

La partie « Préparation » est à faire à la maison avant le TP.

Vous disposez de 3h15 pour effectuer ce TP. Cela comprend une série de manipulations et l'écriture d'un compte rendu par binôme à rendre en fin de séance.

Ce compte rendu doit être propre, structuré (introduction / dispositif expérimental / analyse des signaux mesurés / Schémas des manipulations / Résultats / conclusion), **complet** (la lecture de votre compte rendu doit suffire à la compréhension du travail réalisé et permettre au lecteur de refaire les expérimentations de façon autonome) **et faire preuve d'un esprit critique et d'analyse** (comparaison des résultats, calculs d'erreurs relatives, explication des erreurs).

Ce travail est noté et contribue à la note de contrôle continu de l'EC.

Contexte

De nombreux systèmes mécaniques ont un comportement naturellement oscillant et peuvent être modélisés par la mise en parallèle ou en série de forces de rappel (ressort), de forces de frottement visqueux. Lorsqu'ils sont excités périodiquement, les oscillations naturelles de ces structures peuvent être amplifiées au point de conduire à la destruction de la structure (voir photo ci-contre). Ce phénomène est appelé résonance mécanique et ce TP a pour objectif de le mettre en évidence et de l'étudier.



Figure 1 : Phénomène de résonance

Dispositif

Le dispositif utilisé dans ce TP est représenté sur la Figure 2. Le système oscillant est un point matériel de masse m (point M) attaché à un ressort (au point B) de raideur k lui-même excité périodiquement via le point A par un moteur dont on peut modifier la vitesse angulaire de rotation. En plus de son propre poids et de la force de rappel élastique du ressort, la masse peut être exposée à une force de frottement si cette dernière est plongée dans un fluide. Les notations x_A' , x_B' et x_M' correspondent aux positions respectives sur l'axe D des points x_A , x_B et x_M à l'équilibre, c'est à dire en l'absence de tout mouvement.

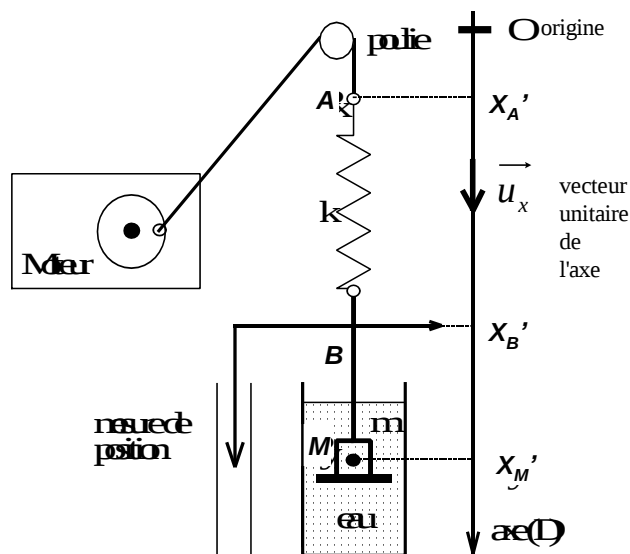


Figure 2 : Illustration de l'oscillateur

La position de la masse est mesurable dans le temps grâce à un dispositif constitué d'une éprouvette contenant une solution de sulfate de cuivre avec des électrodes en cuivre (voir Figure 3). L'électrolyse qui se produit est du type à anode soluble. Il n'y a donc pas création d'une f.e.m. et l'ensemble se comporte comme une résistance pure. La tension entre l'électrode mobile et la masse du circuit est visualisée à l'aide du logiciel synchronie et donne alors une indication linéaire de la position du point B sur l'axe vertical. A l'équilibre cette tension n'est pas nulle.

