

AERODYNAMIQUE DU ROTOR EN VOL VERTICAL

INTRODUCTION

Ce chapitre développe les sujets suivants :

- rappels concernant l'aérodynamique des profils : définition des différents paramètres (angle de pas, angle d'attaque) et présentation des coefficients de portance et de moment.
- détermination du vent induit de Froude en vol vertical, basée sur la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Calcul par anneaux élémentaires. Puissance induite
- expression de l'angle d'attaque en fonction de la position en envergure. Exemple d'utilisation : calcul approché de la poussée axiale pour des pales non vrillées.
- application au vol stationnaire. Optimisation de la puissance induite.
- corrections de poussée dues aux conditions atmosphériques, à la compressibilité de l'air et à l'effet de sol.
- effets au voisinage des extrémités de pale : le tourbillon marginal et le sillage et les corrections.
- coefficients de traînée : traînée de forme (ou de frottement) et traînée induite.
- expression des forces et des couples dans le repère de l'hélicoptère. Calcul de la puissance totale absorbée par le rotor en vol stationnaire pour tous types de pales.
- introduction de la notion de ligne portante et des méthodes de calcul basées sur l'analogie des tourbillons.

*Compléments : évolution des caractéristiques de l'air en fonction des conditions atmosphériques.
exemples de formes pour les extrémités de pale.*

SOMMAIRE

<u>AERODYNAMIQUE DU ROTOR EN VOL VERTICAL</u>	1
<u>Approche générale</u>	2
<u>Rappel concernant l'aérodynamique des profils</u>	3
<u>L'aile d'avion</u>	3
<u>Le rotor d'hélicoptère</u>	5
<u>Angle d'attaque et coefficient de portance (C_z)</u>	7
<u>Coefficient de moment (C_m)</u>	9
<u>Introduction du vent induit</u>	10
<u>Origine du vent induit du rotor</u>	10
<u>Expression du vent de Froude en vol vertical</u>	10
<u>Définitions et hypothèses</u>	10
<u>Equation relative à la conservation de l'énergie :</u>	12
<u>Equation relative à la quantité de mouvement :</u>	13
<u>Poussée verticale et puissance induite :</u>	14
<u>Calcul de l'angle d'attaque en vol vertical (en régime établi)</u>	14
<u>Calcul approché :</u>	15
<u>Calcul complet de α :</u>	18
<u>Calcul simplifié de la poussée axiale du rotor</u>	18
<u>Cas du vol stationnaire</u>	19
<u>Calcul simplifié de la poussée du rotor dans le cas de pales droites :</u>	20
<u>Optimisation de la distribution du vent induit sous le rotor :</u>	20
<u>Réduction de la puissance induite à masse soulevée donnée :</u>	21
<u>Corrections de portance</u>	21
<u>Evolution des conditions atmosphériques</u>	21
<u>Compressibilité de l'air</u>	21
<u>Effet de sol</u>	22
<u>Effets en extrémité de pale</u>	22
<u>Présentation des phénomènes</u>	22
<u>Prise en compte simplifiée du tourbillon marginal</u>	23
<u>Effet de sillage</u>	23
<u>Coefficients de traînée</u>	24
<u>Traînée de forme (ou de frottement visqueux)</u>	24
<u>Traînée induite</u>	24
<u>Effet de « centrifugation »</u>	25
<u>Expression des forces et des couples dans un repère lié à l'hélicoptère</u>	25
<u>Calcul de la puissance d'équilibre</u>	26
<u>Introduction de la ligne portante et des tourbillons</u>	26
<u>Compléments</u>	30
<u>Evolutions des caractéristiques de l'air hors des conditions d'atmosphère standard</u>	30
<u>Expression de l'angle α pour les faibles incidences</u>	30
<u>Information complémentaires sur les extrémités des pales</u>	31

Approche générale

L'objectif principal de cette étude est de déterminer la puissance d'équilibre¹ absorbée, en vol stationnaire par le rotor, principalement en fonction de la vitesse de rotation, de l'incidence et de la géométrie des pales.

¹ La puissance d'équilibre en vol stationnaire correspond à la puissance qu'il est nécessaire d'appliquer à l'arbre rotor pour que celui-ci produise une poussée égale et opposée au poids de la machine.

L'approche utilisée ici consiste à décomposer la pale en tranches élémentaires entre le pied de pale et la périphérie du rotor et à calculer la portance et la traînée correspondant à chaque élément, à partir des formules de base de l'aérodynamique. Le calcul est analogue à celui d'une aile d'avion, mais en considérant des vitesses différentes pour chaque élément.

Dans le cas du vol vertical (ascendant, descendant ou stationnaire), comme on le verra par la suite, le rotor de l'hélicoptère produit un vent globalement vertical (vent induit de rotor) qui modifie les conditions de fonctionnement de la pale dans l'analogie avec une aile d'avion. De ce fait l'angle d'attaque diffère notablement de l'angle d'incidence, ce qui nécessite un calcul particulier.

La démarche consiste donc à évaluer pour chaque élément de pale :

- la vitesse du vent induit de rotor
- l'angle d'attaque
- les valeurs de portance et de traînée correspondantes

Portance et traînée seront ensuite projetées dans le repère de l'hélicoptère pour en déduire la poussée et le couple axial auxquels correspond la puissance recherchée (notamment la puissance d'équilibre).

Rappel concernant l'aérodynamique des profils

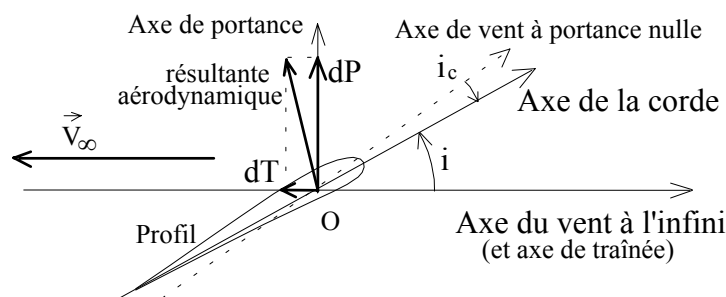
L'aile d'avion

En vol normal, l'aile se déplace à vitesse constante selon une trajectoire rectiligne dans un fluide homogène supposé immobile. Ce cas est équivalent à celui de l'aile immobile dans un fluide en mouvement régulier (cas des essais en soufflerie).

On appelle profil, la figure plane obtenue en sectionnant l'aile par un plan normal à sa grande dimension. (envergure). L'étude du comportement aérodynamique d'un profil s'effectue en considérant, au moins dans un premier temps, que les écoulements d'air s'effectuent dans le plan du profil (écoulement bidimensionnel).

Deux éléments principaux et les axes associés sont définis :

- La **corde** est le segment joignant le bord d'attaque au bord de fuite du profil. L'axe de la corde est parallèle à la corde, orienté du bord de fuite vers le bord d'attaque. La longueur de la corde sera notée (l_c)
- Le **vent à l'infini** amont (V_∞) est la vitesse relative de l'air par rapport au profil, en amont de celui-ci, à une distance suffisante pour éviter les perturbations dues à la proximité de l'aile. Dans le cas où l'aile se déplace dans une atmosphère où existe un vent régulier, V_∞ résulte de la composition des diverses vitesses. L'axe du vent à l'infini sera pris parallèle au vecteur V_∞ , orienté dans le sens d'où vient le vent, (la mesure de V_∞ sur cet axe est alors toujours négative).
- L'**angle d'incidence** (i) est l'angle que fait l'axe de la corde par rapport à l'axe du vent à l'infini.



On décompose la résultante des forces aérodynamiques appliquées au profil selon deux axes, à savoir :

l'axe du vent à l'infini, support de la composante dite de **traînée**.

l'axe perpendiculaire dirigé vers le haut, support de la composante dite de **portance**.

Formules de base : les force de portance et de traînée appliquées à un élément d'aile sont définies par :

$$\begin{array}{lll} \text{portance} & dP = \frac{1}{2} \rho ds (V_\infty)^2 C_Z & (\text{relation 1}) \\ \text{traînée de forme} & dT = \frac{1}{2} \rho ds (V_\infty)^2 C_X & \end{array}$$

où : ρ est la masse volumique du fluide considéré (l'air ici, avec $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ dans les conditions normales (15°C, 1013 mbar). Voir en annexe le calcul de ρ en dehors des conditions normales).
 ds est la surface de l'élément d'aile, soit $(lc \cdot dr)$, dr étant la longueur de l'élément.

C_Z et C_X sont des coefficients sans dimension, appelés respectivement coefficients de portance et coefficient de traînée de forme (traînée due à la viscosité de l'air).

Ces coefficients sont fonctions du type de profil, de l'incidence (i) et du nombre de Reynolds (Re).

Dans les conditions normales d'utilisation de l'aile, le C_Z reste très grand devant le C_X

Les forces aérodynamiques exercées tout le long du profil créent un moment dMa par rapport au centre aérodynamique du profil (point à 25% de la corde à partir du bord d'attaque), d'où un troisième coefficient (C_m) appelé coefficient de moment :

$$\text{Moment} \quad dMa = \frac{1}{2} \rho ds (V_\infty)^2 lc C_m$$

Le moment est positif s'il s'exerce suivant le sens positif de mesure des angles.

- Il existe une direction particulière du vent à l'infini créant une portance nulle. Cet axe est défini par l'angle d'incidence (i_c). L'angle (i_c) est nul pour un profil symétrique et négatif pour les profils cambrés usuels.

Suivant que l'angle d'incidence se réfère à la corde réelle ou à la **direction de portance nulle**, on emploiera les termes d'incidence géométrique (i_g) ou d'incidence absolue (i_a) :

Les deux définitions sont liées par la relation : $i_a = i_g - i_c$ où ($-i_c$) est généralement positif ou nul.

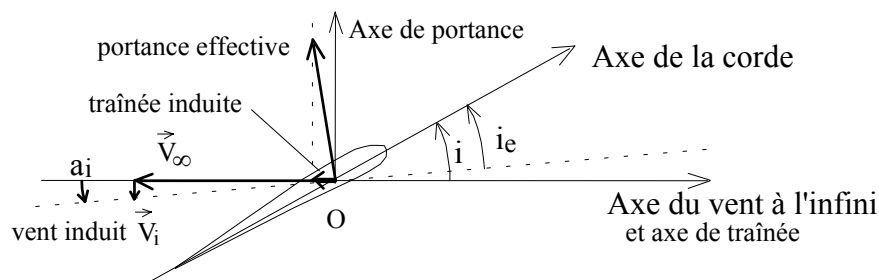
- Vent induit** (V_i) : l'interaction de l'air avec l'aile en mouvement crée des pressions importantes dont la portance est la principale manifestation. En conséquence, au voisinage de l'aile et notamment vers son extrémité, des mouvements d'air apparaissent qui modifient localement la trajectoire des filets d'air par rapport à celle déduite du vent relatif seul (l'écoulement peut même devenir tridimensionnel).

Pour une aile d'envergure finie, la théorie de Prandtl permet de tenir compte de ces effets en introduisant un vent de faible valeur, normal au vent à l'infini, dirigé à l'opposé de la portance, appelé vent induit.

Ce vent, lié à l'existence de la portance provoque une légère réduction de l'angle d'incidence qui devient l'**incidence effective** (i_e), après correction de l'angle induit (a_i):

$$a_i \sim \tan(a_i) = V_i/V_\infty \quad \text{et} \quad i_e = i - a_i$$

Cette réduction de l'incidence s'accompagne d'une perte de portance dont il faut tenir compte.



On pourrait appliquer la théorie générale déjà exposée en prenant pour axes de référence les axes déduits des axes de base par rotation de l'angle induit et en remplaçant i par i_e dans les formules de base.

En fait, compte tenu que l'angle induit peut dépendre de la position en envergure, l'usage est de conserver le repère de base, unique tout le long de l'aile, en apportant simplement quelques corrections aux valeurs calculées à partir de (i).

Compte tenu de la faiblesse de l'angle induit, la valeur de la traînée effective de forme est calculée avec (i), sans correction, et sa projection sur l'axe de portance est négligée.

La valeur de la portance peut être calculée avec l'incidence (i) en corrigeant la valeur de la pente (dC_Z/di).

La projection de la portance effective sur l'axe de traînée fait apparaître un terme de traînée supplémentaire qualifiée de **traînée induite** (dTi).

L'étude de la traînée induite est simplifiée dans le cas de l'aile dite « elliptique » pour laquelle le coefficient de portance effective (C_Z) et l'angle induit (a_i) sont constants en envergure.

Dans ce cas particulier : $a_i = C_Z/(\pi\Lambda)$

Λ est l'allongement de l'aile : $\Lambda = L^2/S$ où L est l'envergure de l'aile complète.
 S est sa surface

La correction de pente (Z_1) de dC_Z/di est : $Z_1 = Z_{10}/(Z_{10} + \pi\Lambda)$ (valeur théorique de $Z_{10} = 2\pi$ par rad)

La traînée induite dT_i vaut alors : $dT_i = dP \cdot \sin(a_i) \sim \frac{1}{2} \rho ds \cdot V_\infty^2 \cdot C_Z^2/(\pi\Lambda)$

Cette formule fait apparaître un coefficient de traînée induite C_{Xi} , proportionnel au carré de C_Z :

$$C_{Xi} = C_Z^2/(\pi\Lambda)$$

Dans le cas général (aile non elliptique), on obtient un résultat approché en calculant une valeur moyenne de C_Z sur l'ensemble de l'aile, soit C_{Zm} .

D'où : $C_{Xi} = C_{Zm}^2/(\pi\Lambda)$

L'expression de la traînée totale ainsi corrigée devient :

$$dT = \frac{1}{2} \rho ds (V_\infty)^2 [C_X + C_{xi}]$$

Le rotor d'hélicoptère

Le rotor d'hélicoptère comprend plusieurs pales dont chacune présente une constitution proche de celle de l'aile d'avion. On étudiera donc le comportement aérodynamique individuel de chaque pale par analogie à l'aile. Toutefois, deux phénomènes essentiels font apparaître des éléments spécifiques à cette étude :

- la vitesse de déplacement du profil varie fortement entre le pied et l'extrémité de pale. Si Ω est la vitesse angulaire du rotor, la vitesse d'entraînement du profil à la distance r de l'axe est : $\Omega \cdot r$
- les pales repassent cycliquement dans la même zone en combinant leurs effets pour produire un vent induit important nécessitant une étude particulière.

Les définitions principales utilisées sont décrites ci-après :

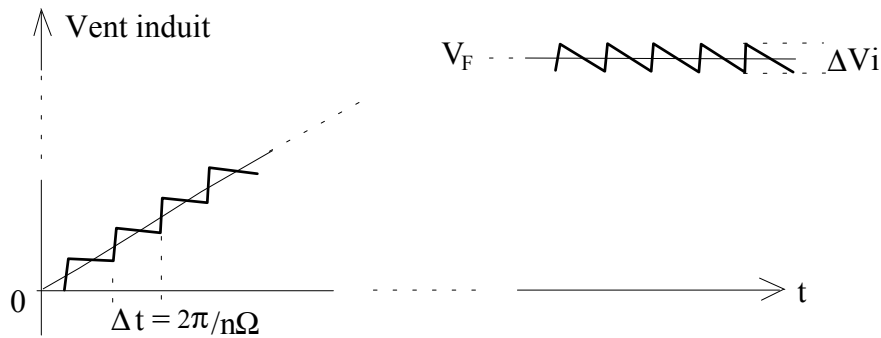
- La **corde** du profil ainsi que la **direction de portance nulle** sont définies comme dans le cas de l'aile.
- Le plan normal à l'axe rotor, appelé également **plan d'entraînement**, constitue ici une référence essentielle.
- L'angle entre l'axe de la corde et sa projection sur le plan d'entraînement, est appelé **angle de pas (local)** et désigné par θ . Cet angle définissant la position géométrique de la corde est sous contrôle du pilote. Il peut varier en envergure par construction (pale vrillée). θ est un angle généralement inférieur à 20° .

