THÉORÈME DE RICCI

Nous avons vu dans le chapitre de mécanique relativiste que les géodésique sont les distances les plus courtes entre deux points dans n'importe quel type d'espace. Ce qui va nous intéresser maintenant, c'est d'étudier les variations d'un vecteur au cours d'un tel déplacement. Rappelons d'abord que l'équation des géodésique pour un système de coordonnées curvilignes quelconque y^i de l'espace ponctuel (voir le chapitre des principes de la mécanique) $\mathcal{E}_n$ est donnée par (voir chapitre de mécanique relativiste) :

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = 0$$

Considérons maintenant un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_n$ composantes covariantes v_i et formons le produit scalaires des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n} = dy^i / ds$, nous avons alors la quantité suivante :

$$\vec{v} \circ \vec{n} = v_i \frac{dy^i}{ds}$$

Lors d'un déplacement le long de la géodésique, d'un point M à un point infiniment voisin M', le scalaire subit la variation :

$$d\left(v_i \frac{dy^i}{ds} \right) = dv_k \frac{dy^k}{ds} + v_i d\left(\frac{dy^i}{ds} \right)$$

et comme :

$$\frac{d\left(\dfrac{dy^i}{ds} \right)}{ds} = \frac{d^2 y^i}{d^2 s} \Rightarrow d\left(\frac{dy^i}{ds} \right) = \frac{d^2 y^i}{d^2 s} ds$$

d'où :

$$d\left(v_i \frac{dy^i}{ds} \right) = dv_k \frac{dy^k}{ds} + v_i \frac{d^2 y^i}{d^2 s} ds$$

Remplaçons dans cette dernière expression, d'une part la différentielle de dv_k par sa différentielle totale exacte :

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial y_j} dy^j = \partial_j v_k \frac{ds}{ds} dy^j = \partial_j v_k \frac{dy^j}{ds} ds$$

et d'autre part, la dérivée seconde $d^2 y^i / ds^2$ par son expression tirée de l'équation des géodésiques. Nous obtenons :

$$d\left(v_i \frac{dy^i}{ds} \right) = \partial_j v_k \frac{dy^j}{ds} ds - v_i \Gamma^i_{kj} \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} ds = \left(\partial_j v_k - v_i \Gamma^i_{kj} \right) \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} ds$$

qui peut encore s'écrire :

$$d\left(\vec{v}\circ\vec{n}\right)=\left(\partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj}\right)dy^j\,\frac{dy^k}{ds}=Dv_k\,\frac{dy^k}{ds}$$

où nous avons posé :

$$Dv_k = \left(\partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj}\right)dy^j$$

qui sont par définition les différentielles absolues des composantes covariantes du vecteur $\vec{v}$.

Nous prenons également pour habitude de définir la notation :

$$\nabla_j v_k = \partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj}$$

En coordonnées curvilignes, pour que la différentielle d'un vecteur soit un vecteur, i faut que les deux vecteurs dont nous prenons la différence se trouvent en un même point de l'espace. En d'autres termes, il faut transporter, d'une manière ou d'une autre, l'un des deux vecteurs infiniment voisins au point où se trouve le second et , seulement après faire la différence des deux vecteurs qui se trouvent maintenant en un seul et même point de l'espace. L'opération de transport doit être définie de telle sorte que en coordonnées cartésiennes (pour l'exemple), la différence des composantes coïncide avec la différence ordinaire dv_k . Ainsi, nous avons bien pour un tenseur d'ordre:

$$Dv_k = \left(\partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj}\right)dy^j = dv_k$$

en coordonnées cartésiennes puisque dans ce système : $\Gamma^i_{kj} = 0$.

Ainsi, en coordonnées curvilignes la différence des composantes des deux vecteurs après le transport de l'un d'entre eux au point où se trouve l'autre est noté δv_k tel que nous ayons :

$$Dv_k = \left(\partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj}\right)dy^j = dv_k - \delta v_k$$

Ceci nous amène à :

$$\delta v_k = v_i\Gamma^i_{kj}dy^j$$

Mais aussi à écrire le principe de moindre action (principe variationnel) sous la forme tensorielle :

$$Dv_k = dv_k - \delta v_k = 0$$

Considérons maintenant un tenseur d'ordre deux, produit de deux tenseurs d'ordre un tel que (nous l'avons vu lors de notre étude des compositions de tenseurs) :

$$\delta(A_i B_j) = \delta A_{ij} = A_i\delta B_j + B_j\delta A_i = A_i B_k\Gamma^k_{jh}dy^h + B_j A_k\Gamma^k_{ih}dy^h = \left(A_i B_k\Gamma^k_{jh} + B_j A_k\Gamma^k_{ih}\right)dy^h$$
$$\delta A_{ij} = \left(A_{ik}\Gamma^k_{jh} + B_{jk}\Gamma^k_{ih}\right)dy^h$$