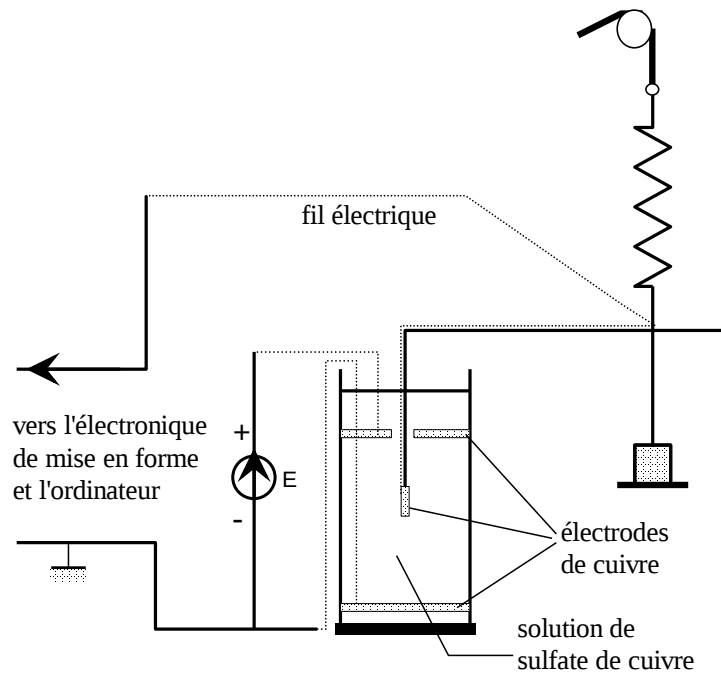


Figure 3 : Dispositif de mesure de déplacement

Préparation (à faire à la maison)

Théorie

1. Donner l'expression des forces s'appliquant au mobile M de masse m : poids, tension du ressort (caractérisée par une raideur k et une longueur à vide l_0), poussée d'Archimède et frottement fluide (proportionnelle à la vitesse relative du mobile par rapport au fluide, caractérisée par un coefficient de frottement μ).
2. Montrer qu'à l'équilibre statique (moteur éteint, mobile à l'équilibre), la relation suivante est obtenue :

$$m = \frac{k}{g} x_B' + C$$

Équation 1

3. Appliquer maintenant le principe fondamental de la dynamique à cette masse et projeter l'équation vectorielle ainsi obtenue. Montrer que ce résultat peut s'exprimer comme une équation différentielle de la coordonnée mesurée x_B .
4. Que devient cette équation lorsque le système est à l'équilibre ? Utiliser ce résultat pour que les termes liés au poids, à la poussée d'Archimède et à la longueur à vide l_0 n'apparaissent plus dans l'équation différentielle précédente.
5. Le système de mesure de déplacement génère une tension électrique en relations affine avec le déplacement du point B de la forme $U = a x_B + b$. Par post-traitement, à l'aide de synchronie, on recale le signal mesuré de façon à ce que la tension visualisée soit nulle lorsque le point est à l'équilibre. Cette tension recalée sera notée $y(t) = a(x_B - x_B')$ représente les oscillations du point B et correspond à la réponse du système. En

remplaçant le ressort par une liaison rigide, le déplacement mesuré du point B nous informe (à une simple translation près) du déplacement du point A. On note alors $x(t)=a(x_A-x_A')$ la tension recalée correspondant au déplacement du point A, (l'excitation du système). Montrer que l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire de la forme :

$$\ddot{y}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 x(t) \quad \text{Équation 2}$$

Expliciter les constantes ω_0 (pulsation propre) et Q le facteur de qualité en fonction de m , k et μ .

On montre qu'une solution de cette équation différentielle peut se décomposer comme la somme d'une solution $y_1(t)$ de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière $y_2(t)$ de l'équation différentielle avec second membre.

Solution de l'équation différentielle sans second membre

Afin de déterminer la solution $y_1(t)$ on recherche les valeurs de r qui permettent à la fonction générale $y_1(t) = A \exp(rt)$ d'être solutions de l'équation différentielle sans second membre. La constante r se détermine donc à l'aide de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré a pour expression :

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Ainsi, en fonction des paramètres physique m , k et μ du problème étudié, deux expressions réelles ou complexes de la variable r sont obtenues. La fonction $y_1(t)$ est donc combinaison linéaire de deux fonctions exponentielles de la forme :

$$y_1(t) = A_1 \exp(r_1 t) + A_2 \exp(r_2 t)$$

Où A_1 et A_2 sont deux constantes d'intégration à déterminer plus tard, en fonction des conditions initiales du problème étudié.

En fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique, la solution précédente peut s'exprimer de différentes manières :

Le régime apériodique

L'équation du second degré admet deux racines réelles négatives si le discriminant est positif, c'est **le régime apériodique** $Q < 1/2$:

$$r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

Dans ce cas la solution est la somme de deux exponentielles décroissantes :

$$y_1(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

Comme r_1 et r_2 sont deux valeurs réelles négatives, la solution est une fonction strictement décroissante. L'amortissement est alors très fort (voir Figure 4).