On introduit aussi l'angle de pas global de la pale comme l'angle de pas d'une corde particulière, servant de référence pour la commande mécanique (valeur unique caractérisant la position de la pale).

- Le **vent à l'infini amont du rotor** (V_0), est la vitesse relative de l'air en amont de l'hélicoptère, à une distance suffisante pour éviter les perturbations dues à la présence du rotor. Dans le cas où l'appareil se déplace dans une atmosphère elle-même soumise à un vent régulier, V_0 résulte de la composition des vitesses de l'hélicoptère et du vent.

Ce vent ne peut pas être considéré ici comme le vent à l'infini amont de la pale puisqu'il ne représente pas la vitesse de l'air vue par la pale (il ne tient compte ni de la rotation du rotor, ni du battement des pales).

- **Vent induit** : comme dans le cas de l'aile d'avion, le passage d'une pale en un point déterminé y crée un léger vent induit. Compte tenu des vitesses de rotation, le passage de la pale suivante au même point a lieu avant que ce vent ne se soit totalement atténué. Ce second passage augmente donc le vent induit total qui croît jusqu'à atteindre un régime d'équilibre. On tend en effet vers un régime d'équilibre car l'augmentation du vent induit réduit l'incidence effective tandis que la vitesse d'atténuation du vent induit s'accroît.



A l'équilibre, le vent induit global en un point fixe du plan rotor peut se décomposer en :

- une partie moyenne, représentant le vent induit du rotor ou **vent de Froude** (V_F). Ce vent est en effet lié aux caractéristiques du rotor (diamètre, nombre de pale (n), vitesse de rotation (Ω)...)
- une partie cyclique de moyenne nulle, représentant le **vent induit de pale** (ΔV_i), analogue au vent induit de l'aile.

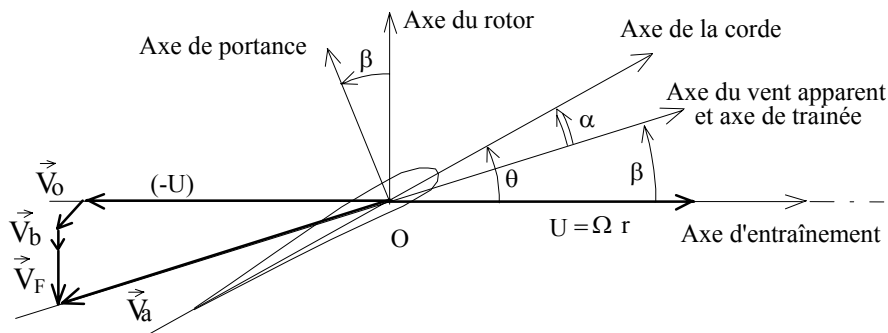
Si l'on se place sur la pale elle-même, le vent induit effectif global (V_{ie}) perçu est le vent crête (constant) :

$$V_{ie} = V_F + \frac{1}{2} \Delta V_i$$

- Un vent que l'on pourrait qualifier de vent à l'infini amont de la pale, dans l'environnement du rotor, peut maintenant être défini à partir de la composition des vitesses en présence, à savoir :

vitesse de l'hélicoptère et vitesse du vent (V_0)
vitesse d'entraînement du profil à la distance r de l'axe ($U = \Omega \cdot r$)
vitesse due au battement (V_b)
vent induit moyen du rotor ou vent de Froude (V_F)

Ce vent, dont on peut rapprocher la définition de celle du vent à l'infini amont de l'aile, sera qualifié de **vent apparent** (V_a) pour éviter la confusion avec (V_∞) qui ne tient compte d'aucun vent induit.



- L'**angle d'attaque** (α) est l'angle que fait l'axe de la corde par rapport à l'axe du vent apparent. Cet angle représente en quelque sorte l'angle d'incidence de la pale dans l'environnement du rotor.

On parle d'**angle d'attaque effectif** (α_e) lorsqu'on tient compte du vent induit effectif total au niveau de la pale (vent de Froude plus $\frac{1}{2}$ vent induit de pale).

Si (a_i) est l'angle induit engendré au niveau de la pale (considérée comme une aile), on écrira :

$$\alpha_e = \alpha - \frac{1}{2} a_i \quad \text{où } a_i \sim \Delta V_i / U$$

La valeur de a_i peut être estimée avec la formule utilisée pour l'aile, en prenant le diamètre du rotor pour envergure. Toutefois, comme on le verra ultérieurement, le comportement aérodynamique en extrémité de pale s'éloigne notablement de celui d'une aile, rendant ainsi très approximatives les corrections simples.

Par ailleurs, comme dans le cas de l'aile, on distinguera les angles géométriques des angles absolus.

- L'**angle du vent apparent** (β) est l'angle que fait l'axe du vent apparent par rapport au plan d'entraînement du rotor.

On introduit aussi l'angle du vent apparent effectif (β_e), tel que : $\beta_e = \beta + \frac{1}{2} a_i$

Dans tous les cas : $\theta = \alpha + \beta = \alpha_e + \beta_e$

Application : évaluation du temps d'établissement du vent de Froude en vol stationnaire.

On a montré précédemment que le vent de Froude ne s'établit pas instantanément. On peut estimer sa constante de temps d'établissement pour de petites variations des paramètres à partir des conditions de vol stationnaire (par exemple un accroissement soudain du pas collectif).

Le vent induit total décroît de ΔV_i pendant le temps $\Delta t = 1/(n.N)$ où n est le nombre de pales et N le nombre de tr/s du rotor. D'où, à pente de décroissance constante, le vent induit total s'annulerait au bout d'un temps T (constante de temps) tel que :

$$T = \Delta t.(V_F / \Delta V_i) \sim \Delta t.(\beta/a_i) \quad \text{avec} \quad a_i = C_Z/(\pi\Lambda) \sim C_Z/(2\pi R/lc)$$

où R et lc sont respectivement le rayon du rotor et la corde des pales

D'où en exprimant Δt : $T \sim [2\pi R/(n.N.lc)].(\beta/C_Z)_0$ (voir plus loin le calcul de β et C_Z en stationnaire)

Pratiquement, nos modèles réduits présentent des constantes de temps de l'ordre de 100 à 400 ms.

• Repères utilisés dans la suite

Le repère tridimensionnel lié à l'hélicoptère, utilisant l'axe rotor comme axe polaire (orienté du fuselage vers la tête rotor) et le plan d'entraînement comme plan de base, constitue le repère de référence pour l'expression des forces et des couples appliqués à l'hélicoptère. L'axe principal dans le plan de base est l'intersection du plan de symétrie vertical de l'hélicoptère avec le plan de base, orientée vers l'arrière de l'hélicoptère (axe longitudinal).

Le repère tridimensionnel lié à la pale, possède le même axe polaire que le repère précédent, mais l'axe principal du plan de base (axe d'allongement de la pale ou axe de pas) tourne à la vitesse angulaire Ω par rapport à l'axe longitudinal de l'hélicoptère. Dans le plan du profil, on utilise le repère bidimensionnel constitué par l'axe secondaire du plan de base (vitesse tangentielle de pale au rayon r) et l'axe polaire.

Le sens positif de mesure des angles dans le plan du profil est celui qui amène l'axe de la vitesse de pale sur l'axe rotor.

Le repère bidimensionnel lié au vent apparent se déduit du repère précédent, lié à la vitesse tangentielle, par rotation de l'angle de vent apparent (β) autour de l'axe de pas de la pale. Le sens positif de mesure des angles est identique à celui du plan lié au vent relatif. Les forces de traînée et de portance seront calculées directement dans le repère lié au vent apparent, en utilisant les formules de base.

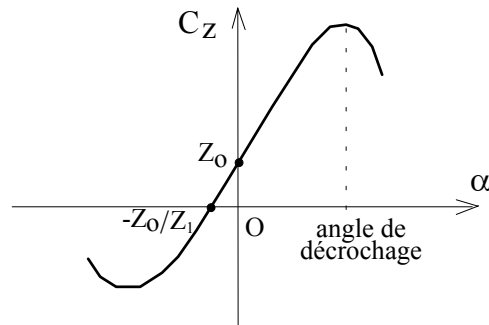
Avec les sens positifs de mesure des segments et des angles définis ci-dessus :

- La traînée a toujours une valeur négative (portée sur l'axe du vent apparent, dans le sens opposé à la vitesse de pale).
- Le signe de la portance dépend de la valeur de α .

Angle d'attaque et coefficient de portance (C_Z)

La portance et le coefficient de portance figurant dans les formules de base sont utilisés jusqu'ici sous forme de modules, toujours positifs. Pour tenir compte de tous les cas rencontrés, nous allons être amenés à les définir en tant que valeurs algébriques liées à la valeur algébrique de l'angle d'attaque (α), (angle géométrique).

Les variations de C_Z en fonction de l'angle α présentent l'allure suivante :



Pour des angles α faibles (inférieurs à 10° ou 20° , selon l'épaisseur du profil, en raison des risques de décrochage), le coefficient de portance peut être approché par un développement limité en α :

$$C_Z = Z_0 + Z_1 \cdot \alpha + Z_2 \cdot \alpha^2 + Z_3 \cdot \alpha^3 + \dots \quad (\text{relation 2})$$

où $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ sont des coefficients constants dépendant du profil utilisé.

Z_1 est toujours positif. Le sens généralement choisi pour la cambrure du profil fait que Z_0 est aussi positif.

Valeur de Z_1 : on constate dans la pratique que Z_1 est un paramètre assez constant d'un profil de pale à un autre. On peut donner une valeur moyenne pour les profils courants :

$$Z_1 \sim 0.12 \quad \text{lorsque l'angle } \alpha \text{ est exprimé en degrés}$$

Dans toute la suite, on représentera le profil avec l'orientation de la figure introduite au paragraphe « définitions » (bord d'attaque à droite, axe du rotor vers le haut) et le sens positif de mesure des angles sera le sens trigonométrique habituel.

Cas des profils symétriques :

Dans le cas d'un profil symétrique, la courbe représentative de C_Z est symétrique par rapport à l'origine, ce qui entraîne l'annulation des coefficients pairs du développement, d'où l'expression :

$$C_Z = Z_1 \cdot \alpha + Z_3 \cdot \alpha^3 + Z_5 \cdot \alpha^5 + \dots$$

où on pourra remarquer que Z_3 est un coefficient négatif

L'allure de la courbe du C_Z , (point d'inflexion à l'origine), permet d'affirmer que le terme $Z_1 \cdot \alpha$ joue un rôle prépondérant dans le développement. On peut alors mettre l'expression sous la forme :

$$C_Z = Z_1 \cdot \alpha [1 + Z_3/Z_1 \cdot \alpha^2 + Z_5/Z_1 \cdot \alpha^4 + \dots]$$

Cette dernière formulation présente l'intérêt de faire apparaître la partie principale ($Z_1 \cdot \alpha$) multipliée par un terme correctif de type $(1+\varepsilon)$. Ceci pourra être mis à profit dans les calculs numériques, comme on le verra ultérieurement.

Remarque : les expressions précédentes rappellent le développement de la fonction sinus. On peut alors utiliser l'approximation suivante :

$$C_Z = (Z_1 / p) \cdot \sin(p \cdot \alpha) \text{ avec } \alpha \text{ en radians}$$

où p est un paramètre permettant l'ajustement de la position du point de décrochage (p de l'ordre de 4 à 5)

Cas général :

Dans tous les cas, il existe un angle α_c pour lequel $C_Z = 0$. Cet angle est défini par :

$$0 = Z_0 + Z_1 \cdot \alpha_c + Z_2 \cdot \alpha_c^2 + Z_3 \cdot \alpha_c^3 + \dots$$

Remarque : dans la mesure où l'angle α_c est faible (de l'ordre de 1 à 2°), on peut écrire $\alpha_c \sim -Z_0 / Z_1$

En retranchant cette dernière relation de la relation (2), on obtient :

$$C_Z = Z_1 \cdot (\alpha - \alpha_c) + Z_2 \cdot (\alpha^2 - \alpha_c^2) + Z_3 \cdot (\alpha^3 - \alpha_c^3) \dots$$

Qui peut s'écrire : $C_Z = Z_1 \cdot (\alpha - \alpha_c) + Z_2 \cdot (\alpha - \alpha_c) \cdot (\alpha + \alpha_c) + Z_3 \cdot (\alpha - \alpha_c) \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot \alpha_c + \alpha_c^2) \dots$

Soit encore : $C_Z = Z_1 \cdot (\alpha - \alpha_c) [1 + Z_2/Z_1 \cdot (\alpha + \alpha_c) + Z_3/Z_1 \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot \alpha_c + \alpha_c^2) \dots]$

D'où, en posant : $\alpha_c = -Z_0/Z_1$ et $\alpha' = \alpha - \alpha_c$

On aura toujours : $C_Z = Z_1 \cdot \alpha' \cdot [1 + P(\alpha)]$ (α' est l'angle d'attaque absolu)

où $P(\alpha)$ est un polynôme en α dont le terme constant est négligeable devant l'unité.

Coefficient de moment (C_m)

Le calcul détaillé des forces aérodynamiques exercées sur le profil permet de connaître les pressions appliquées tout le long du profil, sur l'intrados comme sur l'extrados.

La sommation des forces élémentaires de pression, (situées dans le plan du profil dans le cas d'une aile infinie), fournit le coefficient de portance et donc la portance dP .

Le torseur des forces exercées sur le profil sera alors parfaitement défini en complétant la connaissance de dP par la donnée du moment des forces aérodynamiques par rapport à un axe perpendiculaire au plan du profil.

Centre aérodynamique du profil :

Le calcul montre qu'en première approximation, le moment exercé est indépendant de l'angle d'attaque (α') à condition de choisir comme axe des moments l'axe passant par le point situé à $x_a = 25\%$ de la corde, à partir du bord d'attaque de l'aile. Ce point (A) est appelé centre aérodynamique du profil et les coefficients de moment fournis pour les profils sont relatifs à ce point.

Le moment dMa exercé en A a pour expression :

$$dMa = \frac{1}{2} \rho l c^2 dr V_a^2 C_m$$

Ce moment est pratiquement nul pour un profil symétrique. Il devient négatif dans le cas d'un profil cambré et sa valeur croît lorsqu'on augmente la cambrure (le moment tend à faire pivoter l'aile dans le sens qui diminue l'angle d'attaque, c'est pourquoi on l'appelle moment « piqueur »). Conformément à la théorie générale, sa valeur est pratiquement constante lorsque α varie.

