Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le jeudi 20 décembre 2001

Temps d'approche à un point d'équilibre instable

Un corps ponctuel de masse m et de coordonnée cartésienne $x(t)$ se déplace sur l'axe des x. La force $f(x) = -dV/dr$ est conservative, et on notera l'énergie mécanique par E où

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x) \ .$$

Le lieu des points accessibles au mouvement satisfont $V(x) \leq E$ ce qui se représente facilement graphiquement. On suppose que l'origine ($x = 0$) est un point d'équilibre *instable*.

1) Montrer que $dV/dx = 0$ en $x = 0$ et trouver le signe de d^2V/dx^2 en ce point (si cette dérivée seconde existe).

2) On prend pour conditions initiales $x < 0$ et la vitesse $dx/dt > 0$ d'intensité telle que $E = V(0)$. À partir de la conservation de E, écrire l'équation reliant dx à dt.

3) On suppose que $V(x) = -x^2$. En intégrant l'équation différentielle de la question précédente, trouver x en fonction du temps. Commentaire?

4) On considère V dans le voisinage du point $x = 0$; soit γ le nombre réel tel que $V(x) \approx -|x|^\gamma$ pour x très petit. Pour $\gamma < 2$, le corps atteint l'origine en un temps fini! Démontrer ce résultat et donner la loi pour x en fonction de t dans cette approximation. En quoi peut-on dire que la condition $\gamma < 2$ est pathologique et irréaliste?

5) Maintenant, on considère qu'on a en fait un corps de coordonnées polaires $r(t), \theta(t)$ en présence d'une force centrale. En utilisant la conservation du moment cinétique, on peut déterminer le mouvement en r via une correspondance avec un système unidimensionnel. Dans le contexte ci-dessus, on considérera que x doit être identifié avec $r - r_0$, r_0 étant une distance particulière non nulle. Dans le cas $\gamma = 2$, dessiner l'orbite dans le plan qu'effectue ce corps.

Manipulation du Lagrangien

Après réduction à un corps, un système à 2 corps est décrit par le vecteur allant du corps 1 au corps 2; ce vecteur a pour coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$. Le Lagrangien donnant les équation du mouvement pour ces coordonnées est

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] - V(r) \ .$$

Ce système conserve le moment cinétique; algébriquement, cette quantité est

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \ .$$

Cette conservation conduit à la relation $1/2\ m(r\dot{\theta})^2 = \ell^2/2mr^2$. On s'intéresse au mouvement en r. En cours, on est parti de l'énergie mécanique. Supposons qu'à la place on utilise la conservation de ℓ pour éliminer θ et $\dot{\theta}$ dans L. Cette élimination conduit au Lagrangien pour un système unidimensionnel effectif

$$L(r,\dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)\ .$$

Comme $L = T - V$, le potentiel effectif est

$$V_{eff}(r) = -\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

avec un signe moins devant le premier terme, ce qui est différent de l'expression utilisée en cours. Expliquer ce "paradoxe" et s'il y a effectivement une contradiction.

Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le jeudi 20 décembre 2001

L'action d'une chute libre

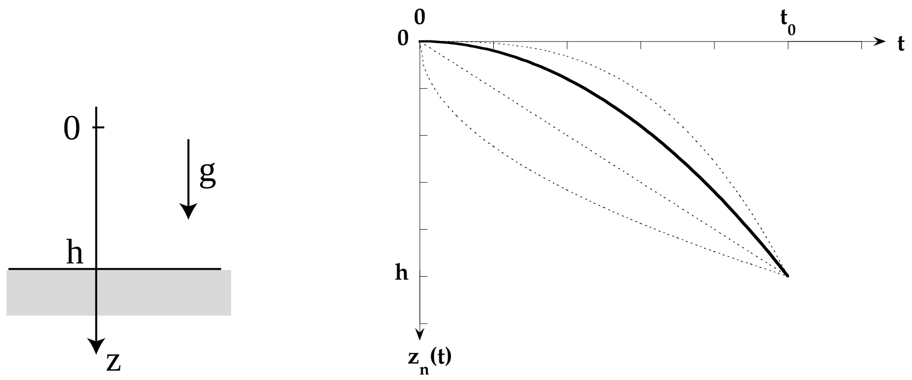


Figure 1: La trajectoire réelle en trait plein (pour n=2), et différentes trajectoires fictives en traits pointillés (pour n=1/2, 1 et 3).