Le régime pseudo-périodique

Les racines sont imaginaires conjuguées si $\Delta < 0$ ($Q > 1/2$).

C'est le régime **pseudo-périodique**.

$$r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \omega_a \text{ avec } \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La solution est alors de la forme :

$$y_1(t) = C e^{r_1 t} + D e^{r_2 t} = (A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$

On voit qu'il s'agit d'une pseudo fonction périodique amortie de pseudo-pulsation ω_a (voir Figure 4).

La pseudo période a pour expression : $T_a = 2\pi/\omega_a$ supérieure à la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

A l'aide de formules trigonométriques on peut réécrire cette expression de la forme suivante :

$$y_1(t) = \frac{A}{\cos(\varphi)} \cos(\omega_a t + \varphi) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \text{ avec } \tan(\varphi) = -\frac{B}{A} \quad \text{Équation 3}$$

Le régime critique

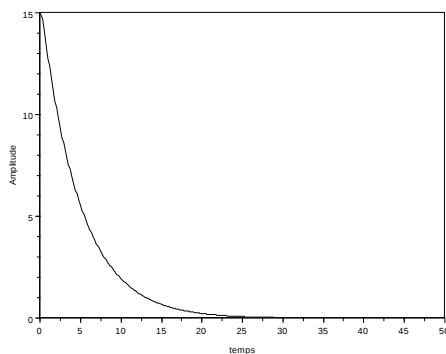
La racine est double si Δ est nul ($Q=1/2$).

Dans ce cas, on montre que la solution est de la forme :

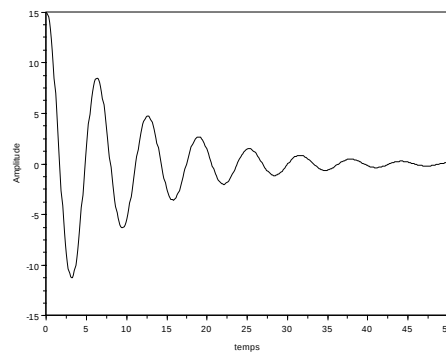
$$y_1(t) = (At + B) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$

C'est **le régime critique**. Il correspond au cas limite apériodique avec un amortissement maximum.

On observe que dans les trois cas, les solutions y_1 tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, on dit alors que le régime permanent est établi.



Le régime apériodique $Q < 1/2$



Le régime pseudo-périodique $Q > 1/2$

Figure 4 : Solutions de l'équation différentielle sans second membre : Illustration des régimes

Solution de l'équation différentielle : Cas du régime transitoire

Le moteur n'est pas en marche : $x_A = x_A'$ ce qui correspond à $x(t)=0$ (le système n'est pas excité).

On considère que pour $t < 0$ le point B (et ainsi la masse m) est maintenu déplacé de sa position d'équilibre (ce qui revient du point de vu du signal mesuré à $y=h \neq 0$) et qu'à $t=0$ ce dernier est relâché sans vitesse, ce qui correspond à $\dot{y}(t=0)=0$. Quand les forces de frottement existent (ce qui est toujours le cas en pratique) et sans application d'une force excitatrice au système, on peut admettre qu'au bout d'un temps suffisamment long, la position du mobile tendra à nouveau vers sa position d'équilibre $y=0$ correspondant au régime permanent.

6. Vérifier que cette solution asymptotique est bien une solution particulière de l'équation différentielle (Équation 2) : $y_2=0$ et donc que $y=y_1$.
7. Sachant que les deux constantes d'intégration peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales du système donner, pour le régime pseudo-périodique (Équation 3), l'expression de la solution théorique de l'équation du mouvement mesuré $y(t)$.
8. Dans le cas du régime pseudo-périodique, la mesure du signal devrait être de la forme suivante illustrée en Figure 5. Afin de faire correspondre la mesure expérimentale à l'interprétation théorique, à l'aide des curseurs, on recale l'origine des temps à l'instant où le mobile est libéré et l'origine d'espace coïncidant au signal asymptotique. On cherche à déterminer expérimentalement le facteur de qualité Q . On utilise pour cela la méthode du décrétement logarithmique. Pour cela, on définit sur l'oscillogramme le temps t_N associé au $N^{\text{ième}}$ maximum relatif des oscillations et y_N l'amplitude du signal associé. Montrer qu'en traçant $Y(N)=\ln(y_1/y_N)$ en fonction de $X(N)=(t_N - t_1)/2$, une droite est censée apparaître et que le coefficient directeur de cette droite correspond au rapport ω_0 / Q .