Centre de poussée du profil :

On peut représenter le torseur des forces aérodynamiques ainsi défini par une simple force dP appliquée en un point C situé à la distance x_c du bord d'attaque (en % de la corde), tel que le moment de dP en A soit précisément égal à dMa . On peut alors écrire :

$$dMa = dP \cdot l c \cdot (x_a - x_c) \quad (\text{valable pour } \alpha \text{ faible})$$

D'après la définition, le moment du torseur, rapporté en ce point, est nul. Le point C est appelé centre de poussée du profil. Sa position par rapport au bord d'attaque est définie par :

$$x_c = x_a - dMa / (l c \cdot dP)$$

Soit en exprimant dMa et dP :

$$x_c = x_a - C_m / C_Z$$

On voit ici que le centre de poussée se déplace lorsque α varie (x_c tend vers l'infini, derrière le bord de fuite, lorsque dP tend vers 0).

Expression du moment résultant par rapport à un axe quelconque

Parmi les représentations équivalentes possibles du torseur des forces aérodynamique, on partira de la suivante : le vecteur portance (dP) est appliqué au centre aérodynamique et on ajoute un couple $dC = dMa$.

Soit à exprimer dM_x , moment par rapport à un axe placé en un point X quelconque, à la distance relative x du bord d'attaque (x en % de la corde). Le moment résultant est alors :

$$dM_x = dC + dP \cdot l c \cdot (x - x_a)$$

Soit en exprimant dC , dP et x_a , puis en regroupant :

$$dM_x = \frac{1}{2} \rho l c^2 dr V_a^2 [(x - 0.25).C_z + C_m]$$

(ne pas oublier que $C_m \leq 0$)

Introduction du vent induit

Origine du vent induit du rotor

Le phénomène de portance est associé à l'apparition d'une différence de pression entre les deux faces de l'aile ou de la pale (dépression à l'extrados, surpression à l'intrados, par rapport à la pression atmosphérique).

Au rayon (r) du rotor, la différence de pression $\Delta p(r)$ entre les deux faces, vaut $dP(r) / ds$, soit :

$$\Delta p(r) = dP(r) / (lc \cdot dr)$$

Si l'on se place en un point quelconque (mais fixe) dans le plan du rotor, à la distance r de l'axe, on constate l'apparition (périodique) d'une impulsion de pression d'amplitude $\Delta p(r)$, à chaque passage de pale. Cette différence de pression n'existe naturellement que pendant la durée du passage d'une pale. La valeur moyenne $\Delta p_m(r)$ de la différence de pression entre les deux faces de l'anneau balayé par un élément de pale au rayon r vaut alors :

$$\Delta p_m(r) = \Delta p(r) \cdot n \cdot lc / 2\pi r \quad \text{où } n \text{ est le nombre de pales du rotor.}$$

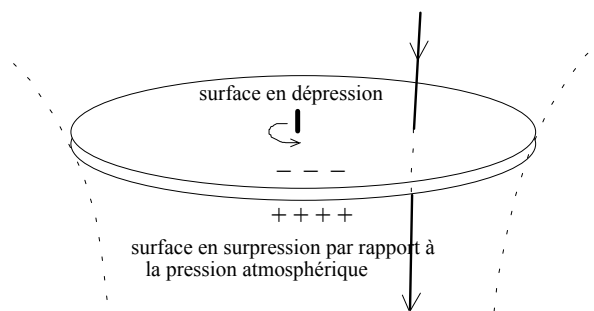
$$\text{Soit : } \Delta p_m(r) = n \cdot dP(r) / 2\pi r \cdot dr$$

$$\Delta p_m(r) = \rho n lc V_a^2 C_z / 4\pi r \quad (\text{relation 3})$$

Pour donner un ordre de grandeur, le module de V_a est voisin de celui de la vitesse tangentielle de la pale Ωr (où Ω est la vitesse angulaire du rotor).

Ainsi, en tout point du disque balayé par le rotor, la suite des impulsions périodiques de pression, à fréquence élevée et toujours de même sens, provoquées par le passage des pales, crée une différence moyenne de pression entraînant une circulation d'air dans le sens vertical (vent induit). Ce vent circule à vitesse pratiquement constante en régime établi, car l'inertie des masses d'air en mouvement filtre le caractère impulsif des différences de pression qui lui donnent naissance. Noter que le vent induit du rotor est toujours de direction opposée à la portance.

Le plan du rotor est globalement le siège d'une sorte de « force aéromotrice » normale au plan, provoquant une circulation de l'air dans le sens vertical, phénomène particulièrement ressenti en vol stationnaire.

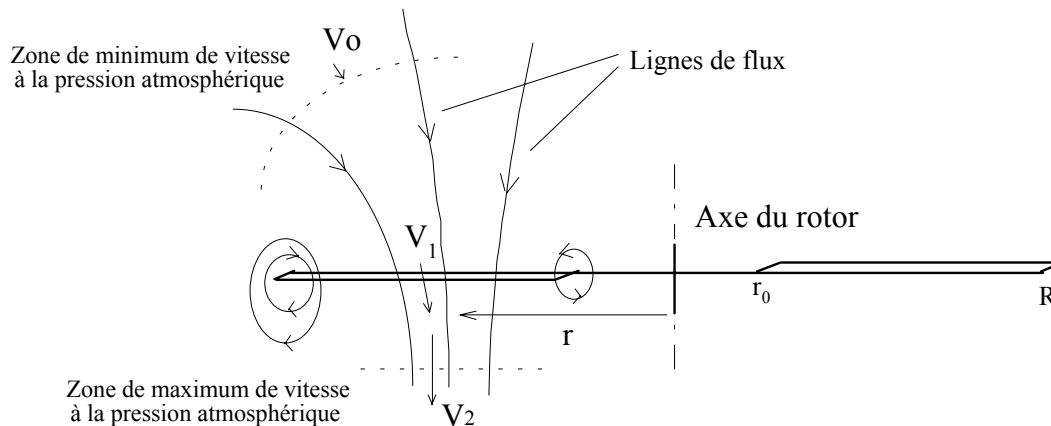


Expression du vent de Froude en vol vertical

Définitions et hypothèses

Une ligne de flux est une courbe définie de telle façon que, en tout point de l'espace, le vecteur vitesse de l'air soit toujours tangent à la ligne de flux passant par ce point. Les diverses lignes de flux matérialisent le parcours

des particules d'air. La vitesse de l'air varie en général tout au long d'une même ligne de flux. Les lignes de flux d'air traversant le rotor présentent l'allure suivante, dans une coupe contenant l'axe du rotor :



Un tube de flux (veine d'air) est défini par l'ensemble des lignes de flux s'appuyant sur un contour fermé. La plupart du temps, le contour est choisi de manière à délimiter une surface perpendiculaire à la direction générale de l'écoulement (section du tube circulaire ou même annulaire).

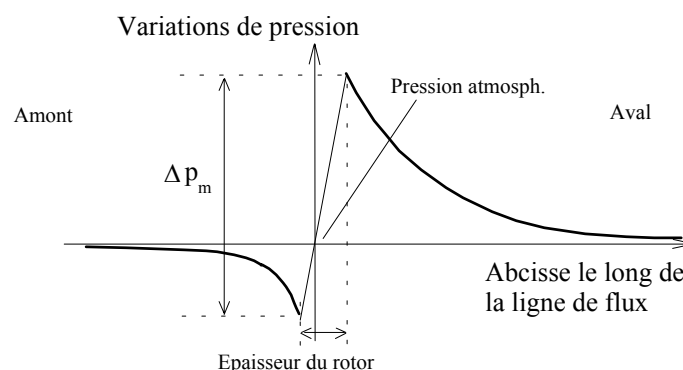
On distingue trois zones particulières ainsi que les vitesses associées, dans l'espace entourant le rotor (Ref. l'ouvrage de Lefort et Hamann)

- **Zone située loin en amont de l'écoulement (vitesse V_0)** : dans les conditions habituelles de vol et notamment en vol stationnaire, cette zone est située au-dessus du rotor. La pression qui y règne est la pression atmosphérique. La vitesse associée (V_0) est appelée vitesse "à l'infini amont". Par définition, cette vitesse caractérise l'état de l'air, loin avant son passage à travers le rotor. Son expression est $V_0 = W - V$ (où W est la vitesse du vent par rapport au sol et V la vitesse de l'hélicoptère par rapport au sol). En vol stationnaire, cette vitesse est nulle et la section de la veine d'air à l'infini amont est très grande.

Remarque : dans certaines conditions de vol, le sens d'écoulement de l'air à travers le rotor peut s'inverser (du bas vers le haut). Dans ce cas, l'infini amont est situé au-dessous du rotor, la vitesse y étant toujours V_0 .

- **Plan du rotor** : la vitesse de l'air y est V_1 . En vol vertical, V_1 est toujours considérée comme verticale.

Due à l'accélération appliquée par le rotor sur les filets d'air, la pression y est soumise à des variations importantes. Le plan du rotor constitue ainsi une surface de discontinuité pour la pression, mais non pour la composante verticale de V_1 .



- **Zone située loin en aval de l'écoulement (vitesse V_2)** : dans les conditions habituelles de vol, cette zone est située au-dessous du rotor et correspond à la largeur minimum de la veine d'air. La pression qui y règne est à nouveau la pression atmosphérique. La vitesse associée (V_2) est appelée vitesse "à l'infini aval". Par définition, cette vitesse caractérise l'état de l'air après son passage à travers le rotor. Sa direction est verticale en vol vertical.

Remarque : l'hypothèse d'une vitesse verticale de l'air à « l'infini aval », ne manquera pas de heurter l'intuition « physique » du lecteur. En fait, comme on le verra par la suite, ceci résulte de l'application d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, en particulier celle consistant à négliger les forces de viscosité. Ces simplifications sont justifiées dans l'espace entourant le rotor (distances de quelques diamètres rotor) où les pertes dues aux forces de viscosité dans l'air lui-même sont négligeables devant les puissances mises en jeu dans l'interaction air/pales. En revanche, au delà de quelques diamètres rotor, l'énergie du souffle se dilue et se dissipe, entraînant un retour au calme, plus conforme à l'expérience.

Nota : au voisinage des extrémités de pale (au rayon minimum et surtout au rayon maximum) où l'air tourne suivant un circuit très court (tourbillon marginal), les notions de vitesse à l'infini amont et aval s'appliquent difficilement. Ce domaine fera l'objet d'une étude particulière.

- **Conditions et hypothèses de calcul** en vol vertical : En se référant à ce qui a été exposé dans les rappels concernant l'aérodynamique des profils, le vent V_1 à travers le rotor s'exprime ici par la somme du vent V_0 , purement vertical, et du vent induit moyen, c'est à dire le vent de Froude V_F (il n'y a pas de battement).

D'où : $V_1 = V_0 + V_F$

On peut donc écrire : $V_a = V_1 - U$

Remarque : la vitesse de Froude sera notée V_F dans le cas général et V_{F0} dans le cas du vol stationnaire.

Dans le cas particulier du vol stationnaire, on a $V_0 = 0$ et donc $V_1 = V_{F0}$

Trois vitesses ont été décrites

- vitesse à l'infini amont, connue a priori d'après les mouvements de l'hélicoptère dans l'atmosphère.
- vitesse dans le plan du rotor incluant la vitesse induite (vitesse de Froude) objet du calcul,
- vitesse à l'infini aval, vitesse inconnue intervenant dans les équations

En conséquence il faut au moins deux équations reliant ces deux dernières vitesses pour résoudre le système. Des considérations d'énergie et de quantité de mouvement permettent d'établir ces deux relations.

Les hypothèses de calcul adoptées sont les suivantes :

- Les écoulements sont considérés stationnaires et donc les régimes transitoires ou perturbés sont exclus. Ceci entraîne :
 - en un point donné de la pale, toutes les grandeurs physiques (vitesse, pression, température ...) sont indépendantes du temps.
 - de même, en un point fixe situé en dehors du disque rotor, les grandeurs physiques (vitesse, pression, température ...) sont indépendantes du temps. Il en résulte, en particulier, que la masse ainsi que l'énergie ou la quantité de mouvement totale contenues entre deux sections fixes d'un même tube de flux sont stationnaires. En conséquence le débit massique d'air est invariant à travers toute section d'un même tube.
- L'air est considéré comme incompressible dans les conditions rencontrées (vitesses subsoniques). Ceci entraîne en particulier que la masse spécifique ainsi que le coefficient de viscosité de l'air sont considérés ici comme des constantes (donc indépendantes de la pression). En outre, la température de l'air est considérée comme uniforme. En conséquence, le débit volumique à travers toute section d'un même tube est fixe et la vitesse de l'air est inversement proportionnelle à la surface de la section traversée. Il peut être utile de remarquer ici que les vitesses de traversée des différentes sections d'un même tube de flux doivent garder le même sens tout le long d'une ligne de flux. (les mesures des vitesses V_0 , V_1 et V_2 sont toutes positives le long de l'abscisse curviligne allant de l'infini amont à l'infini aval)
- on néglige les pertes d'énergie dues aux forces de viscosité dans un tube (à l'intérieur comme sur les parois du tube). Les pertes ou gains d'énergie n'ont lieu qu'au contact des corps solides rencontrés.

Equation relative à la conservation de l'énergie :

On rappelle que l'énergie (travail) produite par une force F agissant sur une distance d est :

$$W = F.d \text{ (produit scalaire)}$$

Si le mouvement s'effectue à la vitesse V , l'énergie mise en jeu pendant le temps dt est :

$$dW = F.V.dt$$

Application au rotor : Soit dF_a la force effective exercée par un élément de pale sur l'air (vecteur). Cette force s'oppose exactement à la résultante des forces aérodynamiques effectives (portance + traînée) relatives à l'élément de pale. En vol stationnaire, par exemple, sa direction est proche de celle du vent induit et il y a cession d'énergie mécanique au flux d'air à la traversée du rotor.

Au passage de la pale, les particules d'air sont fortement accélérées à son contact. Sous l'effet de la portance, l'énergie communiquée par le rotor au flux du vent vertical moyen, pendant la durée dt , dans le tube de flux ayant pour section l'anneau de rayon r et de largeur dr , est :

$$dW = n \cdot dF_a \cdot V_1 \cdot dt \quad (n \text{ est le nombre de pales du rotor})$$

Cet apport d'énergie compense les échanges qui ont lieu, pendant le temps dt , aux deux extrémités de la veine d'air considérée (le calcul des énergies est ici simplifié car les deux extrémités sont à la même pression) :

- **Entrée d'une masse d'air** dm à la vitesse V_0 à travers la frontière amont de la veine :

$$\text{Energie entrant dans le volume considéré} : \frac{1}{2} dm \cdot V_0^2$$

- **Sortie d'une même masse d'air** dm (conservation du débit dans une même veine) à la vitesse V_2 à travers la frontière aval de la veine :

$$\text{Energie sortant du volume} : \frac{1}{2} dm \cdot V_2^2$$

$$\text{D'où la relation :} \quad n \cdot dF_a \cdot V_1 \cdot dt = \frac{1}{2} dm \cdot (V_2^2 - V_0^2)$$

$$\text{C'est à dire :} \quad n \cdot dF_a \cdot V_1 = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \cdot (V_2^2 - V_0^2)$$

Cette relation fait apparaître le **débit massique** $q = dm/dt$ qui peut s'exprimer simplement au niveau du rotor, à travers l'anneau de rayon r et de largeur dr :

$$q = dm / dt = 2\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot r \cdot dr \quad (\text{relation 4})$$

$$\text{Et donc :} \quad n \cdot dF_a \cdot V_1 = \pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot (V_2^2 - V_0^2) \cdot r \cdot dr$$

$$\text{Ou encore :} \quad n \cdot dF_a \cdot V_1 = \pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot (V_2 - V_0) \cdot (V_2 + V_0) \cdot r \cdot dr \quad (\text{relation 5})$$

Equation relative à la quantité de mouvement :

On rappelle que l'équation fondamentale de la dynamique ($F = m \cdot \gamma$) peut s'écrire :

$$F = m \cdot dV/dt \quad (\text{relation vectorielle})$$

$$\text{soit} \quad F \cdot dt = m \cdot dV$$

L'expression $m \cdot dV$ est appelée **variation élémentaire de quantité de mouvement** (c'est un vecteur).