On considère la chute libre de hauteur h d'une particule dans le champ de pesanteur g. Par commodité, l'axe z est orienté vers le bas, de telle sorte que $z(0) = 0$ et $z(t_0) = h$, où t_0 est le temps de chute. On cherche à vérifier que l'intégrale d'action,

$$S = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) dt,$$

est bien extrémale pour la trajectoire réelle connue $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$ de cette chute libre. On va restreindre notre recherche à la classe de trajectoires fictives vérifiant les mêmes conditions aux limites ($z = 0$ à $t = 0$ et $z = h$ à $t = t_0$), et s'écrivant sous la forme

$$z_n(t) = c_n t^n,$$

où c_n est une constante vérifiant ces conditions aux limites (dans le cas $n = 2$, on retrouve la trajectoire réelle avec $c_2 = g/2$).

Calculer l'action S_n associée à la trajectoire $z_n(t)$ et la mettre sous la forme

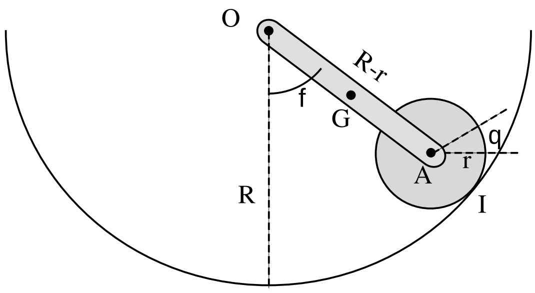
$$S_n = m\sqrt{gh^3}\, f(n),$$

où $f(n)$ est une fonction sans dimension que l'on identifiera. Déterminer une condition sur n pour que l'action soit extrémale, et vérifier que la valeur $n = 2$ satisfait bien cette condition (on ne demande pas d'en trouver d'autre). En déduire que l'action de la trajectoire fictive $z_n(t)$ peut s'écrire au voisinage de la trajectoire réelle $n = 2$ (au second ordre en $n - 2$) :

$$S_n \simeq S_2 + A(n-2)^2.$$

(NB: Il existe une autre valeur de n vérifiant la condition d'extremum : $n = -1 - 2^{1/3} - 2^{2/3} \simeq -3,847$. Qu'en pensez-vous ?)

Pendule roulant



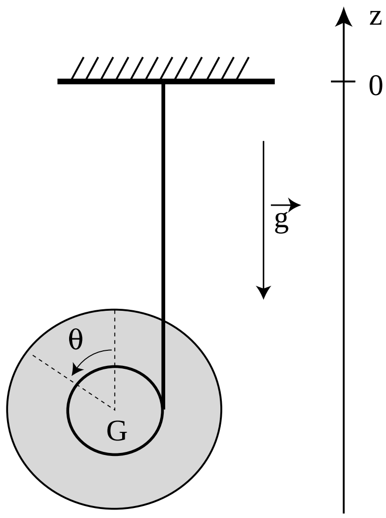
Calculer la période des petites oscillations du système mécanique représenté sur la figure ci-dessus. Un disque, de masse m et de rayon $AI = r$, roule sans glisser à la surface intérieure d'un support circulaire de rayon R (I est le point de contact disque-support). Ce disque est relié au centre O du cercle par une tige, de masse M et de longueur $OA = 2OG = R - r$.

Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2002/03**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le mercredi 30 octobre 2002

Exercice 1 : Retour sur le yo-yo



On lâche un yoyo, de masse m et de moment d'inertie I, dont l'extrémité du fil est fixe. Le fil (que l'on suppose toujours vertical) s'enroule autour du moyeu de rayon R. On repère le yoyo par l'altitude z de son centre de masse G.

a) A partir du principe de la dynamique, exprimer la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur le yoyo.

b) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à G, écrire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

