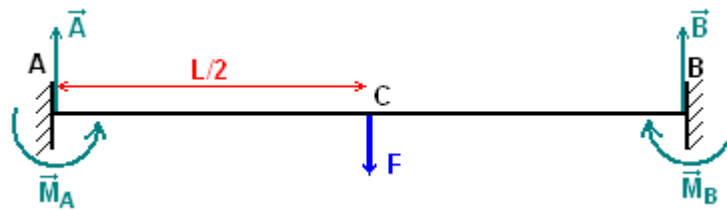


Poutre encastree avec une force concentree en C



Pour un tel cas, on sait que :

$$\vec{A} = \vec{B} = \frac{\|F\|}{2} \vec{y}$$

$$\vec{M}_A = -\vec{M}_B = \frac{\|F\| \cdot L}{8} \vec{z}$$

De A à C : Effort tranchant : $\vec{V} = -\frac{\|F\|}{2} \vec{y}$

De C à B : Effort tranchant : $\vec{V} = \frac{\|F\|}{2} \vec{y}$

Pour $x = L/2$: Moment fléchissant maximum : $M_{f_{Gz}} = \frac{\|F\| \cdot L}{8}$

La flèche en C est donc de $y_C = \frac{\|F\| \cdot L^3}{192 EI_{Gz}}$

Système symétrique : $\vec{A} = \vec{B}$

$$(\sum F_{ext})_y = 0 : A + B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{B} = \frac{\|F\|}{2} \vec{y} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\sum M)_A = 0 & \Rightarrow -M_A + \frac{FL}{2} + M_B - B \cdot L = 0 \\ & \Rightarrow -M_A + \frac{FL}{2} + M_B - \frac{F}{2} \cdot L = 0 \\ & \Rightarrow M_A = M_B \end{aligned} \quad (2)$$

Méthode des fonctions de singularité :

➤ Chargement : $q(x) = -M_A \langle x \rangle_{-2} + A \langle x \rangle_{-1} - F \langle x - L/2 \rangle_{-1} + B \langle x - L \rangle_{-1} + M_B \langle x - L \rangle_{-2}$

$$q(x) = -M_A \langle x \rangle_{-2} + \frac{F}{2} \langle x \rangle_{-1} - F \langle x - L/2 \rangle_{-1} + \frac{F}{2} \langle x - L \rangle_{-1} + M_B \langle x - L \rangle_{-2} \quad (3)$$

➤ Effort tranchant :

$$V(x) = -\int q \, dx = M_A \langle x \rangle_{-1} - \frac{F}{2} \langle x \rangle^0 - F \langle x - L/2 \rangle^0 - \frac{F}{2} \langle x - L \rangle^0 - M_B \langle x - L \rangle_{-1} \quad (4)$$

➤ Moment fléchissant :

$$M(x) = -\int V \, dx = -M_A \langle x \rangle^0 + \frac{F}{2} \langle x \rangle^1 - F \langle x - L/2 \rangle^1 + \frac{F}{2} \langle x - L \rangle^1 + M_B \langle x - L \rangle^0 \quad (5)$$

➤ Pente :

$$EI\varphi(x) = \int M \, dx + C_1$$

$$EI\varphi(x) = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{F}{4} \langle x \rangle^2 - \frac{F}{2} \langle x - L/2 \rangle^2 + \frac{F}{4} \langle x - L \rangle^2 + M_B \langle x - L \rangle^1 + C_1 \quad (6)$$

➤ Flèche :

$$EIv(x) = \int EI\varphi dx + C_2$$

$$EIv(x) = -\frac{M_A}{2}\langle x \rangle^2 + \frac{F}{12}\langle x \rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x - L/2 \rangle^3 + \frac{F}{12}\langle x - L \rangle^3 + \frac{M_B}{2}\langle x - L \rangle^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (7)$$

Condition aux limites :

Pour $x = L$, liaison encastrement : $\varphi = 0$ et $v = 0$

$$(6) \Rightarrow 0 = -M_A \cdot L + \frac{F}{4}L^2 - \frac{F}{2} \cdot \frac{L^2}{4} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = M_A \cdot L - \frac{FL^2}{8} \quad (8)$$

$$(7) \Rightarrow 0 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{F}{12}L^3 - \frac{F}{6} \cdot \frac{L^3}{8} + C_1 \cdot L + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{F}{12}L^3 - \frac{F}{6} \cdot \frac{L^3}{8} + \left(M_A \cdot L - \frac{FL^2}{8}\right) \cdot L + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{M_A}{2}L^2 - \frac{F}{12}L^3 + \frac{FL^3}{48} - M_A \cdot L^2 + \frac{FL^3}{8}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{(-4+1+6)FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{2} \cdot L^2 + \frac{3FL^3}{48} \quad (9)$$

Pour $x = 0$, liaison encastrement : $\varphi = 0$ et $v = 0$ (avec $M_A = M_B$)

$$(6) \Rightarrow 0 = -\frac{F}{2} \cdot \frac{L^2}{4} + \frac{F}{4}L^2 - M_A \cdot L + C_1$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{F}{2} \cdot \frac{L^2}{4} + \frac{F}{4}L^2 - M_A \cdot L + M_A \cdot L - \frac{FL^2}{8} = 0$$

$$(7), (8) \text{ et } (9) \Rightarrow 0 = \frac{F}{6} \cdot \frac{L^3}{8} - \frac{F}{12}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 + C_1 \cdot L + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{F}{6} \cdot \frac{L^3}{8} - \frac{F}{12}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 + \left(M_A \cdot L - \frac{FL^2}{8}\right) \cdot L - \frac{M_A}{2} \cdot L^2 + \frac{3FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{FL^3}{48} - \frac{FL^3}{12} + M_A \cdot L^2 - \frac{FL^3}{8} + \frac{3FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(1-4-6+3)FL^3}{48} + M_A \cdot L^2$$

$$\Rightarrow M_A \cdot L^2 = \frac{6FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{FL}{8} \quad (10)$$

Pour $x = L/2$

$$EIv(x) = -\frac{M_A}{2}\langle L/2 \rangle^2 + \frac{F}{12}\langle L/2 \rangle^3 + \frac{F}{12}\langle L/2 - L \rangle^3 + \frac{M_A}{2}\langle L/2 - L \rangle^2 + C_1 \cdot L/2 + C_2$$

Si on développe, on trouve $EIv(x) = 0$???????????????????