La relation précédente permet de relier la variation totale de la quantité de mouvement à l'intégrale de la force appliquée en fonction du temps.

Dans le cas du rotor, l'accroissement de quantité de mouvement communiqué à une masse d'air (dm) entre l'amont et l'aval de la veine d'air est déterminé par intégration (vectorielle) dans le temps de la force appliquée par l'ensemble des pales à l'anneau de rayon r et de largeur dr .

En remarquant qu'au cours d'un tour complet de pale, seule la composante de dF_a parallèle à l'axe rotor (soit dF_{az}) produit un résultat non nul, on écrira :

$$n \cdot dF_{az} \cdot dt = dm \cdot (V_2 - V_0)$$

remarque : $dm \cdot (V_2 - V_0)$ représente bien la variation de quantité de mouvement puisque le mouvement s'effectue dans tous les cas, de l'infini amont vers l'infini aval.

Et donc, en utilisant la relation 4 :

$$n \cdot dF_{az} = 2\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot (V_2 - V_0) \cdot r \cdot dr \quad (\text{relation 6})$$

En effectuant le produit scalaire des deux membres par V_1 , on obtient :

$$n \cdot dF_{az} \cdot V_1 = 2\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot V_1 \cdot (V_2 - V_0) \cdot r \cdot dr$$

En vol vertical, dF_{az} et V_1 sont deux vecteurs parallèles à l'axe rotor et la relation peut aussi s'écrire :

$$n \cdot dF_a \cdot V_1 = 2\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot V_1 \cdot (V_2 - V_0) \cdot r \cdot dr$$

En combinant cette dernière équation avec (5), on obtient la relation vectorielle suivante, indépendante de r :

$$V_2 + V_0 = 2V_1 \quad (\text{relation 7})$$

Qui permet d'écrire $V_2 - V_0 = 2(V_1 - V_0) = 2V_F$

La relation (6) devient : $n \cdot dF_{az} = 4\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot (V_1 - V_0) \cdot r \cdot dr$ (relation 8)

On remplace alors les vecteurs de la relation précédente par les valeurs algébriques de leurs projections sur l'axe rotor. Au niveau de la pale, la valeur de dF_{az} s'écrit, en tenant compte de tous les vents induits :

$$dF_{az} = -dP(r) \cdot \cos(\beta_e) \quad (\text{en négligeant la composante verticale de la traînée})$$

En remplaçant $dP(r)$ par son expression (relation 1), on peut donc écrire :

$$|V_1| \cdot (V_1 - V_0) = |V_0 + V_F| \cdot V_F = -n \cdot l_c \cdot V_a^2 \cdot C_z \cdot \cos(\beta_e) / 8\pi r \quad (\text{relation 9})$$

Nota : Les vitesses figurant du côté gauche de la formule sont toutes des vitesses moyennes sur l'ensemble de la surface de l'anneau utilisé pour le calcul, mais du côté droit, l'évaluation précise de $C_z \cdot \cos(\beta_e)$ doit se faire en tenant compte du Vent induit effectif au contact de la pale.

Remarque : valeur de la différence moyenne de pression $\Delta p_m(r)$ entre les faces supérieure et inférieure du plan du rotor au rayon r en vol stationnaire.

En partant de la relation (3), en exprimant V_a^2 à partir de la relation (9) pour $V_0 = 0$ et en assimilant $\cos(\beta_e)$ à 1, on obtient ($V_{F0} = V_1$ en vol stationnaire) :

$$\Delta p_m(r) \sim 2 \rho \cdot V_{F0}^2$$

Poussée verticale et puissance induite :

L'élément de poussée axiale (dPa) exercée par le rotor au rayon r sur un anneau de largeur dr est donné par la relation (8), en remplaçant les vecteurs par les valeurs algébriques des projections verticales :

$$dPa = n \cdot dF_{az} = 4\pi \cdot \rho \cdot |V_1| \cdot (V_1 - V_0) \cdot r \cdot dr$$

En remarquant que $V_1 = V_F + V_0$ et en introduisant l'élément de surface d'expression générale $dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$:

$$dPa = 2\rho \cdot |V_F + V_0| \cdot V_F \cdot dS$$

La poussée axiale totale s'obtient en effectuant la somme suivante, étendue à la surface active du rotor (S) :

$$Pa = 2\rho \cdot \int_S |V_F + V_0| \cdot V_F \cdot dS$$

La puissance fournie par un élément de pale est :

$$dPt = V_1 \cdot dPa = (V_F + V_0) \cdot dPa$$

La puissance totale fournie par le rotor pour déplacer et sustenter l'appareil est alors :

$$\begin{aligned} Pt &= \int_S dPe = 2\rho \cdot \int_S (V_F + V_0) \cdot |V_F + V_0| \cdot V_F \cdot dS \\ &= 2\rho \cdot V_0 \cdot \int_S |V_F + V_0| \cdot V_F \cdot dS + 2\rho \cdot \int_S |V_F + V_0| \cdot V_F^2 \cdot dS \\ &= V_0 \cdot Pa + 2\rho \cdot \int_S |V_F + V_0| \cdot V_F^2 \cdot dS \end{aligned}$$

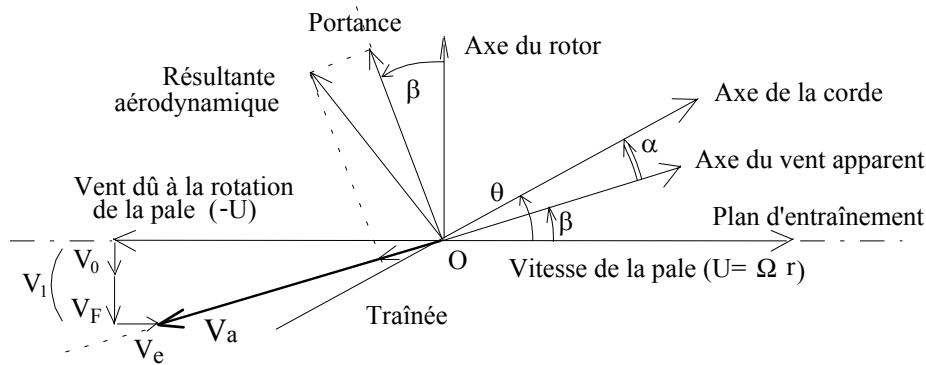
Le premier terme du second membre représente la puissance utile fournie ($P_u = V_0 \cdot Pa$).

Le second terme représente une puissance liée à la sustentation appelée puissance induite (P_i) :

$$P_i = 2\rho \cdot \int_S |V_F + V_0| \cdot V_F^2 \cdot dS$$

Calcul de l'angle d'attaque en vol vertical (en régime établi)

Le schéma suivant, dans le plan du profil, permet d'établir les relations entre θ , α , β et les différentes vitesses considérées au bord d'attaque de la pale. Dans le cas du vol vertical, V_0 est vertical et s'annule seulement en vol stationnaire. Il n'y a pas de battement de la pale.



V_0 est négatif sur la figure, ce qui suppose ici un vol ascendant

Le vent moyen apparent V_a perçu par la pale au voisinage du bord d'attaque, est la somme des vents

$$V_a = -U + V_0 + V_F + V_e$$

V_e est un très faible vent horizontal, dû à l'entraînement de l'air par viscosité au contact de la pale.

V_e est toujours de même sens que la vitesse de la pale et son module est toujours inférieur à Ωr , c'est à dire que $(\Omega r - V_e)$ est toujours positif. On admettra de plus que V_e est très faible devant Ωr , c'est à dire que $\varepsilon = V_e / \Omega r$ reste bien inférieur à 1 (on prendra $\varepsilon = 1$ à 2 %).

Le vent V_1 à travers le rotor est $V_0 + V_F$ (V_F vaut toujours $V_1 - V_0$).

Le triangle des vitesses représenté à gauche de la figure permet d'écrire les relations :

$$V_a \cdot \sin(\beta) = V_0 + V_F = V_1 \quad (\text{relation 10})$$

$$V_a \cdot \cos(\beta) = -(\Omega r - V_e) = -\Omega r (1 - \varepsilon) \quad (\text{relation 11})$$

La dernière expression est conforme à ce qui a été dit plus haut : sur l'axe du vent apparent, la mesure de V_a est toujours négative.

Calcul approché :

On a vu précédemment que C_Z pouvait dans tous les cas se mettre sous la forme : $C_Z = Z_1 \cdot \alpha' \cdot [1 + P(\alpha)]$ où α' est l'angle d'attaque absolu ($\alpha' = \alpha - \alpha_c$)

Pour commencer, on simplifie l'expression de C_Z en la limitant au terme en α' . On remplace donc C_Z par $Z_1 \cdot \alpha'$ dans la relation (9) qui prend alors la forme suivante, en utilisant l'angle d'attaque absolu effectif (α_e') pour plus de précision et en remplaçant $|V_1|$ par $\text{Sgn}(V_1) \cdot V_1$, où $\text{Sgn}(V_1)$ représente le signe de V_1 :

$$8\pi r \cdot [\text{Sgn}(V_1)] \cdot V_1 \cdot (V_1 - V_0) = -n \cdot l_c \cdot V_a^2 \cdot Z_1 \cdot \alpha_e' \cdot \cos(\beta_e) \quad (\text{relation 12})$$

Le calcul de V_1 en vol vertical s'effectue en résolvant le système constitué par les relations (10), (11) et (12).

Sachant que V_a est toujours négatif, la relation (10) permet d'écrire (pour $\beta < \pi/2$) : $\text{Sgn}(V_1) = -\text{Sgn}(\beta)$.

D'où, en portant la valeur de V_1 tirée de la relation (10), dans la relation (12), on obtient :

$$8\pi r \cdot V_a \cdot \sin(\beta) \cdot [V_a \cdot \sin(\beta) - V_0] = \text{Sgn}(\beta) \cdot n \cdot l_c \cdot Z_1 \cdot V_a^2 \cdot \cos(\beta_e) \cdot \alpha_e'$$

En divisant les deux membres par V_a^2 , et en utilisant l'approximation des petits angles, c'est à dire $\sin(\beta) \sim \beta$ en radian et $\cos(\beta) \sim \cos(\beta_e) \sim 1$, on obtient :

$$8\pi r \cdot \beta \cdot (\beta - V_0/V_a) = \text{Sgn}(\beta) \cdot n \cdot l_c \cdot Z_1 \cdot \alpha_e'$$

En développant le premier membre et en remplaçant V_a par sa valeur tirée de (11), on peut écrire :

$$8\pi r \cdot \beta^2 + 8\pi \cdot V_0 \cdot \beta / [\Omega \cdot (1 - \varepsilon)] = \text{Sgn}(\beta) \cdot n \cdot l_c \cdot Z_1 \cdot \alpha_e'$$

Puis, en divisant tout par $n \cdot l_c \cdot Z_1$:

$$8\pi r \cdot \beta^2 / (n \cdot l_c \cdot Z_1) + 8\pi \cdot V_0 \cdot \beta / [n \cdot l_c \cdot Z_1 \cdot \Omega \cdot (1 - \varepsilon)] = \text{Sgn}(\beta) \cdot \alpha_e'$$

En introduisant le paramètre $\sigma = n.lc / \pi R$, appelée aussi « plénitude du rotor », et la variable $x = r/R$:

$$(8/\sigma.Z_1).x.\beta^2 + (8/\sigma.Z_1).[V_0/\Omega.R.(1-\varepsilon)].\beta = \text{Sgn}(\beta).\alpha_e'$$

Nota : le paramètre σ utilisé ici ne représente la plénitude que dans le cas des pales « droites ». Pour une pale « trapézoïdale », par exemple, σ sera fonction du rayon courant.

En notant que : $\alpha_e' = \alpha_e - \alpha_c = (\theta - \beta_e) - \alpha_c = \theta' - (\beta + \frac{1}{2} a_i)$ en posant $\theta' = \theta - \alpha_c$:

On obtient : $(8/\sigma.Z_1).x.\beta^2 + \{\text{Sgn}(\beta) + (8/\sigma.Z_1).[V_0/\Omega.R.(1-\varepsilon)]\}.\beta - \text{Sgn}(\beta).(\theta' - \frac{1}{2} a_i) = 0$

Posant $v = V_0/\Omega.R.(1-\varepsilon)$, on doit résoudre :

$$\text{Sgn}(\beta).(8x/\sigma.Z_1).\beta^2 + [1 + \text{Sgn}(\beta).(8v/\sigma.Z_1)].\beta - (\theta' - \frac{1}{2} a_i) = 0$$

Pour simplifier l'écriture, on peut poser : $2A = \sigma.Z_1/8$, soit $A = n.lc.Z_1/16\pi R$. L'équation devient alors :

$\text{Sgn}(\beta).(x/2A).\beta^2 + [1 + \text{Sgn}(\beta).(v/2A)].\beta - (\theta' - \frac{1}{2} a_i) = 0$	(relation 13)
---	---------------

Résolution : la valeur de a_i

n'est pas connue a priori puisqu'elle dépend du C_z effectif et de sa distribution en envergure. On commence donc par calculer β avec θ' seul, en négligeant la petite quantité ($\frac{1}{2} a_i$), puis on en déduit les valeurs approchées de α et de C_z . A partir de ces résultats, on peut évaluer a_i à partir des formules de l'aile. On verra ultérieurement que les bouts de pale, où se produit la majeure partie de la poussée du rotor, sont le siège de phénomènes tourbillonnaires plus importants qu'en bout d'aile, n'obéissant plus aux formules simples développées jusqu'ici. Au stade présent, on se contente donc d'un calcul simplifié de a_i et on en déduira une meilleure estimation de α et de β . Ultérieurement, on corrigera de manière globale ces valeurs de α et de β pour tenir compte des effets en bout de pale.

Remarque : supposons connue une solution β_0 (avec son signe), obtenue pour un couple $[v_0, \theta_0']$.

En remplaçant v_0 par $(-v_0)$ et θ_0' par $(-\theta_0')$, on constate que $(-\beta_0)$ est également solution.

En effet, le premier membre de l'équation devient :

$$\text{Sgn}(-\beta_0).(x/2A).(-\beta_0)^2 + [1 + \text{Sgn}(-\beta_0).(-v_0/2A)].(-\beta_0) - (-\theta_0')$$

Soit $-\text{Sgn}(\beta_0).(x/2A).\beta_0^2 - [1 + \text{Sgn}(\beta_0).(v_0/2A)].\beta_0 + \theta_0'$

Au signe près, cette expression a la même valeur que l'expression de départ, c'est à dire 0, puisque β_0 était solution. Donc $(-\beta_0)$ est bien solution de l'équation pour le couple $[(-v_0), (-\theta_0')]$.

