Chapitre 3

Relativité générale

3.1 La théorie d'Einstein. Les postulats de la relativité générale

La théorie de Newton est basée sur l'action instantanée à distance d'une particule sur une autre. Elle n'est donc pas compatible avec la relativité restreinte. Le problème de la relativité générale est essentiellement de construire une théorie de la gravitation relativiste. Il s'agit de généraliser à la fois la théorie de Newton et la relativité restreinte, sur la base de postulats découlant d'un certain nombre d'arguments.

Premier postulat.
L'espace-temps est une variété différentiable à 4 dimensions munie d'une métrique g.

C'est évidemment une généralisation de la situation de la relativité restreinte où la métrique g est η, où l'on peut introduire des coordonnées cartésiennes globalement, le passage d'un système de coordonnées cartésiennes à l'autre s'effectue à l'aide de transformations linéaires (Lorentz-Poincaré) qui préservent la métrique. Ce sont les référentiels d'inertie. L'introduction d'une métrique de l'espace-temps vient de la nécessité de mesurer le temps et les distances.

Le deuxième postulat est le principe d'équivalence. Ce principe, au coeur de la théorie, du point de vue heuristique est basé sur les faits suivants. Dans la théorie de Newton, on observe une remarquable coïncidence : la masse inertielle est égale à la masse gravifique. Expliquons ce point.

- La *masse inertielle* m_{I} est celle qui multiplie l'accélération, c'est-à-dire $m_{\mathrm{I}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$.

- Dans un potentiel gravifique Φ, l'équation de Poisson est $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. Une particule test de *masse gravifique passive* m_{P} ressent une force $\boldsymbol{F} = -m_{\mathrm{P}}\nabla\Phi$.

- Par ailleurs, une particule massive crée un potentiel gravifique $\Phi = -m_{\mathrm{A}}G/r$. La masse m_{A} apparaissant dans cette équation peut être appelée *masse gravifique active*.

C'est un fait expérimental (Eötvös) bien établi que

$$m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{P}} = m_{\mathrm{A}} \equiv m. \tag{3.1}$$

La conséquence de ce fait est que le mouvement d'une particule test soumise uniquement à un champ gravitationnel est indépendant de sa masse et composition (postulat de Galilée), $\boldsymbol{a} = -\nabla\Phi$. Ceci implique que tous les corps subissent l'effet de la gravitation.

Il y a une grande différence de ce point de vue entre la gravitation et les autre forces, pour lesquelles il existe toujours des particules qui y sont insensibles. Par exemple, le neutron es insensible à la force de Lorentz, l'électron aux interactions fortes.

Autre conséquence importante, l'effet d'un champ gravifique homogène et indépendant du temps. Soit $\mathcal{K}$ un observateur qui observe une particule soumise à un champ gravifique constant $-mg\boldsymbol{e}_3$, de sorte que

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -mg\boldsymbol{e}_3. \tag{3.2}$$

Pour un observateur $\mathcal{K}'$ qui se déplace avec une accélération constante $g\boldsymbol{e}_3$ par rapport à $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}'$ est donc non inertiel), l'équation du mouvement sera $m\ddot{\boldsymbol{x}}' = 0$. Par conséquent, le mouvement sera rectiligne (la droite est la géodésique). Il est impossible de distinguer par le mouvement d'*une* particule le champ gravifique homogène d'une accélération. Si le potentiel Φ correspond à un champ inhomogène ($\Delta\Phi \neq 0$), $\mathcal{K}'$ verra deux particules identiques partant de la même hauteur et voisines, suivre sur de *courtes distances* des droites parallèles qui vont peu à peu se courber sur de plus grandes distances et avoir tendance à se rapprocher (déviation de deux géodésiques voisines si la courbure est non nulle).

Ceci amène à postuler le principe d'équivalence de la manière suivante.

Deuxième postulat : Principe d'équivalence.
Pour toute région infiniment petite de l'espace-temps (c'est-à-dire suffisamment petite que la variation spatiale et temporelle de la gravitation peut être négligée), il existe un système de coordonnées $\mathcal{K}_0 = \{x^\alpha\}$ dans lequel la gravitation n'a aucune influence soit sur le mouvement des particules soit sur tout autre processus physique. En particulier, les lois qui décrivent les processus physiques au moyen de la relativité restreinte sont valables dans ce système $\mathcal{K}_0$.
Les différents systèmes de coordonnées $\mathcal{K}_0$ seront reliés entre eux par une transformation de Lorentz. On les appelle des *référentiels d'inertie locaux*.

Nous avons vu qu'il existe de tels référentiels d'inertie locaux si la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ à une signature $(+,-,-,-)$ comme $\eta_{\alpha\beta}$ et que la connexion est métrique : ce sont les coordonnées géodésiques.

Troisième postulat.
Le mouvement d'une particule qui ne subit aucune autre force que la gravitation est une ligne géodésique.

Ceci résulte naturellement du fait que l'équation $\delta \int ds = 0$ ne dépend pas du choix de coordonnées et que dans $\mathcal{K}_0$, elle correspond à la relativité restreinte.

L'équation d'une géodésique ne fait pas apparaître la masse, donc elle doit correspondre à une généralisation de l'équation de Newton,

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma. \tag{3.3}$$

Γ devrait jouer le rôle de $\nabla\Phi$, donc les éléments de la métrique $g_{\alpha\beta}$ jouent le rôle du potentiel gravifique.

Quatrième postulat : Principe de covariance.
Tous les observateurs sont équivalents. Les équations de la physique devraient avoir une forme tensorielle.

On a donc généralisé le principe de la relativité aux systèmes de coordonnés quelconques–référentiels inertiels ou non.

Dans le référentiel $\mathcal{K}_0$, localement, les lois de la physique sont celles de la relativité restreinte. Comment écrire ces lois dans un référentiel quelconque ? Le principe de couplage minimal (ou de simplicité) consiste en la règle suivante.

Cinquième postulat :
Principe du couplage gravitationnel minimal.
Remplacer dans les équations de la relativité restreinte

1. $\eta_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}$.
2. $\partial_\alpha \to \nabla_\alpha$.
3. ne pas ajouter de termes contenant explicitement la courbure.

Finalement, on a le

Sixième postulat : Principe de correspondance.
Retrouver la théorie de Newton comme une limite de la théorie générale.

3.2 L'équation d'Einstein

Il reste à trouver une équation qui permette de déterminer la métrique, g, dans le vide ou en présence de matière.

La théorie de Newton a servi de guide heuristique en la matière. On a l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{3.4}$$

En relativité générale, $\Phi \to g$, ρ est proportionnel à la densité de masse, et la masse inertielle est proportionnelle à l'énergie, et l'énergie, les impulsions et les tensions sont réunies en un tenseur $T_{\alpha\beta}$.

L'équation de Poisson fait intervenir les deuxièmes dérivées de Φ. Il faut donc chercher une équation qui fasse intervenir les deuxièmes dérivées de g. La courbure de Riemann est de ce type.