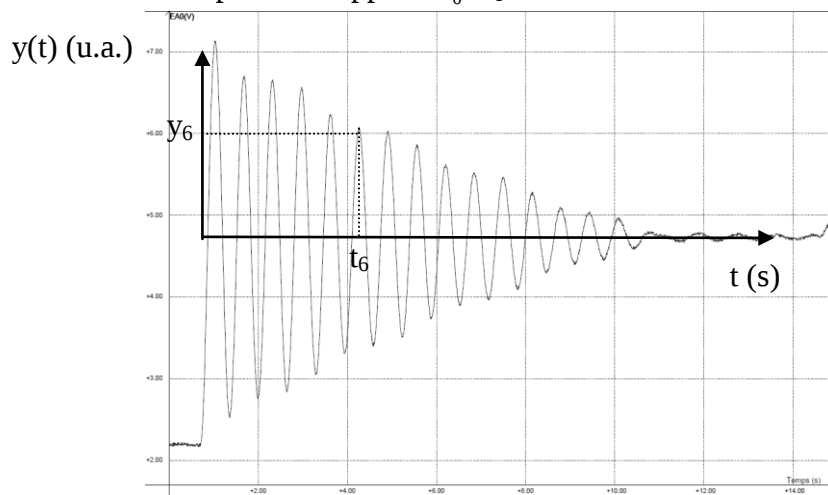


Figure 5 : Application de la méthode du décrétement logarithmique.

Solution de l'équation différentielle : Cas du régime sinusoïdal entretenu (forcé)

On considère maintenant que le moteur est en marche. Le rôle joué par la poulie est de transformer le mouvement de rotation du moteur en un mouvement de translation verticale sinusoïdale :

$$x(t) = X \cos(\omega t) \quad \text{Équation 4}$$

Où X est l'amplitude de l'oscillation et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation de l'excitatrice définie par une fréquence $f=1/T$. Dans la configuration expérimentale du TP, f peut-être modifié, pas X . Pour simplifier les calculs, cette excitation peut-être écrite en notation complexes :

$$\underline{x} = X e^{i\omega t} \text{ avec } x = \text{Re}(\underline{x}) \quad \text{Équation 5}$$

On recherche maintenant en régime permanent établi ($y_1 \rightarrow 0$, vu précédemment) une solution particulière de l'équation différentielle (Équation 2) avec $y=y_2$. On postule que cette solution est également sinusoïdale, de même fréquence que l'excitatrice mais pouvant admettre une amplitude différente ainsi qu'un déphasage par rapport à l'excitatrice. Ce postulat se traduit en notation complexe par:

$$\underline{y} = Y e^{i(\omega t + \varphi)} \text{ avec } y = \text{Re}(\underline{y}) \quad \text{Équation 6}$$

9. Montrer, en conservant la notation complexe, que cette solution particulière vérifie l'équation différentielle et que la relation entre l'excitatrice et la réponse du système peut se définir à l'aide de la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H} = \frac{\underline{y}}{\underline{x}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

10. La norme de la fonction de transfert correspond au rapport de l'amplitude du mobile par celle de l'excitatrice, on parle d'amplification du système. Calculer cette norme.
11. La résonance du système est obtenue lorsque $\omega = \omega_r$ et correspond à l'amplification maximale des oscillations du point M. Par une étude de fonction, montrer que :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{où encore que} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Équation 7}$$

12. Montrer que l'amplification maximale théorique $H_{\max}$ des oscillations à la résonance est :

$$H_{\max} = \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \quad \text{Équation 8}$$

On note que pour $Q \gg 1/2$, $H_{\max} = Q$ d'où l'utilité de l'emploi de ce paramètre. On peut déduire de l'Équation 8 (non demandé) l'expression du coefficient de frottement à l'aide de l'amplitude maximale :

$$\mu = \omega_0 m \sqrt{\frac{2}{H_{\max}^2 + H_{\max} \sqrt{H_{\max}^2 - 1}}} \quad \text{Équation 9}$$