En conséquence, on résoudra le cas β positif, c'est à dire $\text{Sgn}(\beta) = 1$, puis on procédera à l'extension de la formule pour β négatif en utilisant la propriété précédente.

Pour $\beta \geq 0$, la solution de l'équation (12) est :

$$\beta = (A/x).[-(1 + v/2A) \pm \sqrt{(1 + v/2A)^2 + (2x/A).\theta'}]$$

On détermine ensuite les conditions que doivent remplir les divers paramètres (notamment v , θ' et x) afin que :

- le discriminant soit positif.
- l'expression de β soit effectivement positive.

L'analyse montre que la solution avec signe (-) devant le radical ne convient pas pour un hélicoptère en situation réelle. La seule solution convenable est alors :

$(\theta - \alpha) = \beta = (A/x).[-(1 + v/2A) + \sqrt{(1 + v/2A)^2 + 2.(x/A).\theta'}]$	pour $\beta > 0$
---	------------------

Nota : il est impératif ici d'utiliser des valeurs d'angle en radian et d'exprimer Z_1 en rad^{-1} .

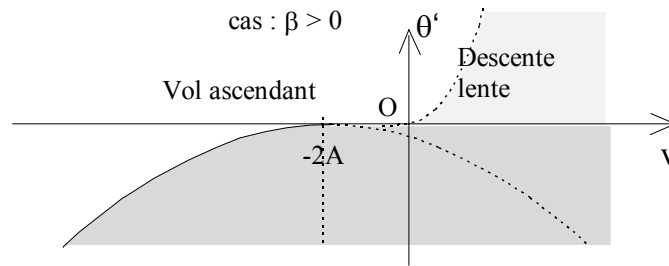
Ayant calculé β , on calculera facilement V_1 par la relation suivante, résultant de (10) et (11) :

$$V_1 = -\Omega r (1 - \varepsilon). \text{Tan}(\beta) \sim -\Omega r (1 - \varepsilon).\beta$$

Puis : $V_i = V_1 - V_0$

et enfin, à partir de (7) : $V_2 = 2V_1 - V_0$

Les conditions de validité sont résumées, dans le plan (θ' , v), par le diagramme suivant :



La zone en gris foncé est exclue du domaine de validité de l'équation car l'ensemble des conditions posées n'y est pas satisfait. Cette zone est délimitée par :

- une parabole d'équation $\theta' = -(A/2x) \cdot [1 + v/2A]^2$, d'axe vertical, tangente à l'axe horizontal au point d'abscisse $-2A$ (zone où le discriminant est négatif)
- la partie du plan située au-dessous de l'axe horizontal pour $v > -2A$ (zone où β est négatif).

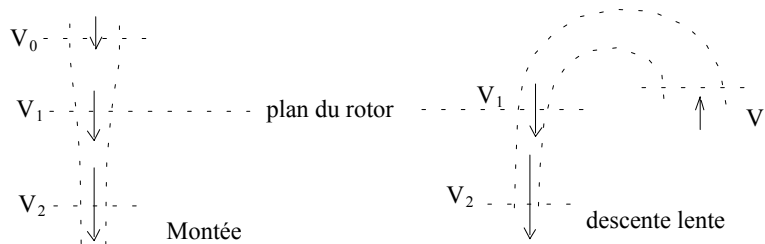
Pour $v > 0$ (vol en descente), on est conduit à introduire une valeur de v limite au-delà de laquelle un couplage important entre les espaces amont et aval se produit (état de vortex, non pris en compte dans les équations utilisées), provoquant une forte perte de portance (zone en gris clair). V_0 critique est de l'ordre de $|V_{F0}|$ (voir un peu plus loin le cas du vol stationnaire). On écrira donc :

$$v \leq A \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2\theta' \cdot x/A})$$

La limite est une branche de parabole d'équation : $\theta' = (v/x) \cdot (1 + v/2A)$, coupant l'axe v aux points d'abscisse 0 et $-2A$.

La zone claire située au-dessous de l'axe horizontal ($\theta' < 0$), ne correspond à aucune condition réelle de vol.

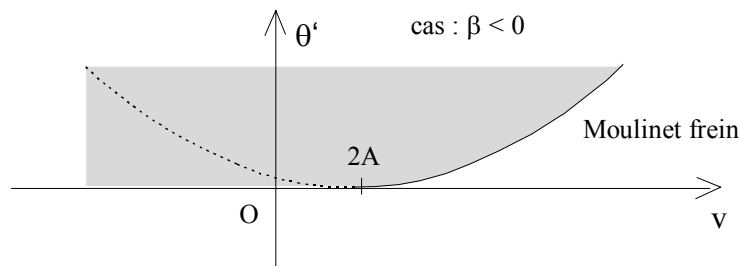
Suivant la valeur de V_0 , les lignes de flux présentent les allures suivantes :



Pour $\beta < 0$, la formule est obtenue à partir de la précédente en changeant les signes de β , v et θ' :

$$\boxed{(\theta - \alpha) = \beta = (A/x) \cdot [(1 - v/2A) - \sqrt{(1 - v/2A)^2 - 2 \cdot (x/A) \cdot \theta'}]} \quad \text{pour } \beta < 0$$

Le domaine de validité se déduit du précédent par symétrie par rapport à l'origine.



La partie située au-dessous de l'axe horizontal ($\theta' < 0$) ne correspond à aucune condition réelle de vol.

On constate que le régime de moulinet frein ne peut s'établir que si la vitesse de descente est supérieure à une limite définie par la relation :

$$\theta' \leq (A/2x) \cdot (1 - v/2A)^2 \quad \text{avec } v > 0$$

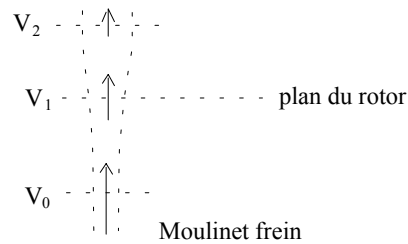
Soit encore :

$$v \geq 2A \cdot (1 + \sqrt{2\theta' \cdot x/A})$$

C'est à dire :

$$V_0 \geq 2\Omega R(1-\varepsilon) \cdot (\sigma Z_1/16) \cdot (1 + \sqrt{32x \cdot \theta'/\sigma Z_1})$$

En comparant cette limite à V_{F0} (voir un peu plus loin le cas du vol stationnaire), on constate qu'elle est de l'ordre de $2 |V_{F0}|$.



Calcul complet de α :

On obtiendra la valeur exacte de α par itération. Pour cela, la formule donnant $(\theta - \alpha)$ sera modifiée en remplaçant le paramètre Z_1 , partout où il apparaît, par le rapport $C_Z(\alpha')/\alpha'$. Ce rapport sera initialisé à la valeur limite correspondant à $\alpha'_0 = 0$, c'est à dire Z_1 .

Après une première passe, on obtient un angle α_1 permettant de calculer l'angle induit de pale (a_{i1}) et une nouvelle valeur approchée du rapport $C_Z(\alpha'_1) / \alpha'_1$, en utilisant, par exemple, $C_Z(\alpha'_1) := Z_1/p \cdot \sin(p \cdot \alpha'_1)$

En appliquant de nouveau la relation avec la nouvelle valeur $C_Z(\alpha'_1) / \alpha'_1$, et en tenant compte de (a_{i1}) on obtient α_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que l'écart entre deux valeurs successives de α_i , tombe au-dessous d'une valeur déterminée (10^{-4} par exemple). La convergence est rapide et deux passages suffisent en général.

Calcul simplifié de la poussée axiale du rotor

A titre d'exemple, on propose ici le calcul simplifié de la poussée axiale du rotor, dans le cas de pales droites (i.e. ni vrillées, ni trapézoïdales).

La force de portance exercée sur un élément de pale de largeur dr , s'écrit :

$$dP(r) = \frac{1}{2} \rho (lc dr) V_a^2 C_Z \quad \text{avec} \quad C_Z = Z_1 \cdot \alpha' \quad \text{et} \quad V_a = -\Omega r (1-\epsilon) / \cos(\beta)$$

La poussée axiale (dF_a) de cet élément s'obtient par projection de la portance sur l'axe rotor (angle β) :

$$dF_a = \frac{1}{2} \rho lc dr [\Omega (1-\epsilon) r]^2 Z_1 \cdot \alpha' / \cos(\beta)$$

Avec l'approximation : $(1-\epsilon)^2 / \cos(\beta) = 1$ et en remplaçant r par $x \cdot R$:

$$dF_a = \frac{1}{2} \rho lc \Omega^2 R^3 Z_1 \cdot \alpha' \cdot x^2 dx$$

L'élément de poussée axiale d'un rotor de n pales est : $dP_a = n \cdot dF_a$

Soit : $dP_a = k_a Z_1 \cdot \alpha' \cdot x^2 dx$ en posant $k_a = \frac{1}{2} \rho n lc \Omega^2 R^3$

Dans la situation la plus fréquente, ($\beta > 0$), l'expression de l'angle d'attaque prend la forme suivante :

$$\alpha' = \theta' + (A/x) \cdot [1 + v/2A - \sqrt{(1 + v/2A)^2 + 2 \cdot (x/A) \theta'}]$$

Soit $\alpha' = \theta' \cdot \{1 + A/(x \cdot \theta') \cdot [1 + v/2A - \sqrt{(1 + v/2A)^2 + 2x \cdot \theta'/A}]\}$

Où, A et θ' sont des constantes (indépendants de x pour une pale droite).

On effectue le changement de variable : $y = (1 + v/2A)^2 + (2\theta'/A) \cdot x$

$$\text{d'où : } x = (A/2\theta') [y - (1 + v/2A)^2] \quad \text{et} \quad dx = (A/2\theta') \cdot dy$$

L'expression de α' devient :

$$\alpha' = \theta' \cdot \{1 + 2/[y - (1 + v/2A)^2] \cdot (1 + v/2A - y^{1/2})\}$$

Soit, en remarquant que $y - (1 + v/2A)^2 = [y^{1/2} - (1 + v/2A)] \cdot [y^{1/2} + (1 + v/2A)]$ et en simplifiant :

$$\alpha' = \theta' \cdot \{1 - 2/[y^{1/2} + (1 + v/2A)]\} = \theta' \cdot (y^{1/2} - 1 + v/2A) / (y^{1/2} + 1 + v/2A)$$

En portant cette valeur dans l'expression de dF_a et en exprimant tout en fonction de y , on obtient :

$$dP_a = k_a.Z_1.\theta'.(A/2\theta')^3.[y - (1 + v/2A)^2]^2.(y^{1/2} - 1 + v/2A)/(y^{1/2} + 1 + v/2A).dy$$

D'où, après simplification par $(y^{1/2} + 1 + v/2A)$:

$$dP_a = k_a.Z_1.\theta'.(A/2\theta')^3.[y - (1 + v/2A)^2].(y^{1/2} - 1 - v/2A).(y^{1/2} - 1 + v/2A).dy$$

$$dP_a = k_a.Z_1.\theta'.(A/2\theta')^3.[y - (1 + v/2A)^2].[y - 2y^{1/2} + 1 - (v/2A)^2].dy$$

La poussée totale s'obtient par intégration entre les bornes : $x_m = r_{\min}/R < x < x_M = r_{\max}/R$

qui deviennent après le changement de variable : $y_m = (1 + v/2A)^2 + 2x_m.\theta'/A < y < y_M = (1 + v/2A)^2 + 2x_M.\theta'/A$

La poussée axiale globale du rotor est alors :

$$P_a = k_a.Z_1.\theta'.(A/2\theta')^3 \int_{y_m}^{y_M} [y - (1 + v/2A)^2] [y - 2y^{1/2} + 1 - (v/2A)^2].dy$$

On calcule alors la primitive $Sa(y)$:

$$Sa(y) = Z_1.(A/2\theta')^3 \int [y - (1 + v/2A)^2] [y - 2y^{1/2} + 1 - (v/2A)^2].dy$$

Soit $Sa(y) = Z_1.(A/2\theta')^3 \{ y^3/3 - y^2.(v/2A).(1 + v/2A) - y.(1 - v/2A).(1 + v/2A)^3 - 4y^{1/2}.[y^2/5 - y/3.(1 + v/2A)^2] \}$

D'où $P_a = k_a.Sa.\theta'$ où $Sa = Sa(y_M) - Sa(y_m)$

On améliore la précision en prenant pour $r_{\max}$ une valeur inférieure à R , pour tenir compte des pertes de portance en bout de pale, dues aux tourbillons marginaux (voir plus loin).

La valeur de $r_{\max}$ peut être estimée à partir de la quantité (C_p) dénommée « poussée axiale réduite » ou « coefficient de poussée » :

$$C_p = P_a / (\frac{1}{2} \rho (\Omega.R)^2.S) = P_a / (\frac{1}{2} \pi.\rho \Omega^2.R^4)$$

Alors : $x_M = r_{\max}/R = 1 - (1/n).\sqrt{(C_p/2)}$

Une valeur courante de x_M est 0,97. On pourra alors prendre : $y_M = (1 + v/2A)^2 + 2.(0,97).\theta'/A$

Dans la plupart des cas, on se contentera de calculer la primitive pour $y = y_M$ car, en comparaison, la valeur obtenue pour $y = y_m$ sera négligeable.

Cas du vol stationnaire

Le vol stationnaire est caractérisé par $V_0 = 0$, c'est à dire $v = 0$. Bien que l'utilisation de $\theta' < 0$ ne corresponde à aucune situation réelle de vol stationnaire, on peut produire une formule générale englobant tous les cas (θ' positif, négatif ou nul) qui peut se révéler utile pour des essais de rotor sur banc (par exemple, lors de l'utilisation de pales vrillées). Pour cela, on fait $v = 0$ dans les deux formules précédentes puis on regroupe les deux expressions obtenues, sous la forme :

$$(\theta - \alpha) = \beta = \text{Sgn}(\theta - \alpha_c).(A/x).[-1 + \sqrt{1 + 2.(x/A).|\theta - \alpha_c|}]$$

Soit, en explicitant les paramètres :

$$(\theta - \alpha) = \beta = \text{Sgn}(\theta - \alpha_c).(\sigma.Z_1/16x).[-1 + \sqrt{1 + 32.|\theta - \alpha_c|.x / (\sigma.Z_1)}] \quad (\text{relation 14})$$

En utilisant (10) et (11), on peut exprimer $V_1 = V_i = V_{F0}$ en vol stationnaire :

$$|V_{F0}| = \Omega R(1 - \varepsilon).(\sigma.Z_1/16).[-1 + \sqrt{1 + 32.|\theta - \alpha_c|.x / (\sigma.Z_1)}]$$

Remarque : l'utilisation de pales vrillées selon la loi $|\theta - \alpha_c| = k/x$ rend V_{F0} uniforme sous le rotor.

Nota : les formules précédentes utilisent les quantités A (ou σ), contenant des paramètres susceptibles d'évoluer en fonction du rayon. Pour permettre le calcul par élément de pale dans certaines applications numériques, il convient d'extraire de A les paramètres pouvant être fonction du rayon, c'est à dire :

Z_1 : cas d'évolution du profil le long de la pale (amincissement par exemple)
 lc : cas des pales trapézoïdales.