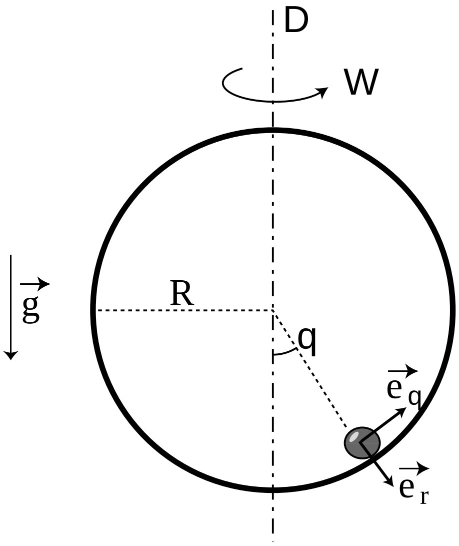
c) Montrer que le mouvement est uniformément accéléré, et exprimer l'accélération apparente g' en fonction de g et du rapport I/mR^2. En déduire la valeur de ce rapport si le yo-yo chute de 1 m en 3,5 s.

d) Décrire qualitativement le mouvement si l'épaisseur du fil conduit à une augmentation du rayon du moyeu au fur et à mesure de l'enroulement.

Exercice 2 : le pendule tournant

Une bille de masse m est placée dans un rail circulaire de rayon R dans le plan vertical, où elle peut glisser sans frottement. On note θ l'angle que fait la bille avec la verticale. Ce rail tourne autour d'un axe vertical Δ passant par le centre à une vitesse angulaire constante Ω fixée par l'expérimentateur.

a) On se place dans un premier temps en l'absence de rotation du rail ($\Omega = 0$). Le système est-il holonôme, rhéonôme, scléronôme ? Donner l'expression pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V. En déduire le lagrangien et l'équation différentielle régissant l'angle θ.



b) Pour résoudre cette équation, on se place dans le cas d'un angle θ très petit. On peut alors faire un développement limité autour de $\theta \simeq 0$: $\sin\theta \simeq \theta + \ldots$ Identifier la pulsation propre ω_0 de l'oscillation. Résoudre dans ce cas l'équation du mouvement, si on lâche la bille sans vitesse initiale d'un angle θ_0.

c) On met maintenant le rail en rotation à vitesse angulaire constante Ω. Le système est-il holonôme, rhéonôme, scléronôme ? Rappeler ce qu'est un déplacement virtuel et le principe de d'Alembert. On notera $\vec{F}^{(a)}$ les forces autres que celles de contrainte, et par $\vec{\gamma}$ l'accélération (dans le référenciel du laboratoire). En déduire la relation que satisfait θ en un point d'équilibre "dynamique", c'est-à-dire quand $\theta(t) = \theta_{eq}\ \forall t$. (N.B.: pour cela, il vous faut déterminer l'accélération de la bille dont le mouvement est circulaire uniforme.) Trouver intuitivement, sans calcul, les angles d'équilibre pour Ω très faible et Ω très élevé.

d) Résoudre la relation dérivée ci dessus pour les différents angles d'équilibre de la bille θ_{eq}. Donner l'allure de la courbe $\theta_{eq} = f(\Omega)$.

e) On s'interesse à la transition à $\Omega = \omega_0$ entre l'angle d'équilibre $\theta_{eq} = 0$ (pour $\Omega < \omega_0$) et $\theta_{eq} \neq 0$ (pour $\Omega > \omega_0$). Pour une rotation Ω légèrement supérieure à la pulsation propre ω_0, on pourra poser $\Delta\omega = \Omega - \omega_0$. On a dans ce cas $\theta_{eq} \simeq 0$. Montrer à l'aide d'un développement limité de la relation $\theta_{eq} = f(\Omega)$ que l'on peut écrire
$$\theta_{eq} \sim \sqrt{\Delta\omega}.$$

f) Dans les questions qui suivent, on considère les oscillations autour des points d'équilibre dynamique. Il faut donc les équations du mouvement. Plutôt que de partir du principe de D'Alembert qui exige l'expression de l'accélération, utilisons le formalisme de Lagrange. Donner l'expression de l'énergie cinétique T et du lagrangien. En déduire l'équation différentielle régissant l'angle θ.

g) Étudier, en fonction de Ω, la stabilité du point d'équilibre $\theta_{eq} = 0$. (On linéarisera l'équation du mouvement autour de $\theta = 0$.)

h) Même question pour le point d'équilibre dynamique $\theta_{eq} \neq 0$. (On linéarisera l'équation du mouvement autour de $\theta = \theta_{eq}$.)

Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2002/03**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le mercredi 8 janvier 2003

Exercice 1 : Rutherford et la structure de l'atome

Avant Rutherford, l'atome était conçu comme une boule homogène. Son expérience montra au contraire que les atomes sont très inhomogènes et en particulier que leurs charges positives sont concentrées en des petits grains (les noyaux).

Dans le référentiel du laboratoire, on a une cible immobile formée d'atomes lourds (de l'or). On envoit un faisceau de particules α (noyaux d'hélium) sur cette cible. La masse des électrons étant plusieurs milliers de fois plus faibles que celle des noyaux, on les néglige. On va modéliser l'effet d'un noyau d'or (de masse M) sur la trajectoire d'une particule α (de masse m). On supposera ces corps ponctuels.

a) *Généralités* – La force de Coulomb entre les deux particules est répulsive et varie en $1/r^2$, $|\vec{F}| = K/r^2$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $V(r)$ quand on on impose $V(r = \infty) = 0$. Spécifier quelles sont les grandeurs conservées lors du mouvement. Pourquoi et comment peut-on ramener ce système à un problème à un corps; donner la masse réduite μ associée.

b) *Repère du centre de masse* – Dans tout repère galiléen lié au centre de masse G, montrer que le mouvement est plan. Dans ce plan, on définit θ l'angle que fait le vecteur $\vec{r}_{12}$ (allant du corps 1 au corps 2) avec l'axe des x. On notera dans la suite $r = |\vec{r}_{12}|$. Donner l'expression du Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ en fonction de μ, de r, θ, $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$. On appelle $\vec{J}$ le moment cinétique par rapport à G. $\vec{J}$ peut s'exprimer en fonction de m, M, etc… Démontrer qu'on a bien $\vec{J} = \vec{r}_{12} \wedge \mu\dot{\vec{r}}_{12}$. On pose pour la suite $\vec{J} = \ell\vec{u}_z$.

c) *L'orbite* – Ecrire les équations différentielles couplées du mouvement pour r et θ. Eliminer $\dot{\theta}$ au profit de ℓ, poser $u = 1/r$, et déduire l'équation différentielle pour u fonction de θ. Résoudre cette équation. Quelle est la nature de la courbe $r(\theta)$?

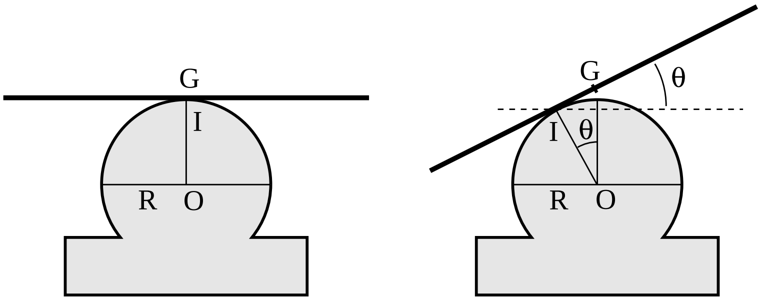
d) *Un peu de géométrie* – On se donne comme condition initiale à $t \to -\infty$ $r \to \infty$, $\theta \to \pi$ et $\dot{\vec{r}}_{12} \to -v\vec{u}_x$. La droite portant $\dot{\vec{r}}_{12}$ dans cette limite est à la distance b (appelé paramètre d'impact) de l'axe des x. Exprimer ℓ en fonction de ces données. Faire un dessin de la courbe $r(\theta)$ et discuter avec soin sa nature quand $t \to +\infty$. Quelle relation trouvez vous pour l'angle des deux droites délimitant le mouvement à $t = \pm\infty$?

Exercice 2 : Planche à bascule

Une planche homogène d'épaisseur négligeable, de longueur ℓ et de masse m est placée sur un cylindre de rayon R et fixé à l'horizontal (voir la figure). Quand la planche est horizontale, c'est son centre de masse G qui est en contact avec le cylindre.