La figure suivante (Figure 6) montre la courbe théorique de la norme de cette fonction de transfert en fonction de la fréquence d'excitation du système et ce pour différentes valeurs du facteur de qualité Q :

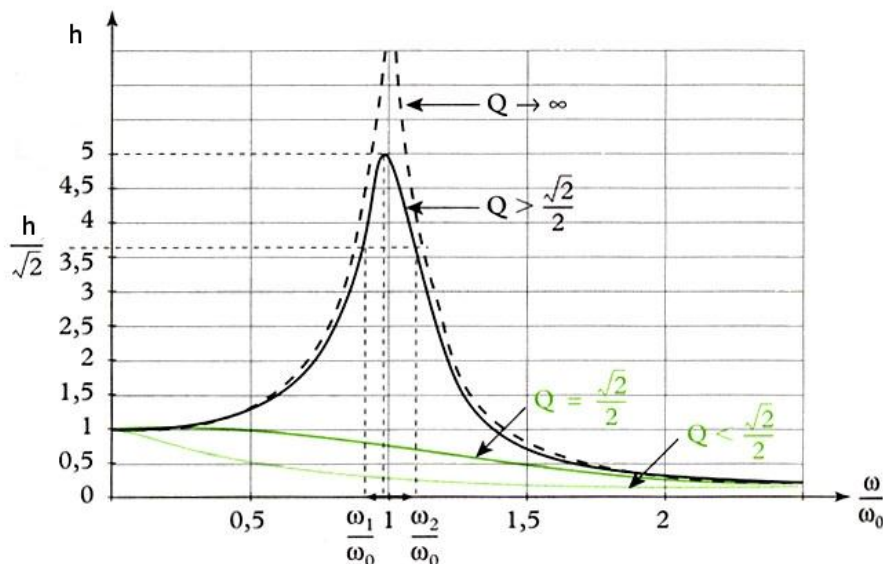


Figure 6 : Cas du régime sinusoïdal entretenu : courbe d'amplification de la réponse du système mécanique en fonction de la fréquence d'excitation.

L'argument de la fonction de transfert permet le calcul du déphasage entre le mouvement de l'excitatrice et celui du mobile. La phase n'étant pas mesurée dans ce TP, on ne la traitera pas.

Manipulations

Les objectifs des manipulations de ce TP sont d'observer la réponse du système à un déplacement du mobile depuis sa position d'équilibre (cas du régime transitoire) puis à une excitation périodique (cas du régime sinusoïdale entretenu) et d'en déduire dans les deux cas le facteur de qualité (et le coefficient de frottement) du mobile dans de l'air puis dans de l'eau.

Système statique

Ouvrir une feuille vierge sous synchronie. Vous disposez de 2 masses de 50g qui s'enfilent sur la tige de l'oscillateur, puis de deux autres masses respectivement de 20 et 50g. On retire le tube à eau de façon à laisser libre une masse initiale de 50g l'oscillateur.

1. Positionner successivement les différentes masses sur le dispositif et mesurer à chaque fois avec la réglette la nouvelle position d'équilibre du ressort x_B' . En traçant sur synchronie la figure $m=f(x_B')$ pour $m= 50, 70, 100, 120, 150$ et 170 g et en faisant une régression linéaire de cette courbe, en déduire d'après l'Équation 1 la raideur du ressort (ne pas oublier son unité). Imprimer cette figure. On en déduira, pour $m=100$ g (les deux masses enfilées à l'extrémité de la tige) la pulsation propre du système ω_0 .

Le régime pseudo-périodique

On ne repositionne pas encore le tube à eau et le moteur reste éteint. On ouvre le fichier synchronie « *Resonance Méca Reg Transitoire.SN2* ».

