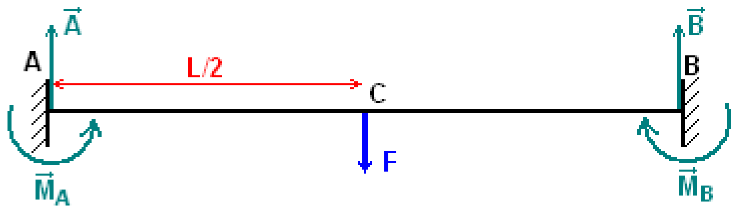
Poutre encastrée avec une force concentrée en C



Pour un tel cas, on sait que :

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = \dfrac{\|F\|}{2}\overrightarrow{y}$

$\overrightarrow{M_A} = -\overrightarrow{M_B} = \dfrac{\|F\|.L}{8}\overrightarrow{z}$

De A à C : Effort tranchant : $\vec{V} = -\frac{\|F\|}{2}\overrightarrow{y}$

De C à B : Effort tranchant : $\vec{V} = \frac{\|F\|}{2}\overrightarrow{y}$

Pour $x = L/2$: Moment fléchissant maximum : $Mf_{Gz} = \frac{\|F\|.L}{8}$

La flèche en C est donc de $y_C = \frac{\|F\|.L^3}{192\, EI_{Gz}}$

Système symétrique : $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

$(\sum F_{ext})_y = 0 : A + B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = \frac{\|F\|}{2}\overrightarrow{y}$ (1)

$(\sum M)_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_A + \frac{F.L}{2} + M_B - B.L = 0$

$\Rightarrow \quad -M_A + \frac{F.L}{2} + M_B - \frac{F}{2}.L = 0$

$\Rightarrow \quad M_A = M_B$ (2)

Méthode des fonctions de singularité :

- Chargement : $q(x) = -M_A\langle x\rangle_{-2} + A\langle x\rangle_{-1} - F\langle x - L/2\rangle_{-1} + B\langle x - L\rangle_{-1} + M_B\langle x - L\rangle_{-2}$

$$\boldsymbol{q(x) = -M_A\langle x\rangle_{-2} + \frac{F}{2}\langle x\rangle_{-1} - F\langle x - L/2\rangle_{-1} + \frac{F}{2}\langle x - L\rangle_{-1} + M_B\langle x - L\rangle_{-2}} \quad (3)$$

- Effort tranchant :

$$\boldsymbol{V(x) = -\int q\,dx = M_A\langle x\rangle_{-1} - \frac{F}{2}\langle x\rangle^0 - F\langle x - L/2\rangle^0 - \frac{F}{2}\langle x - L\rangle^0 - M_B\langle x - L\rangle_{-1}} \quad (4)$$

- Moment fléchissant :

$$\boldsymbol{M(x) = -\int V\,dx = -M_A\langle x\rangle^0 + \frac{F}{2}\langle x\rangle^1 - F\langle x - L/2\rangle^1 + \frac{F}{2}\langle x - L\rangle^1 + M_B\langle x - L\rangle^0} \quad (5)$$

- Pente :

$$EI\varphi(x) = \int M\,dx + C_1$$

$$\boldsymbol{EI\varphi(x) = -M_A\langle x\rangle^1 + \frac{F}{4}\langle x\rangle^2 - \frac{F}{2}\langle x - L/2\rangle^2 + \frac{F}{4}\langle x - L\rangle^2 + M_B\langle x - L\rangle^1 + C1} \quad (6)$$

➢ Flèche :

$$EIv(x) = \int EI\varphi \, dx + C_2$$

$$EIv(x) = -\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{F}{12}\langle x\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x - L/2\rangle^3 + \frac{F}{12}\langle x - L\rangle^3 + \frac{M_B}{2}\langle x - L\rangle^2 + C_1.x + C_2 \qquad (7)$$

<u>Condition aux limites :</u>

<u>Pour $x = L$, liaison encastrement : $\varphi = 0$ et $v = 0$</u>

$$(6) \Rightarrow 0 = -M_A.L + \frac{F}{4}L^2 - \frac{F}{2}.\frac{L^2}{4} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = M_A.L - \frac{FL^2}{8} \qquad (8)$$

$$(7) \Rightarrow 0 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{F}{12}L^3 - \frac{F}{6}.\frac{L^3}{8} + C_1.L + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{F}{12}L^3 - \frac{F}{6}.\frac{L^3}{8} + \left(M_A.L - \frac{FL^2}{8}\right).L + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{M_A}{2}L^2 - \frac{F}{12}L^3 + \frac{FL^3}{48} - M_A.L^2 + \frac{FL^3}{8}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{(-4+1+6)\,FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{2}.L^2 + \frac{3FL^3}{48} \qquad (9)$$