On remplacera alors systématiquement A par la quantité $D.Z_1.lc$, avec $D = n/16\pi R$

Vitesse verticale du vent induit sous le rotor :

d'après (7), on peut écrire : $V_2 = 2V_1 = 2V_i$

Le débit volumique restant constant le long d'un même tube de flux, on en déduit que la section du flux d'air induit à l'infini aval (S_{∞}) vaut : $S_{\infty} = \pi R^2 / 2$ d'où la valeur du rayon de la section :

$$R_{\infty} = 0,707 R \quad (\text{Les tubes de flux se contractent donc sous le rotor}).$$

L'expérience montre que la contraction est en fait très rapide puisqu'elle est terminée à la distance $h = R$ sous le rotor et peut même être considérée comme pratiquement terminée à $h = 0,4 R$

Calcul simplifié de la poussée du rotor dans le cas de pales droites :

On utilise la formule déjà établie dans le cas général en faisant $v = 0$, d'où la nouvelle expression de $Sa(y)$ pour le vol stationnaire :

$$Sa_0(y) = Z_1.(A/2\theta')^3.[y^3/3 - y - 4y^{1/2}.(y^2/5 - y/3)]$$

D'où : $Sa_0 = Sa_0(y_M) - Sa_0(y_m)$ avec les valeurs : $y_m = 1 + 2(r_{\min}/R).\theta'/A$ et $y_M = 1 + (2 \times 0,97) \theta'/A$

On peut remarquer ici que, dans la mesure où on néglige $Sa_0(y_m)$, Sa_0 ne dépend que du paramètre $2\theta'/A$, qui vaut : $(32\pi/Z_1).(R.\theta')/(n.lc)$

Optimisation de la distribution du vent induit sous le rotor :

La poussée axiale totale (Pa) et la puissance de sustentation (puissance induite Pi) s'écrivent, en stationnaire :

$$Pa = 2\rho \int_S V_{Fo}^2 . dS \quad \quad \quad Pi = 2\rho \int_S V_{Fo}^3 . dS$$

Problème : existe-t'il une répartition du vent induit rendant minimum Pi pour une valeur de Pa fixée ?

En découpant la surface active du rotor, $S = \pi.(R^2 - r_{\min}^2)$, en N éléments très petits et identiques, $\Delta S = S/N$, on peut écrire :

$$Pa = 2\rho.S/N.\sum_{i=1}^N Vi^2 \quad \quad \quad Pi = 2\rho.S/N.\sum_{i=1}^N Vi^3$$

La variable V_{Fo} (dépendant du point où se situe ΔS) a été remplacée ici par V à l'indice i ($1 \leq i \leq N$).

Introduisons la répartition particulière où $Vi = Vo = Cte$. La poussée axiale correspondante est :

$$Pa = 2\rho.S/N.\sum^N Vo^2 = 2\rho.S.Vo^2$$

La condition $Pa = Cte$ peut alors s'écrire : $\sum^N Vi^2 = \sum^N Vo^2$, soit encore : $\sum^N [Vi^2 - Vo^2] = 0$

La puissance induite correspondant à la distribution uniforme est :

$$Pio = 2\rho.S/N.\sum^N Vo^3 = 2\rho.S.Vo^3 = Pa^{3/2}/\sqrt{(2\rho.S)}$$

En formant la différence : $\Delta Pi = (Pi - Pio) = 2\rho.S/N.\sum^N [Vi^3 - Vo^3]$, le problème s'énonce alors ainsi :

$$\text{Minimiser } \sum^N [Vi^3 - Vo^3] \text{ en respectant la condition } \sum^N [Vi^2 - Vo^2] = 0$$

On peut écrire : $Vi^3 - Vo^3 = (Vi - Vo).(Vi^2 + VoVi + Vo^2) = (Vi - Vo).[Vi^2 + Vo.(Vi + Vo)]$

$$Vi^3 - Vo^3 = Vi^2.(Vi - Vo) + Vo.(Vi^2 - Vo^2) = Vi.[(Vi - Vo) + Vo].(Vi - Vo) + Vo.(Vi^2 - Vo^2)$$

$$Vi^3 - Vo^3 = Vi.(Vi - Vo)^2 + Vo.Vi.(Vi - Vo) + Vo.(Vi^2 - Vo^2)$$

Par ailleurs : $Vi^2 - Vo^2 = (Vi - Vo).(Vi + Vo) = (Vi - Vo).(2Vi - Vi + Vo) = (Vi - Vo).[2Vi - (Vi - Vo)]$

$$Vi^2 - Vo^2 = 2Vi (Vi - Vo) - (Vi - Vo)^2$$

D'où : $Vi (Vi - Vo) = \frac{1}{2} [(Vi - Vo)^2 + (Vi^2 - Vo^2)]$

$$Vi^3 - Vo^3 = Vi.(Vi - Vo)^2 + \frac{1}{2} Vo.[(Vi - Vo)^2 + (Vi^2 - Vo^2)] + Vo.(Vi^2 - Vo^2)$$

$$Vi^3 - Vo^3 = (Vi + \frac{1}{2} Vo).(Vi - Vo)^2 + \frac{3}{2} Vo.(Vi^2 - Vo^2)$$

et enfin :
$$\sum^N [V_i^3 - V_o^3] = \sum^N (V_i + \frac{1}{2} V_o) \cdot (V_i - V_o)^2 + \frac{3}{2} V_o \cdot \sum^N (V_i^2 - V_o^2)$$

Le second membre est une somme positive ou nulle car constituée de termes tous positifs ou nuls. Il en résulte que la puissance induite est minimum lorsque la distribution des vitesses induites est uniforme ($\Delta P_i = 0$).

Le vrillage des pales en $\theta - \alpha_c = k/x$, (voir au début du chapitre), constitue donc une solution classique au problème.

Pour un rotor donné, le facteur de mérite P_{io}/P_i permet de chiffrer l'écart par rapport à l'optimum théorique. Il ne faut toutefois pas rechercher à tout prix la répartition optimale car :

- le minimum est assez plat ce qui ne justifie pas des prouesses technologiques de vrillage sophistiqué.
- la répartition uniforme de V_{Fo} entraîne une variation importante de l'angle d'attaque le long de la pale, ($\alpha - \alpha_c$ varie en effet lui aussi en k/x). Il est alors impossible de faire travailler l'ensemble de la pale à l'optimum.

Réduction de la puissance induite à masse soulevée donnée :

En supposant que la répartition du vent induit du rotor ait été rendue uniforme, les expressions de la poussée axiale et de la puissance induite en vol stationnaire deviennent :

$$P_a = 2\rho \cdot \int_S V_{Fo}^2 \cdot dS = 2\rho \cdot V_{Fo}^2 \cdot S \quad \text{et} \quad P_i = 2\rho \cdot \int_S V_{Fo}^3 \cdot dS = 2\rho \cdot V_{Fo}^3 \cdot S$$

Ce qui permet d'écrire :

$$V_{Fo} = \sqrt{[P_a/(2\rho \cdot S)]} = \sqrt{[M \cdot g/(2\rho \cdot S)]}$$

$$\text{et} \quad P_i = P_a^{3/2} / \sqrt{(2\rho \cdot S)} = \sqrt{[(M \cdot g)^3/(2\rho \cdot S)]}$$

Cette dernière expression montre que pour une masse soulevée (M) déterminée, seule l'augmentation de S (donc du rayon du rotor) est susceptible de donner un résultat significatif pour réduire P_i . Ceci conduit à diminuer la pression sous le disque.

En pratique, cette relation théorique doit être corrigée pour tenir compte des pertes de portance dues aux tourbillons marginaux affectant les bouts de pales (voir plus loin). Comme on l'a déjà vu, la prise en compte de ce phénomène s'effectue en considérant un rayon effectif de rotor plus faible que le rayon géométrique lors du calcul de S. Il s'en suit une dégradation de la puissance induite dont l'importance augmente lorsque l'allongement (Λ) de la pale diminue (accroissement des tourbillons marginaux).

A masse et dimensions de rotor constantes, on notera alors une dégradation de P_i lorsque la vitesse de rotation du rotor diminue (la corde doit croître pour maintenir un angle d'attaque proche de l'optimum).

Corrections de portance

On a considéré jusqu'ici que l'hélicoptère évoluait dans des conditions atmosphériques normales, dans un air supposé incompressible, loin de tout obstacle et en particulier du sol. Des corrections sont donc à apporter lorsque ces conditions ne sont pas remplies.

Evolution des conditions atmosphériques

On trouvera dans les compléments les corrections à apporter aux valeurs de masse spécifique et de viscosité de l'air lorsque les conditions atmosphériques ne sont plus standards.

Compressibilité de l'air

Lorsque la vitesse de l'air au voisinage du profil n'est plus négligeable devant la vitesse du son, l'air ne peut plus être considéré comme incompressible et des corrections peuvent être apportées. Dans le cas où le nombre de Mach (M) devient supérieur à 0,3 tout en restant bien inférieur à 1, on peut obtenir simplement les coefficients aérodynamiques en écoulement « compressible » à partir des coefficients obtenus en écoulement « incompressible » par l'affinité de Prandtl-Glauert :

$$C_{Zc} = C_Z / \sqrt{(1 - M^2)}$$

Le nombre de Mach appliqué à une section de la pale est défini comme le quotient de la vitesse de déplacement du profil par rapport à l'air, par la vitesse du son à l'infini amont.

Au rayon r , on aura donc, en vol stationnaire:

$$M = \Omega r / V_s \quad \text{où } V_s \text{ est la vitesse du son}$$

Effet de sol

Lorsque l'hélicoptère en vol stationnaire se trouve près du sol, les écoulements sous le rotor sont perturbés. En particulier, les écoulements dans la zone des vitesses maximum (V_2) ne correspondent plus au modèle retenu pour les calculs : l'air ne s'y écoule plus verticalement et l'équation relative aux quantités de mouvement doit être modifiée. Toutefois, on peut en tenir compte assez simplement en introduisant un coefficient réducteur (ψ) de la vitesse induite (l'effet correspondant est une augmentation de l'angle α au voisinage du sol).

Le coefficient (ψ) est fonction de la hauteur (H) du rotor au dessus du sol. Une valeur couramment adoptée est (cf Lefort et Hamann) :

$$\psi = 1 - \frac{1}{2.[1 + (2.H/R)^2]}$$

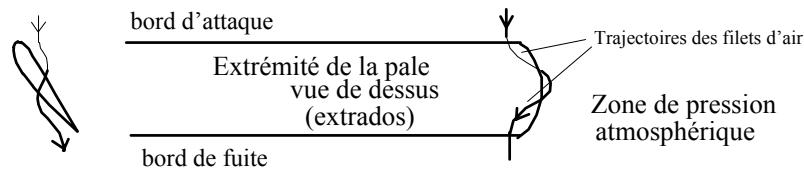
Ce coefficient sera utilisé en multipliant par ψ l'angle β calculé, pour chaque section de la pale.

Effets en extrémité de pale

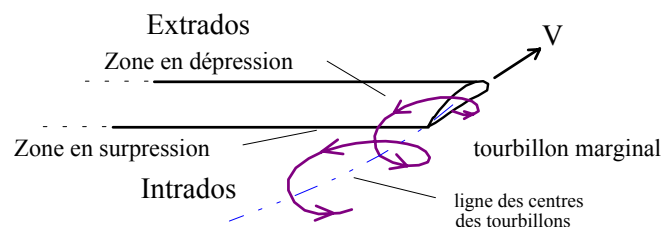
Présentation des phénomènes

En extrémité de pale, (comme en bout d'aile d'avion), l'existence d'une surpression à l'intrados et d'une dépression à l'extrados, par rapport à la pression atmosphérique, provoque une circulation d'air entre ces deux zones. A l'intrados, par exemple, les filets d'air, (en traits fins sur la figure), ne suivent plus la section droite du profil, (contrairement à ce qui se passerait en tout point sur une pale de longueur infinie), mais sont déviés vers l'extrémité de la pale où règne la pression atmosphérique.

Un raisonnement similaire montre que les filets d'air sont déviés en sens contraire à l'extrados (en traits épais).



Cette circulation d'air entraîne une diminution de la différence de pression Δp_m entre les deux faces de la pale et donc une réduction de la portance. L'effet est d'autant plus marqué que l'on se place plus près de l'extrémité de la pale. Intuitivement, si la distance à l'extrémité tombe nettement au dessous de la longueur de la corde (l_c), l'air en surpression à l'intrados contourne l'extrémité et passe à l'extrados avant que la pale n'ait quitté la zone considérée, entraînant une forte réduction de portance. Ce phénomène est qualifié de tourbillon marginal. A l'extrémité même de la pale, la différence de pression, et par suite la portance, s'annulent pratiquement (on parle de court-circuit aérodynamique). La figure suivante montre la trajectoire d'une particule d'air telle qu'elle apparaîtrait à un « observateur » accroché en bout de pale.



Ces phénomènes prennent toutefois une ampleur supérieure au cas de l'aile d'avion pour les raisons suivantes :

- la vitesse de pénétration de la pale dans l'air croît proportionnellement au rayon, entraînant une concentration de poussée en bout de pale, ce qui accroît l'importance du tourbillon marginal vis à vis de l'aile.

- Chaque pale évolue dans l'accumulation des sillages résiduels dus aux passages antérieurs de l'ensemble des pales. Une des conséquences est une sorte d'entretien du tourbillon d'extrémité entraînant un rebouclage partiel de l'espace aval vers l'espace amont.

On conçoit alors que le calcul du vent de Froude déjà réalisé devienne inapplicable près de l'extrémité de pale. Il devient notamment impossible de dissocier le vent induit global en un vent de Froude additionné à un vent induit de pale.

Le calcul précis et complet de tous les effets en bout de pale doit être global et tridimensionnel et nécessite des développements mathématiques et des outils informatiques généralement hors de portée de l'amateur. Toutefois, une approche empirique simplifiée peut permettre d'obtenir des résultats intéressants. Ainsi, le paragraphe qui suit décrit une prise en compte simple du tourbillon marginal de la pale.

Prise en compte simplifiée du tourbillon marginal

Une façon simple de tenir compte du phénomène de réduction de portance vers l'extrémité de pale est de considérer un rayon effectif maximum ($r_{\max}$) inférieur à R.

On a déjà rencontré cette approche lors du calcul simplifié de la poussée du rotor.

Plusieurs formules donnant la réduction de rayon existent dans la littérature. On utilisera ici celle proposée dans l'ouvrage de Lefort et Hamann (en p. 16), qui utilise la quantité (C_p) dénommée « coefficient de sustentation du rotor » ou « poussée axiale réduite » :

$$C_p = Pa / [\frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S] = Pa / (\frac{1}{2} \pi \rho \Omega^2 R^4)$$

Alors : $x_M = r_{\max} / R = 1 - (1/n) \sqrt{C_p/2}$

Pour éviter une application trop brutale (en tout ou rien) et pour donner à la répartition de portance une allure « physiquement » plus satisfaisante, on utilise ici, de manière empirique, un coefficient de réduction progressive de l'angle d'attaque vers l'extrémité de pale.

Cette réduction doit naturellement présenter une valeur caractéristique lorsque le rayon courant (r) atteint une valeur liée à $r_{\max}$ définie ci-dessus.

On introduit alors le coefficient de forme $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = e^{-k_t(1-x)/(1-x_M)}$$

Où k_t est une constante d'ajustement comprise généralement entre 1 et 2. Cet ajustement revient à placer le point de l'envergure où $\varphi(r)$ vaut $1/e$, à la distance $(1-x_M)/k_t$ de l'extrémité de pale.