La planche roule sans glisser sur ce cylindre et ainsi l'énergie mécanique est conservée. La planche est soumise à la force de pesanteur (qui passe par G) et à la réaction du cylindre. Comme on suppose que la planche reste en contact sans glisser, $\theta(t)$ spécifie entièrement l'évolution du système.

a) *Etude de l'énergie potentielle* – Calculer la hauteur du point G en fonction de θ. (On prendra pour origine O le centre du cercle sur la figure et on remarquera que G n'est pas à la verticale de O si $\theta \neq 0$.) Bien détailler le calcul en utilisant la condition de roulement sans glissement. En déduire l'énergie potentielle $V(\theta)$. Tracer $V(\theta)$ pour $-\infty < \theta < \infty$. (Si la planche était infiniment longue



et restait toujours en contact avec le cylindre, ceci aurait en sens physique; dans la pratique, on se limitera à $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.) Quels sont les points d'équilibres ? Donner leur stabilité.

b) *Expression de l'énergie cinétique* – Soit I le point de contact planche - cylindre indiqué sur la figure. Montrer par un raisonnement limpide que l'énergie cinétique T de la planche est donnée par

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2$$

où $\mathcal{I}$ est le moment d'inertie de la planche par rapport au point I et $\dot{\theta} = d\theta/dt$. Calculer les longueurs de la planche de part et d'autre de I ; en déduire $\mathcal{I}$ en fonction de θ, R, m et ℓ.

c) Petites oscillations – Donner le Lagrangien du système et l'équation différentielle que satisfait $\theta(t)$. On fait maintenant l'approximation des petites oscillations. Décrire le mouvement dans cette limite, et donner sa période.

d) Oscillations non harmoniques– Le mouvement d'un oscillateur harmonique est "pur", $x(t) = a\sin(\omega t+\phi)$. C'est comme une corde vibrante avec une seule fréquence. Ici on s'intéresse à des oscillations d'amplitudes non infinitesimales qui donnent lieu à plusieurs harmoniques. En partant du Lagrangien (et en s'aidant si nécessaire d'un dessin pour $V(\theta)$), montrer que si l'énergie cinétique est suffisamment faible, alors le mouvement est périodique. Soit T cette périod, $\theta(t+T) = \theta(t)$. Le théorème de Fourier montre qu'on peut représenter cette fonction par une série

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t + \phi_n)$$

On prend l'origine des temps pour que $t = 0$ corresponde à $\theta = 0$. Montrer (on pensera en particulier aux symétries du système) que $\phi_n = 0$ et aussi que $A_n = 0$ pour n pair. L'utilisation de cette série est un peu fastidieuse mais nécessaire si on veut étudier le mouvement non harmonique. On se contente ici de considérer le principe du calcul.

(1) Supposons A_1 donné; expliquer physiquement pourquoi il est alors possible de déterminer T ainsi que tous les autres A_n. Inversement, si T est donné, les A_n sont-ils déterminés?

(2) Si $A_1 \to 0$, pourquoi $A_n/A_1 \to 0$ pour tout $n \neq 1$?

(3) On écrit les équations du mouvement en utilisant la décomposition de Fourier de θ. Comment proposeriez-vous de déterminer tous les A_n étant donné T ?

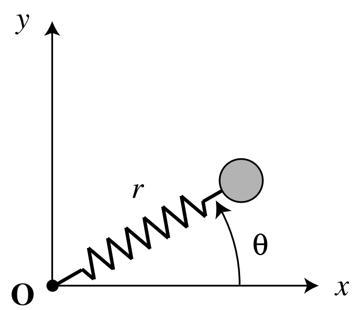
Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2003/04**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le mercredi 29 octobre 2003

Exercice 1 : L'oscillateur tournant libre

Une bille de masse m, considérée comme ponctuelle, est fixée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de coefficient de raideur k. On repère la position de cette bille par sa distance r au point O et par l'angle θ qu'elle fait avec l'axe Ox. La bille est astreinte à rester dans le plan horizontal (x, y), et son poids (selon z) n'intervient donc pas.