<u>Pour $x = 0$, liaison encastrement : $\varphi = 0$ et $v = 0$</u> (avec $M_A = M_B$)

$$(6) \Rightarrow 0 = -\frac{F}{2}.\frac{L^2}{4} + \frac{F}{4}L^2 - M_A.L + C_1$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{F}{2}.\frac{L^2}{4} + \frac{F}{4}L^2 - M_A.L + M_A.L - \frac{FL^2}{8} = 0$$

$$(7), (8) \text{ et } (9) \Rightarrow 0 = \frac{F}{6}.\frac{L^3}{8} - \frac{F}{12}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 + C_1.L + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{F}{6}.\frac{L^3}{8} - \frac{F}{12}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 + \left(M_A.L - \frac{FL^2}{8}\right).L - \frac{M_A}{2}.L^2 + \frac{3FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{FL^3}{48} - \frac{FL^3}{12} + M_A.L^2 - \frac{FL^3}{8} + \frac{3FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(1-4-6+3)FL^3}{48} + M_A.L^2$$

$$\Rightarrow M_A.L^2 = \frac{6FL^3}{48}$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{FL}{8} \qquad (10)$$

<u>Pour $x = L/2$</u>

La pente est donc définie par : (6) $\Rightarrow$ $EI\varphi(x) = -M_A\langle L/2\rangle^1 + \frac{F}{4}\langle L/2\rangle^2 + \frac{F}{4}\langle -L/2\rangle^2 + M_B\langle -L/2\rangle^1 + M_A.L - \frac{FL^2}{8}$

$$EI\varphi(x) = -\frac{M_A.L}{2} + \frac{FL^2}{16} + \frac{FL^2}{16} + -\frac{M_A.L}{2} + M_A.L - \frac{FL^2}{8}$$

$$EI\varphi(x) = -\cancel{\frac{M_A.L}{2}} + \cancel{\frac{FL^2}{16}} + \cancel{\frac{FL^2}{16}} + -\cancel{\frac{M_A.L}{2}} + \cancel{M_A.L} - \cancel{\frac{FL^2}{8}} = 0$$

$$EI\varphi(x) = 0$$

CQFD

La flèche est donc maximum pour $x = L/2$

La flèche est quant à elle définie : (7) $\Rightarrow EIv(x) = -\frac{M_A}{2}\langle L/2\rangle^2 + \frac{F}{12}\langle L/2\rangle^3 + \frac{F}{12}\langle L/2 - L\rangle^3 + \frac{M_A}{2}\langle L/2 - L\rangle^2 + C_1.L/2 + C_2$

$$EIv(x) = -\frac{M_A.L^2}{8} + \frac{F.L^3}{96} + \frac{F}{12}\langle -L/2\rangle^3 + \frac{M_A}{2}\langle -L/2\rangle^2 + \left(M_A.L - \frac{FL^2}{8}\right).L/2 - \frac{M_A}{2}.L^2 + \frac{3FL^3}{48}$$

$$EIv(x) = \cancel{-\frac{M_A.L^2}{8}} + \cancel{\frac{F.L^3}{96}} + \cancel{\frac{F}{12}\langle -L/2\rangle^3} + \cancel{\frac{M_A}{2}\langle -L/2\rangle^2} + \left(M_A.L - \frac{FL^2}{8}\right).L/2 - \frac{M_A}{2}.L^2 + \frac{3FL^3}{48}$$

$$EIv(x) = \cancel{\frac{M_A.L^2}{2}} - \frac{FL^3}{16} - \cancel{\frac{M_A}{2}.L^2} + \frac{3FL^3}{48}$$

$$EIv(x) = -\frac{FL^3}{16} + \frac{3FL^3}{48} = 0$$

$EIv(x) = 0$ Une flèche égale à zéro alors que le résultat devrait être $v(x) = \frac{F.L^3}{192\,EI}$