Le coefficient $\varphi(r)$ prend des valeurs très faibles vers le pied de pale et vaut 1 à l'extrémité.

On minimise l'effet simulé des tourbillons marginaux lorsqu'on augmente k_t .

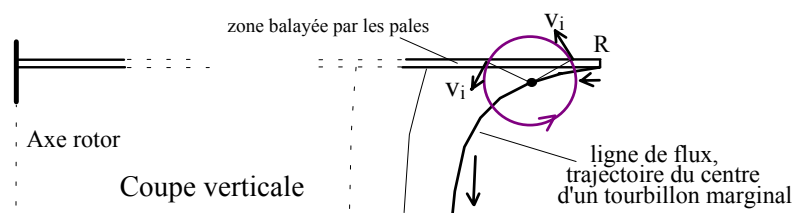
Application : l'angle d'attaque absolu α' déjà calculé est multiplié par $[1 - \varphi(r)]$ ce qui le rend nul en extrémité de pale. De là, on calcule C_z et la portance. L'angle β est également réactualisé : $\beta = \theta' - \alpha'$.

On admettra alors qu'après ajustage (empirique) de k_t pour un rotor donné, la portance ainsi corrigée en bout de pale prend globalement en compte tous les effets induits propres à la pale (hors sillage).

Effet de sillage

Le tourbillon marginal introduit au paragraphe précédent n'est pas stationnaire car il est entraîné sous le rotor par le vent de Froude. Son centre se déplace donc en suivant une ligne de flux.

Le schéma ci-dessous montre, dans une coupe méridienne fixe de l'espace rotor, l'allure de la trajectoire du centre d'un tourbillon marginal au voisinage de la périphérie du rotor.

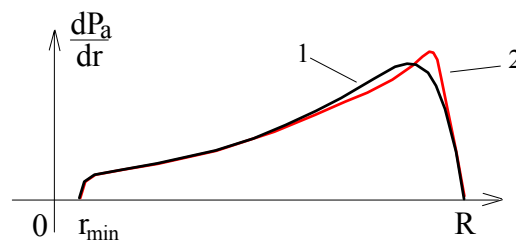


Le vent de Froude est faible au voisinage du bout de pale puisque la portance y tend vers zéro, aussi le centre du tourbillon marginal possède, au départ, une composante verticale de vitesse assez faible.

Dans un plan méridien, on constate que le tourbillon se déplace d'abord presque horizontalement vers le centre du rotor, avant d'infléchir plus nettement sa trajectoire vers le bas, au passage de la pale suivante. Suivant les caractéristiques du rotor, la pale suivante rencontre donc le tourbillon en position plus ou moins décalée vers le centre et vers le bas. Comme indiqué sur la figure, les vitesses induites par le tourbillon accroissent les angles d'attaque et donc la portance en bout de pale et, à l'opposé, la réduisent vers le centre.

La figure suivante montre la répartition de la poussée le long de la pale : la courbe (1) représente la distribution que l'on obtient en appliquant la correction simple déjà citée. La courbe (2) montre une distribution plus proche de la réalité, tenant compte de l'effet de sillage décrit précédemment.

Poussée par unité de longueur



Malheureusement, nous ne connaissons pas de formule susceptible de représenter l'effet du tourbillon marginal et du sillage en prenant en compte toutes les caractéristiques du rotor pouvant influencer sur la distribution.

Une approche différente du calcul des vents induits, basée sur l'analogie de la ligne portante et des tourbillons, sera introduite ultérieurement (voir plus loin).

Coefficients de traînée

Traînée de forme (ou de frottement visqueux)

La traînée de forme résulte de l'ensemble des forces de viscosité qui s'opposent à l'avancement d'un solide au sein d'un fluide. Ces forces se manifestent dans une zone de faible épaisseur en contact avec la surface du solide (couche limite). L'importance de la traînée dépend du type de profil utilisé, de ses dimensions, de la vitesse de l'air (nombre de Reynolds Re) et de la valeur de l'angle d'attaque α . C'est une valeur intrinsèque au profil (traînée de forme). De manière générale, le coefficient de traînée de forme peut s'exprimer comme suit :

$$C_{XF} = C_{X0}(Re, \alpha)$$

Un profil est caractérisé par son coefficient de traînée, donné pour une valeur déterminée du nombre de Reynolds, par exemple 200.000. Pour des valeurs différentes, on appliquera une correction Reynolds.

Dans le cas de l'hélicoptère, le calcul de la traînée de forme sera effectué comme pour une aile d'avion, en tenant compte du nombre de Reynolds appliqués à l'élément de pale, au rayon considéré.

Traînée induite

A la traînée de forme s'ajoutent des forces, présentes même dans le cas d'écoulements non visqueux, résultant des phénomènes tourbillonnaires induits par l'existence même de la portance et, comme on l'a vu, particulièrement marqués vers l'extrémité des pales.

Rappel concernant l'aile d'avion :

Comme rappelé en début de chapitre (voir rappels concernant l'aérodynamique des profils), la portance entraîne l'existence d'un flux descendant en aval de l'aile, constituant le vent induit de l'aile.

Ce vent fait apparaître un angle induit (α_i) ayant pour effet de réduire l'angle d'attaque, ce qui entraîne une réduction de la portance, déjà évoquée.

Une autre conséquence est l'inclinaison du vecteur de portance du même angle par rapport à l'axe normal au vecteur vitesse de déplacement de l'aile. Il s'en suit, par projection, une nouvelle composante de résistance à l'avancement appelée traînée induite, dont l'existence et l'amplitude sont liées à la portance développée.

La prise en compte de ce phénomène s'obtient en ajoutant un coefficient de traînée induite au coefficient de traînée de forme afin d'obtenir le coefficient global de traînée. La traînée induite fait intervenir essentiellement le coefficient moyen de portance de l'aile et la quantité appelée allongement de l'aile.

Cas de la pale d'hélicoptère :

Les formules déjà rencontrées dans le cas de l'aile ne peuvent être appliquées sans précaution au cas de la pale d'hélicoptère, car le mouvement d'une pale est a priori différent de celui d'une aile pour ce qui concerne la répartition des vitesses de l'air (et donc des forces de traînée) le long de la pale en rotation.

On admettra cependant que la traînée induite met en jeu des phénomènes similaires à ceux rencontrés sur une aile, mais les valeurs numériques des coefficients peuvent être différentes.

Le calcul reste à développer.

Effet de « centrifugation »

Une pale, à la différence d'une aile d'avion, présente un mouvement de rotation permanent. Les particules d'air prisonnières de la couche limite, sont soumises à d'importantes forces centrifuges vers la périphérie du rotor. Leur déplacement ne s'effectue plus dans un plan de section droite de la pale, entraînant un accroissement de vitesse et donc de cisaillement visqueux dans cette couche. Le résultat devrait être une réduction de la longueur de la zone d'écoulement laminaire dans la couche limite, provoquant une augmentation de traînée. Faut-il en tenir compte et, si oui, comment ?

Expression des forces et des couples dans un repère lié à l'hélicoptère

On évalue d'abord les forces de portance et de traînée d'une pale :

Ayant calculé β , on en déduit facilement : $\alpha = \theta - \beta$

On calcule ensuite V_a au rayon r : $V_a = -\Omega r \cdot (1 - \varepsilon) / \cos(\beta)$

puis (en utilisant 9) $V_1 = V_a \cdot \sin(\beta)$
soit $= -\Omega r \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \tan(\beta)$

et enfin $V_i = V_1 - V_0$

Nota : V_1 et V_i sont négatives si dirigées vers le bas

On exprime le coefficient de portance au rayon r $C_z = (Z_1/p) \cdot \sin[p \cdot (\alpha - \alpha_c)]$

L'élément de portance au rayon r est alors : $\Delta P(r) = 1/2 \cdot \rho \cdot l \cdot \Delta r \cdot V_a^2 \cdot C_z$

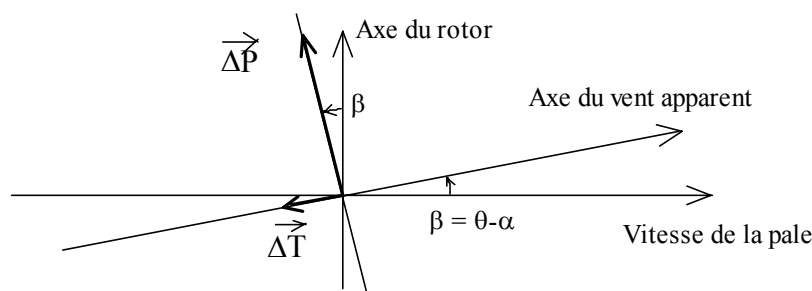
On exprime le coefficient de traînée au rayon r $C_x = C_{x0} \cdot C(\text{Re})$

L'élément de traînée est alors : $\Delta T(r) = 1/2 \cdot \rho \cdot l \cdot \Delta r \cdot V_a^2 \cdot C_x$

(Voir également les rubriques concernant les corrections applicables à la portance et à la traînée)

On exprime ensuite les composantes des forces dans un repère dont les directions de base sont :

- la tangente au cercle décrit par l'élément de pale (vitesse tangentielle de pale)
- l'axe du rotor



L'élément de force axiale ΔF_a vaut alors :

$$\Delta F_a = \Delta P \cdot \cos(\beta) - \Delta T \cdot \sin(\beta) \quad (\text{positive vers le haut})$$

L'élément de force tangentielle ΔF_t vaut :

$$\Delta F_t = \Delta P \cdot \sin(\beta) + \Delta T \cdot \cos(\beta) \quad (\text{positive ici dans le sens opposé à la rotation})$$

Le moment axial appliqué au rotor est :

$$\Delta M_a = r \cdot \Delta F_t \quad (\text{positif si résistant})$$

Calcul de la puissance d'équilibre

La puissance appliquée à l'arbre du rotor est dite d'équilibre, si la poussée axiale obtenue permet d'équilibrer le poids de l'hélicoptère (on suppose que le centre de gravité de l'hélicoptère est situé sur l'axe du rotor). La poussée axiale d'un rotor composé de n pales a pour expression :

$$P_a = n \cdot \sum_0^R \Delta F_a$$

Considérant que cette poussée axiale est la poussée d'équilibre recherchée en vol stationnaire auquel correspond le couple axial :

$$C_a = n \cdot \sum_0^R r \cdot \Delta F_t$$

La puissance requise sur l'arbre du rotor est donc:

$$P = C_a \Omega$$

Si la vitesse de rotation (t) est exprimée en t/mn et C_a est donné en Nm, on a :

$$P = 2\pi \cdot (t/60) \cdot C_a = 0,1047 \, t \cdot C_a$$

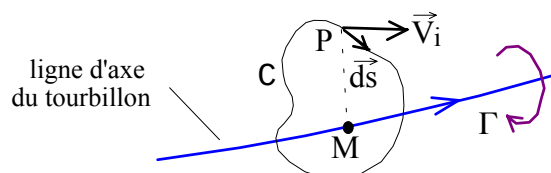
En outre il faut prendre en compte la non portance de la partie centrale du rotor et les pertes de traînées associées à la tête de rotor. Le fuselage est aussi sensé introduire une « déportance » que nous ne savons pas déterminer autrement que expérimentalement.

Introduction de la ligne portante et des tourbillons

La pale considérée comme un ligne portante

Une aile ou une pale d'allongement suffisant peut être assimilée, en première approximation, à une « ligne portante ». Pour ce qui concerne l'étude des forces de portance, cette notion permet de remplacer la pale par une simple ligne (passant par les centres de poussée), autour de laquelle existe un tourbillon associé (bound vortex). L'analogie s'applique au domaine des fluides incompressibles et de viscosité négligeable.

Le tourbillon est un mouvement de rotation de l'air défini, d'un point de vue mathématique, par une circulation du vecteur vitesse constante le long de tout contour fermé entourant l'axe de rotation.



A titre de rappel, la circulation (Γ) du vecteur vitesse de l'air, induite par le tourbillon, est obtenue par sommation le long du contour fermé (C) entourant la ligne portante, du produit scalaire entre le vecteur V_i et l'élément de contour de longueur ds :

$$\Gamma = \int_C V_i \cdot ds \quad (\Gamma \text{ en m}^2/\text{s})$$

Le sens positif de rotation sur le contour et le sens de mesure de Γ sur l'axe sont liés par la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Dans le cas du tourbillon aérodynamique, la valeur de Γ ne dépend ni de la position, ni de la forme du contour utilisé pour calculer la circulation. Celle-ci caractérise donc l'intensité de l'activité tourbillonnaire associée à la ligne portante. Dans la définition de base, Γ est constant tout au long d'une même ligne portante. La circulation est nulle lorsque le contour n'englobe aucun axe de tourbillon.

La poussée aérodynamique développée par unité de longueur (dr) d'une ligne portante rectiligne infinie, lorsqu'elle est plongée dans un flux uniforme de vitesse V_∞ perpendiculaire à son axe, est définie par la relation (loi de Kutta-Joukowski) :

$$dF_a/dr = \rho \cdot V_\infty \cdot \Gamma$$

V_∞ représente la vitesse du flux à grande distance de la ligne portante, c'est à dire à l'infini amont.

La poussée s'exerce perpendiculairement à la ligne portante et à la direction de V_∞ .

Dans le cas de la pale, cette même poussée est définie par la formule classique :

$$dF_a = \frac{1}{2} \rho \cdot lc \cdot (\Omega \cdot r)^2 \cdot C_z \cdot dr \quad \text{où } (\Omega \cdot r) \text{ représente exactement } V_\infty \text{ au rayon } r$$

D'où la valeur de l'intensité du tourbillon lié à la pale :

$$\Gamma = \frac{1}{2} lc \cdot (\Omega \cdot r) \cdot C_z$$

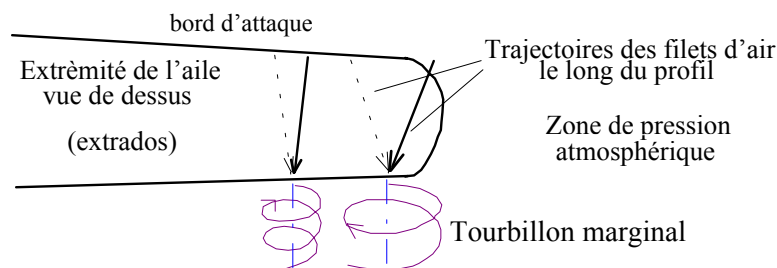
Les tourbillons de traînée

L'étude déjà réalisée, basée sur la théorie de Froude, montre que la portance varie tout au long d'une pale en mouvement, ce qui implique, contrairement à l'hypothèse de base déjà citée, une variation de la circulation le long de la ligne portante. En fait, l'existence du tourbillon marginal constitue un début de réponse à cette difficulté en montrant qu'il existe des zones tourbillonnaires au delà de la ligne portante.

On a vu que la dépression existant à l'extrados provoque une circulation d'air dirigée de l'extrémité de l'aile vers l'emplanture en tout point de l'aile (pas seulement en extrémité). Les filets d'air (en traits pleins) sur la figure ne suivent plus la section droite du profil, mais sont déviés vers l'emplanture de l'aile.

Un raisonnement similaire montre que les filets d'air sont déviés en sens contraire à l'intrados (en pointillés).