2. On place les quatre masses de 50 g à l'extrémité du système. On déplace et maintient celle-ci hors de sa position d'équilibre (<8 cm) et procédons au démarrage d'un enregistrement (F10 dans la fenêtre N°1). Quelques instants après on relâche la masse sans vitesse et observons sur l'oscillogramme les oscillations associées au régime transitoire. Imprimez et annotez le chronogramme associé.
3. Utiliser la méthode du décrétement logarithmique proposée à la question 8 de votre préparation. Vous relèverez pour cela les couples t_N et y_N sur l'oscillogramme et les reporterez dans le tableur. Appliquer ensuite le « calcul » en adaptant les valeurs de t_1 et y_1 . Vous effectuerez une modélisation de la figure de la fenêtre N°2. Imprimer et commentez cette figure.
4. Déduire de la modélisation de cette figure le facteur de qualité du système dans l'air et en déduire une évaluation du coefficient de frottement μ (sans oublier son unité).
5. On met maintenant de l'eau dans le tube et reprenons l'expérience. Procéder à un nouvel enregistrement et imprimer le chronogramme. Peut-on appliquer la méthode du décrétement logarithmique ? Si oui que devient le facteur de qualité et le coefficient de frottement ?

Régime sinusoïdal entretenu

Charger le fichier Synchronie « *Régime sinusoïdal entretenu.SN2* ». On conserve les quatre masses ($m=200$ g) plongées dans le tube rempli d'eau. On cherche dans un premier temps à déterminer l'amplitude d'excitation du système X. Pour cela, on remplace le ressort par une ficelle de façon à ce que l'enregistrement des oscillations du point B révèle de l'amplitude l'excitation du système appelée « *AmpliRigide* » sous synchronie. Mettre en marche le moteur à faible vitesse angulaire.

6. Faire une acquisition (F10). On obtient une sinusoïde dont l'amplitude représente l'amplitude de l'excitation X (voir Équation 4 et Équation 5). En mode modélisation (F4), en choisissant le modèle sinusoïde constante, rechercher manuellement de façon approximative les valeurs des coefficients de façon à obtenir une modélisation proche de la mesure. Exécuter le « calcul » de façon à affiner la recherche des paramètres.

Relever la valeur de l'amplitude V_m et reporter la dans la page de calcul, dans le champ « AmpliRigide ».

Dans un second temps, on souhaite mesurer expérimentalement la courbe d'amplification décrite en préparation et représentée en Figure 6. On éteint pour cela le moteur et on remplace la tige rigide par le ressort au bout duquel les deux masses restent plongées dans l'eau. Lorsque le moteur est en marche, après un temps suffisamment long pour que le régime transitoire se soit dissipé, on doit observer à nouveau une sinusoïde. L'amplitude de cette courbe correspond à l'amplitude Y du système excité (voir Équation 6).

7. Après avoir effectué une acquisition et une nouvelle modélisation (F4), relever la fréquence F et l'amplitude V_m correspondante et reportez les dans le tableau, dans les colonnes associées (F et Amplitude). Refaire cette opération pour différentes fréquences du moteur.
8. En exécutant les calculs dans l'onglet « Calcul », la norme de la fonction transfert est établie pour chaque point mesuré : $H=Y/X=\text{Amplitude}/\text{AmpliRigide}$. Cette norme est représentée dans la figure N°2 en fonction de la fréquence du moteur. Si cette courbe ne contient pas assez de points pour une représentation continue de la résonance, revenez à la question précédente de façon à améliorer cette figure. Imprimer et commenter cette courbe.
9. Relever sur cette courbe la fréquence de résonance et l'amplitude maximale associée.
10. Evaluer à partir de la fréquence de résonance (Équation 7) le facteur de qualité Q et en déduire la valeur du coefficient de frottement du mobile dans de l'eau.
11. Calculer à partir de l'amplitude à la résonance et à l'aide de l'Équation 9 une seconde expression de la valeur du coefficient de frottement dans l'eau. Comparer au résultat trouvé à la question précédente. En déduire de ces deux valeurs une valeur moyenne ainsi qu'une incertitude.
12. En reprenant le facteur de qualité trouvé pour le mobile dans l'air (question 4 de la manipulation), calculer quelle devraient-être la fréquence de résonance et l'amplification maximale associée. Aurait-on pu déterminer le facteur Q dans l'air avec le dispositif mis à disposition, en régime sinusoïdal entretenu ?

Synthèse des résultats

Dans cette partie de votre compte rendu, vous devez reprendre de façon synthétique l'ensemble des phénomènes observés ainsi que l'ensemble des résultats. Discuter et comparer les méthodes utilisées et les résultats obtenus. On proposera finalement une valeur du coefficient de raideur du ressort, un coefficient de frottement du mobile dans l'air puis dans l'eau, calculer le rapport entre les deux résultats.

Conclure : que vous a appris ce TP ?