Donc :

$$\frac{\delta v_{ij}}{dy^h} = \partial_h v_{ij} = v_{ik}\Gamma^k_{jh} + v_{jk}\Gamma^k_{ih}$$

d'où :

$$\partial_h v_{ij} = v_{ik}\Gamma^k_{jh} + v_{jk}\Gamma^k_{ih}$$

Ce qui nous amène à écrire la métrique sous sa forme variationnelle :

$$\partial_h g_{ij} = g_{ik}\Gamma^k_{jh} + g_{jk}\Gamma^k_{ih}$$

Appelée "identité de Ricci". Mais nous avons aussi puisque $g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j$:

$$dg_{ij} = \vec{e}_i \circ d\vec{e}_j + d\vec{e}_i \circ \vec{e}_j = \vec{e}_i \circ \omega^k_j \vec{e}_k + \omega^k_i \vec{e}_k \circ \vec{e}_j = \omega^k_j \left(\vec{e}_i \circ \vec{e}_k\right) + \omega^k_i \left(\vec{e}_k \circ \vec{e}_j\right)$$

d'où l'identité :

$$dg_{ij} = \omega^k_j g_{ik} + \omega^k_i g_{jk}$$

Avec les deux relations :

$$dg_{ij} = \omega^k_j g_{ik} + \omega^k_i g_{jk} \text{ et } \delta g_{ij} = \left(g_{ik}\Gamma^k_{jh} + g_{jk}\Gamma^k_{ih}\right)dy^h$$

et la différentielle absolue (qui se généralise simplement pour un tenseur d'ordre deux) :

$$Dg_{ij} = dg_{ij} - \delta v_{ij}$$

Nous avons :

$$Dg_{ij} = \omega^k_j g_{ik} + \omega^k_i g_{jk} - g_{ik}\Gamma^k_{jh}dy^k - g_{jk}\Gamma^k_{ih}dy^k$$

Or, rappelons que nous avons par définition :

$$\omega^k_j = \Gamma^k_{jh}dy^k \text{ et } \omega^k_i = \Gamma^k_{ih}dy^k$$

Donc finalement :

$$Dg_{ij} = 0$$

La différentielle absolue sur une géodésique du tenseur fondamental est donc (comme nous pouvions nous y attendre) nulle. C'est le "théorème de Ricci".

Finalement, nous voyons aussi que pour un tenseur d'ordre deux :

$$\nabla_k g_{ik} = dg_{ij} - \delta g_{ij} = dg_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh}dy^h - g_{jk}\Gamma^k_{ih}dy^h$$

Nous pouvons donc écrire la différentielle absolue :

$$Dg_{ij} = \left(\partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih}\right)dy^h = 0$$

et donc par définition :

$$\nabla_h g_{ij} = \partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih} = 0$$

Effectuons la multiplication contracté de cette expression par g^{ij} , il vient en utilisant la relation que nous avons démontrée $g^{ij} g_{jl} = \delta^l_i$:

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} - g^{ij} g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g^{ij} g_{jk}\Gamma^k_{ih} = g^{ij}\partial_h g_{ij} - \delta^k_j\Gamma^k_{jh} - \delta^k_i\Gamma^k_{ih} = 0$$

d'où la relation :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} - \Gamma^j_{jh} - \Gamma^i_{ih} = 0$$

Les quantités Γ^j_{jh} et Γ^i_{ih} représentant les mêmes sommes, nous avons alors :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} = 2\Gamma^i_{ih}$$

Soit g le déterminant des quantités g_{ij} . La dérivation du déterminant nous donne :

$$\partial_h g = g g_{ij}\partial_h g_{ij} \Rightarrow \partial_h g_{ij} = \frac{\partial_h g}{g g_{ij}}$$

Nous avons donc :

$$g^{ij}\frac{\partial_h g}{g g_{ij}} = \frac{\partial_h g}{g} = 2\Gamma^i_{ih}$$

Donc finalement (selon les règles des dérivées intérieures) :

$$\Gamma^i_{ih} = \frac{1}{2g}\partial_h g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_h \sqrt{|g|}$$