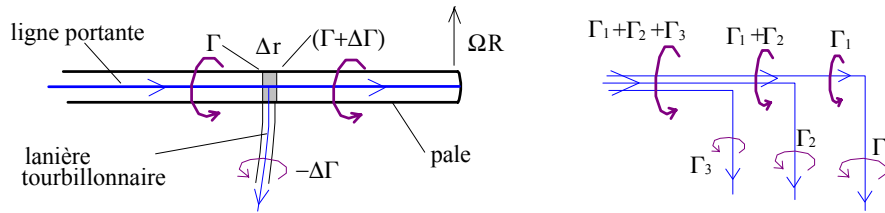
La jonction des deux flux au niveau du bord de fuite provoque en ce point un cisaillement rotationnel visqueux de l'air, générateur d'un filament tourbillonnaire qui s'étend à l'infini aval de l'aile.



Ces tourbillons de traînée (on dit aussi de sillage) sont des tourbillons « libres », par opposition au tourbillon « lié » de la ligne portante. Les tourbillons obéissent aux lois générales de Helmholtz qui s'énoncent :

- Γ est constante tout au long d'un filament tourbillonnaire.
- Un filament ne peut se terminer au sein du fluide. Il ne peut que :
 - soit se terminer aux limites du fluide (sur une paroi matérielle limitant le flux, ou à l'infini).
 - soit constituer un circuit fermé.
- Une fois formé, le coeur d'un tourbillon reste composé des mêmes particules de fluide (le phénomène rotationnel ne se transmet pas aux particules qui ne le possèdent pas). Le centre de chaque tourbillon se déplace alors nécessairement selon une ligne matérielle de flux au sein du fluide.

Ainsi, la variation de circulation sur un élément de pale doit se retrouver dans la lanière tourbillonnaire de traînée issue de cet élément, comme l'illustrent les schémas ci-dessous :



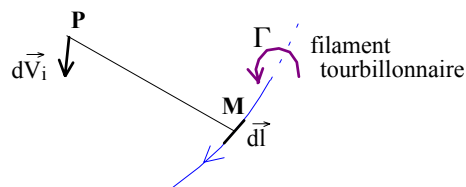
L'intensité d'une lanière tourbillonnaire de traînée de largeur Δr est alors :

$$\Delta \Gamma = -(\frac{d\Gamma}{dr})_{\text{pale}} \cdot \Delta r$$

Vitesses induites par un tourbillon

En tout point de l'espace, un élément de ligne portante, ou plus généralement un élément de filament ou de lanière tourbillonnaire, induit une vitesse définie par la loi de Biot et Savart appliquée à l'aérodynamique. L'élément de vitesse induite (dV_i) au point P par un petit segment de filament ($d\vec{l}$) situé en M, est donné par le produit vectoriel :

$$dV_i = \Gamma \cdot d\vec{l} \wedge \vec{MP} / (4\pi |\vec{MP}|^3)$$



Exemples classiques d'application :

- un filament rectiligne infini induit une vitesse (V_i), perpendiculaire à la direction du filament et dont l'amplitude décroît avec la distance (μ) au filament selon la loi :

$$V_i(\mu) = \Gamma / (2\pi \cdot \mu)$$

- un filament circulaire de rayon (R) induit en son centre une vitesse (V_i), perpendiculaire au cercle, de valeur :

$$V_i(\mu) = \Gamma / 2R$$

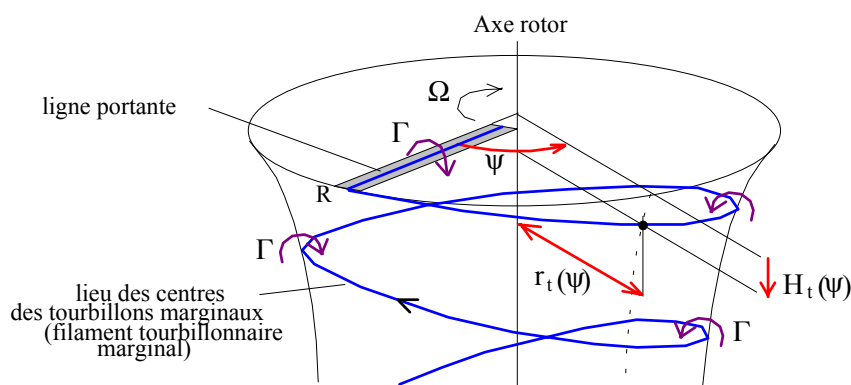
Description des filaments tourbillonnaires de traînée d'un rotor :

La présentation qui suit décrit le filament tourbillonnaire associé au tourbillon marginal. Les autres tourbillons de traînée peuvent être décrits par des formules analogues.

Le tourbillon marginal créé par une pale est centré, au départ, sur l'extrémité de la pale.

Il existe des formules approchées (formules de Landgrebe) décrivant le lieu des centres des tourbillons sous le rotor, en fonction des caractéristiques de ce dernier et du temps écoulé depuis le passage de la pale. En fait, plutôt que le temps écoulé, ces formules font apparaître l'angle (Ψ) dont la pale a tourné ($\Psi = \Omega t$).

Dans le plan vertical situé à l'angle Ψ derrière la pale, le centre du tourbillon marginal est situé à la distance r_t de l'axe vertical et à la hauteur H_t sous le plan du rotor :



$$[r_t/R](\Psi) = x_t = A + (1-A) \cdot e^{-\lambda \Psi}$$

$$[H_t/R](\Psi) = h_t = -\frac{1}{4} (C_p/\sigma + 0,001 \theta_v^\circ) \cdot \Psi \quad \text{pour } 0 \leq \Psi \leq 2\pi/n$$

$$= h_t(2\pi/n) - (1 + 0,01 \theta_v^\circ) \cdot [\sqrt{C_p}] \cdot (\Psi - 2\pi/n) \quad \text{pour } \Psi > 2\pi/n$$

$$\text{avec } A = 0,78 \quad \text{et} \quad \lambda = 0,145 + 27 \cdot C_p$$

θ_v° est l'angle de vrillage, en degrés

$$C_p (\text{coefficient de poussée}) = P_a / [\frac{1}{2} \rho \cdot (\Omega R)^2 \cdot \pi R^2] = \sigma \cdot \int_{r_0/R}^1 C_z \cdot x^2 dx$$

En remplaçant Ψ par $\Omega \cdot t$, les formules précédentes permettent, par exemple, de définir la trajectoire d'une particule d'air en fonction du temps, dans un plan fixe passant par l'axe rotor. On remarque alors que la contraction de la veine d'air prend ici la valeur $A = 0,78$ (à comparer à la valeur théorique $1/\sqrt{2} = 0,707$). En fait, A dépend du coefficient de poussée (C_p). On peut adopter la loi de variation approximative suivante :

$$A = 0,5 \cdot \sqrt{2,1 + 28 C_p}$$

Application de la méthode :

L'application détaillée de cette méthode conduit à des calculs assez complexes car les vitesses induites en un point quelconque de l'espace (et pas seulement au niveau d'un élément de pale) sont calculées par sommation des effets induits par l'ensemble des n pales (lignes portantes) et des filaments (nappes tourbillonnaires) issus des pales, en utilisant la loi de Biot et Savart.

Les filaments tourbillonnaires de traînée ont l'aspect d'hélices descendantes sous le rotor dont on peut déterminer la forme en utilisant les formules de Landgrebe par exemple.

Toutefois, les tourbillons étant matériellement entraînés par le vent induit global, leurs centres doivent nécessairement suivre les lignes de flux sous le rotor, lesquelles ne manquent pas d'évoluer lorsqu'on ajoute les vents induits de sillage. Or les trajectoires des tourbillons sont ici données à priori par les formules de Landgrebe (sillage figé). Le calcul complet doit alors s'effectuer par itération en réajustant chaque fois la forme des filaments aux vents induits calculés (sillage équilibré).

L'avantage de la méthode est de prendre en compte en une seule opération tous les effets induits par les tourbillons (traitement commun des tourbillons dus à la ligne portante et à tous les sillages).

Principe du calcul : le calcul précis et complet consiste à appliquer l'analogie des tourbillons à l'ensemble du volume entourant le rotor (3 dimensions), suivant un procédé itératif dont le principe est décrit ci-après :

A partir d'une description initiale des flux (champ des vitesses) dans tout l'espace rotor :

- calculer la distribution de portance le long de la pale (ligne portante) à partir des caractéristiques de la pale et des angles d'attaque résultant des flux connus autour de la pale. En déduire la distribution de la circulation en envergure d'où l'intensité des lanières tourbillonnaires issues de la pale en chaque point.

- déterminer le lieu des centres des tourbillons à partir de la description connue des flux sous le rotor.

- calculer une nouvelle répartition des flux à partir des vitesses induites par la ligne portante (pale) et par les lanières tourbillonnaires ainsi déterminées.

- comparer la nouvelle distribution à l'ancienne. Si les différences sont acceptables arrêter le calcul, sinon le reprendre avec la nouvelle répartition des flux.

Ces calculs sont, bien sûr, effectués à l'aide de méthodes numériques et de calculateurs puissants. Nous ne connaissons pas d'outils capables d'effectuer ces opérations sur PC.

On notera qu'une telle méthode, réalisant le calcul complet des vents induits sous le rotor, se substitue totalement à la méthode des anneaux et à la description des tourbillons de Landgrebe qui peuvent alors servir de point de départ de l'itération.

Perfectionnements : l'assimilation de la pale à une ligne portante s'avère insuffisante lorsqu'on s'intéresse à la distribution des vitesses à faible distance de la pale et notamment au voisinage de l'extrémité des pales. Dans ce cas, on fait appel à la notion de surface portante. La pale est alors découpée en panneaux portant chacun une nappe tourbillonnaire. La distribution et l'intensité des tourbillons dans chaque nappe sont choisies de telle manière que la vitesse résultante (V_∞ + les vitesses induites) à la surface de la pale soit tangente en tous points à cette surface.

On peut également prendre en compte la viscosité de l'air et calculer dans la même opération les forces de traînée de forme (équations de Navier-Stokes).

Compléments

Evolutions des caractéristiques de l'air hors des conditions d'atmosphère standard

Lorsque la température et la pression de l'air s'écartent des conditions normales, il convient de corriger les caractéristiques utilisées en aérodynamiques et qui en dépendent, à savoir : la masse spécifique (ρ) et la viscosité dynamique (μ).

- Masse spécifique (ρ) :

On partira de la formule générale des gaz parfaits :

$$p.V = N.R.T$$

- où N est le nombre de moles du gaz
 V est le volume occupé par le gaz
 p est la pression exercée sur le gaz
 T est la température absolue (en °K)
 R est la constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ SI

En remarquant que le nombre de moles N est égal au quotient de la masse totale de gaz (m) par sa masse molaire (M), on obtient :

$$p.V = R.T.m/M$$

$$\text{soit : } p = \rho.T.R/M$$

Pour un gaz de composition fixe tel que l'air, la quantité R/M est invariable, ce qui entraîne que l'expression $\rho.T/p$ est elle-même constante. Il suffit donc de calculer sa valeur en un état particulier (on prendra l'état défini par $p_0 = 1013$ mbar, $t_0 = 15^\circ$ C, $\rho_0 = 1,225$ kg/m³)

$$\text{D'où } \rho \text{ (kg/m}^3\text{)} = 1,225.(p/1013).[288/(273 + t)] \text{ avec } p \text{ en mbar et } t \text{ en } ^\circ\text{C}$$

- Viscosité :

La viscosité dynamique (μ) d'un gaz dépend principalement de sa température et très peu de sa pression :

On utilisera la loi de Sutherland :

$$\mu(T) / \mu(T_0) = \frac{1 + (C_s/T_0)}{1 + (C_s/T)} \cdot \sqrt{T/T_0}$$

- où $\mu(T)$ est la viscosité dynamique à la température absolue de l'essai : T
 $\mu(T_0)$ est la viscosité dynamique à une température absolue choisie pour référence : T_0 .
 Ainsi, à la température de 273° K, la viscosité dynamique de l'air est $17,33 \cdot 10^{-6}$ Pa.s
 C_s est la constante de Sutherland du gaz considéré : pour l'air, $C_s = 119,4$

La viscosité cinématique (ν) est ensuite obtenue simplement par :

$$\nu = \mu / \rho$$

où (ν) est en m²/s, (μ) en Pa.s et (ρ) en kg/m³

Expression de l'angle α pour les faibles incidences

Lorsque i' tend vers zéro, il peut être intéressant de préciser la loi de variation de α' . Pour cela, on cherchera à exprimer $i' - \alpha'$ sous la forme d'un développement limité en fonction de i'

Posant $u = r / (1 - \phi).A$, puis $x = u.|i'|$, on aura à développer le radical de la relation (13), c'est à dire :

$$(1 + 2x)^{1/2} = 1 + x - x^2/2! + 3.x^3/3! - 15.x^4/4! + \dots$$

$$\text{D'où : } i' - \alpha' = [Sg(i') / u].[u.|i'| - (u.|i'|)^2/2! + 3(u.|i'|)^3/3! - \dots]$$

$$\text{Soit : } i' - \alpha' = \text{Sg}(i') \cdot [|i'| - u \cdot |i'|^2 / 2! + 3u^2 \cdot |i'|^3 / 3! - \dots]$$

Puis, en remarquant que $\text{Sg}(i') \cdot |i'| = i'$

$$\alpha' = \text{Sg}(i') \cdot [u \cdot |i'|^2 / 2! - 3u^2 \cdot |i'|^3 / 3! + \dots]$$

D'où

$$\alpha \sim \text{Sg}(i + \alpha_0) \cdot (\tau / 2 \cdot (1 - \phi) \cdot A) \cdot (i + \alpha_0)^2 - \alpha_0$$

On constate ici que α' varie comme i'^2 pour les faibles incidences (l'approximation n'est valable que pour des angles inférieurs au degré car la quantité $2u \cdot i'$ doit rester bien inférieure à l'unité).

Information complémentaires sur les extrémités des pales

En extrémité de pales, l'absence de carénage (comme dans le cas du Fenestron) fait que les différences de pressions doivent s'équilibrer et les couches sous l'intrados rejoignent celles de l'extrados dans un tourbillon appelé vortex, sorte de tore aérodynamique qui accompagne la périphérie du rotor. A défaut de visualisation, mon appréciation personnelle (via un fil de laine explorateur) est que le diamètre de ce tore est de l'ordre de 10% du diamètre du rotor. Ce vortex crée donc une perte aérodynamique significative affectant au moins la valeur d'une corde en envergure. Sachant qu'à conditions égales par ailleurs, une augmentation du diamètre rotor de la valeur d'une corde provoque un accroissement de poussée de l'ordre de 30%, on imagine facilement qu'il peut y avoir un problème significatif avec le vortex.

D'où l'intérêt des constructeurs sur le sujet et tout hélicoptère moderne se doit d'avoir un dispositif de réduction des pertes approprié. Vu au salon du Bourget et sur divers documents, on peut considérer que tous mettent en commun les moyens suivants :

- une flèche, soit en bord d'attaque seulement, soit également sur bord de fuite
- un dièdre négatif
- un amincissement relatif du profil (et probablement une incidence qui tend vers zéro quand la pale est en conditions de vol)

A titre d'exemple, voici une représentation symbolique des extrémités de pales traitées par Eurocopter (Tigre) et Westland (Lynx) :