1. Calculer le moment cinétique $\vec{J_0}$ de la bille par rapport à O, et montrer qu'il est constant.
2. Montrer que l'énergie mécanique de ce système peut s'écrire sous la forme
$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$
où l'on exprimera l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction de J_0, m, k, l_0 et r. A-t-on conservation de l'énergie mécanique dans ce problème ? Tracer l'allure de $V_{\text{eff}}(r)$, et préciser graphiquement la distance d'équilibre r_{eq} et sa stabilité.
3. On s'intéresse aux trajectoires lorsque la bille est envoyée d'une distance initiale r_i ($\theta_i = 0$), avec une vitesse initiale v_i perpendiculaire à l'axe du ressort. Calculer le moment cinétique J_0 en fontion de m, v_i et r_i. Montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire
$$\ddot{r} = \frac{r_i^2 v_i^2}{r^3} - \omega_0^2(r - l_0), \tag{1}$$
où l'on a introduit la pulsation propre ω_0.
4. On se place ici dans l'approximation d'un ressort de longueur à vide nulle, $l_0 = 0$. A partir du Principe Fondamental de la Dynamique projeté dans le repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, montrer que chaque composante (x, y) du vecteur position $\vec{r}(t)$ constitue un oscillateur harmonique indépendant. En déduire que la trajectoire est une ellipse de centre O, dont on déterminera la valeur des demi-axes a et b en fonction de ω_0 et des conditions initiales (r_i, v_i).
5. Toujours pour $l_0 = 0$, exprimer l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction uniquement de k, a, b et r, ainsi que l'énergie totale E_0 en fonction de k, a et b uniquement. Montrer que l'on peut exprimer le rayon d'équilibre r_{eq} en fonction de a et b uniquement. Tracer $V_{\text{eff}}(r)$, et indiquer graphiquement le domaine de distance r accessible à la bille pour une énergie E_0 donnée. Montrer que les bornes de ce domaine correspondent aux demi-axes a et b de l'ellipse.

6. On reprend l'équation générale du mouvement (1), sans faire l'approximation $l_0 = 0$. On se place dans l'approximation des faibles oscillations autour de la position d'équilibre r_{eq}, et on pose $r(t) = r_{eq} + \epsilon(t)$, avec $\epsilon(t) \ll r_{eq}$.

   Linéariser l'équation du mouvement par rapport à ϵ/r_{eq}, et montrer que l'équation différentielle pour ϵ se ramène à :
$$\ddot{\epsilon} + \omega^2 \epsilon = 0,$$
   où l'on identifiera ω en fonction de ω_0, l_0 et r_{eq}.

7. Intégrer cette équation, et tracer l'allure des trajectoires pour des conditions initiales $(r_i = l_0, v_i)$ avec $v_i \ll \omega_0 l_0$.

Exercice 2 : L'oscillateur tournant forcé

On considère le même système que précédemment, mais cette fois-ci la vitesse angulaire de rotation de la bille autour de O est imposée par l'extérieur : $\theta = \Omega t$, avec $\Omega =$ cste. On admet que le ressort reste rigide selon son axe, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se courber latéralement. On se place dans cet exercice dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié à l'axe du ressort.

1. Faire le bilan des forces agissant sur la bille dans $\mathcal{R}'$, et écrire le Principe Fondamental de la Dynamique selon $\vec{e}_r$ dans ce référentiel sous la forme
$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr},$$
   où l'on explicitera l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ (différente de celle de l'exercice précédent). Tracer l'allure de $V_{\text{eff}}(r)$ dans les cas $\Omega < \omega_0$, $\Omega = \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$, où ω_0 est la pulsation propre du ressort en l'absence de rotation.

2. Déterminer la position d'équilibre de la bille r_{eq}, lorsqu'il y en a une, en fonction de l_0, ω_0 et Ω, et discuter sa stabilité. Donner l'allure de la courbe r_{eq} en fonction de Ω.

3. Montrer que la distance r vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{r} + (\omega_0^2 - \Omega^2) r = \omega_0^2 l_0.$$
   Pour de faibles vitesses angulaires Ω, montrer que la bille oscille autour de sa position d'équilibre r_{eq} avec une pulsation ω que l'on déterminera. Tracer l'allure de la trajectoire de la bille dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, dans le cas $\Omega = \omega_0/3$.

4. Déterminer la loi $r(t)$ pour $\Omega = \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$ lorsque la bille est lâchée à $r(0) = l_0$ sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Tracer l'allure de la trajectoire de la bille dans le référentiel du laboratoire dans ces deux cas.

5. On se replace dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Le moment cinétique et l'énergie mécanique de la bille sont-ils conservés ? Expliquer qualitativement pourquoi, et comparer avec le cas de l'exercice 1.

