ kWh/t

Bond (1952) propose :

$$E = W \left[\frac{10}{\sqrt{d_2}} - \frac{10}{\sqrt{d_1}} \right] \quad (117)$$

W index de Bond (bauxite : $W = 9,45$ kWh/t ; coke : $W = 20,7$ kWh/t ; roche : $W \approx 8,2$ kWh/t)

Formule de Rittinger adaptée pour les ultra-fines, Formule de Kick adaptée pour les grosses particules et Formule de Bond adaptée pour les particules de taille intermédiaire

Type de broyeurs

Choix lié à :

- mécanisme de broyage
- taille des particules à broyer et du broyat
- propriétés de la matière (dureté, abrasivité, résistance à la rupture, cohésion, température de fusion, sensibilité à l'échauffement, nature fibreuse...)
- milieu de broyage (liquide ou gaz)
- mode opératoire (batch, continu)
- circuit ouvert ou fermé
- capacité

Augmentation de la taille - agglomération

- Granulation,
- compactage,
- extrusion,
- frittage,
- ...

forces interparticulaires, pont de liquide (tension de surface),...