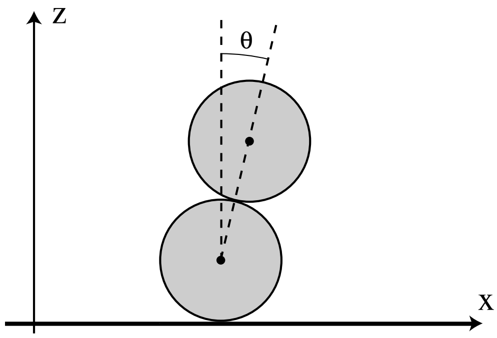
Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2003/04**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le mercredi 7 janvier 2004

Problème 1 : Chute de billes

Deux sphères uniformes parfaitement lisses, de rayon R et de masse m, sont posées l'une sur l'autre sur un plan horizontal. Elles peuvent glisser l'une sur l'autre et sur le plan sans frottement. Dans sa chute, la bille du haut va mettre en mouvement celle du bas. On se restreint à une étude dans le plan vertical de la chute.



1. Montrer que si chaque bille a initialement son vecteur instantané de rotation nul, $\vec{\Omega}_{1,2} = \vec{0}$, alors il le reste à tout temps.

2. On travaille dans le cas $\vec{\Omega}_{1,2} = \vec{0}$. Ecrire le Lagrangien de ce système, en utilisant comme coordonnées généralisées la position x de la bille inférieure et l'angle θ que fait la bille supérieure avec la verticale passant par la bille inférieure.

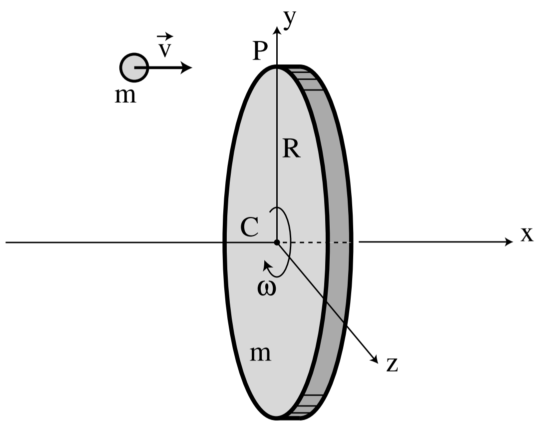
3. Ecrire le système d'équations différentielles du mouvement ; déterminer $\theta(t)$ au tout début de la chute, pour $\theta \simeq 0$. Comparer le temps caractéristique de chute avec celui obtenu dans le cas où la bille du bas est fixée au sol. Interprétation ?

4. Qualitativement, que se passe-t-il maintenant si les billes roulent sans glisser ?

Problème 2 : Collision avec un disque tournant

Un disque fin homogène, de centre C, de masse m et de rayon R, tourne autour de l'axe x à vitesse angulaire ω. Une masse ponctuelle, de même masse m et de vitesse initiale v selon x, entre en collision avec le disque au point P, à la périphérie du disque. On suppose que la collision est parfaitement inélastique, c'est-à-dire que la particule vient se coller au disque et y reste attachée. On s'intéresse au mouvement de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ après l'impact.

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le référentiel lié au disque, et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel fixe galiléen. Avant la collision, l'axe $\vec{e}_1$ coincide avec l'axe $\vec{e}_x$. Au moment précis de l'impact, les axes $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ coincident avec $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On ne considère pas la gravité dans ce problème. Les quantités après l'impact seront notées avec un prime '.



1. Calculer la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse du système, et représenter le système avant l'impact dans ce référentiel du centre de masse. Décrire qualitativement quel serait le mouvement de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ après l'impact en l'absence de rotation initiale du disque.

2. On se place dans le référentiel du centre de masse G de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$. En raisonnant sur la conservation du moment cinétique par rapport à G lors de l'impact, déterminer le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}'$ de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ juste après l'impact en fonction de ω et v/R. Représenter la direction de l'axe instantané de rotation dans les cas $\omega R/v$ faible ou élevé.

3. Calculer la variation d'énergie cinétique dissipée lors de la collision dans le référentiel du centre de masse, et interpréter.

Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le vendredi 29 octobre 2004

La physique du yoyo

On cherche à calculer la vitesse de descente d'un yoyo lâché sans vitesse initiale du point $z = 0$. Ce yoyo, de masse m, est constitué d'un grand cyclindre extérieur, de rayon R, et d'un petit cylindre intérieur (le moyeu), de rayon r_0, autour duquel s'enroule le fil de longueur L. On repère la position du yoyo par rapport à la hauteur de son centre de masse z, avec $0 \leq z \leq L$ (l'axe z est dirigé vers le bas ici), et son orientation par l'angle θ (on a $\dot{\theta} < 0$ lors de la descente). On suppose que le fil ainsi que la trajectoire du yoyo restent toujours verticaux. Dans la première partie, on néglige l'épaisseur du fil, tandis que dans la seconde on s'intéresse à l'influence de cette épaisseur sur la vitesse de descente.

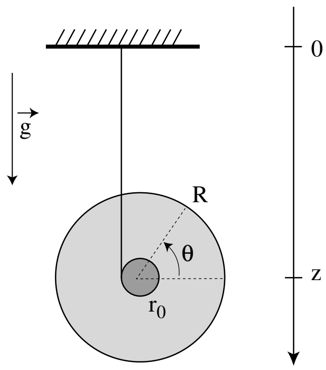


Figure 1: Schéma du yoyo avec un fil fin.

1. Cas du fil d'épaisseur nulle

1. Faites un bilan des forces s'appliquant sur le yoyo lors de sa descente, et représentez-les sur une figure. L'énergie est-elle conservée dans ce problème ? et le moment cinétique du yoyo par rapport à son centre de masse ? Justifiez soigneusement vos réponses.
2. On considère que le rayon du moyeu r_0 est suffisamment petit pour que le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de rotation soit simplement celui d'un cylindre de rayon R. Calculer I en fonction de m et de R (on détaillera le calcul de l'intégrale).
3. Calculer l'énergie mécanique en fonction de z, $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$ et des paramètres du problème. En explicitant la relation géométrique entre z et θ, exprimer cette énergie en fonction de z et $\dot{z}$ uniquement (sans faire intervenir $\dot{\theta}$).
4. Calculer l'énergie mécanique à l'instant $t = 0$, en $z = 0$, et en déduire que la vitesse verticale est donnée par
$$\dot{z} = \sqrt{2gz}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2}. \quad (1)$$
Comparer cette expression à celle que l'on obtiendrait pour la chute libre d'une masse ponctuelle, et interpréter. Représenter sur un même graphique l'allure de $\dot{z}$ en fonction de z pour une chute libre, et pour un yoyo tel que $R = 4r_0$.

5. Intégrer l'équation différentielle (1), et calculer le temps de chute T_c. Application numérique : $r_0 = 0,5$ cm, $R = 2$ cm, $L = 80$ cm. Comparer T_c au temps de chute libre d'une masse ponctuelle sur une même hauteur.

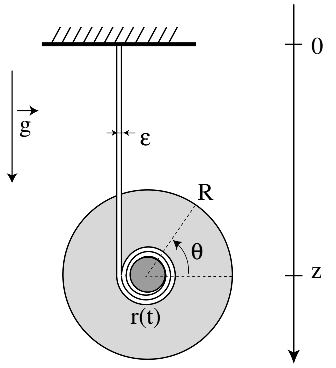


Figure 2: Schéma du yoyo avec un fil d'épaisseur ϵ.

2. Cas du fil d'épaisseur non nulle

On considère maintenant que le fil a une certaine épaisseur ϵ non nulle (figure 2). Le fil s'enroule donc maintenant autour d'un moyeu central dont le rayon $r(t)$ dépend du nombre de tours n du fil autour du moyeu. On néglige la masse du fil, et on considère donc que le moment d'inertie du yoyo est le même que dans le cas $\epsilon = 0$.

1. En exprimant le nombre de tours n en fonction de θ, montrer que le rayon d'enroulement peut s'écrire

$$r(\theta) = r_0 + \frac{\epsilon}{2\pi}\theta$$

(on considère pour simplifier que ce rayon varie continûment lorsque θ varie). Dans cette équation, l'origine $\theta = 0$ est prise lorsque le fil est entièrement déroulé, pour $z = L$.

2. En utilisant la condition d'enroulement reliant $\dot{z}$ à $\dot{\theta}$, exprimer dz en fonction de $d\theta$, et en déduire la relation différentielle

$$r\,dr = -\frac{\epsilon}{2\pi}dz.$$

3. Intégrer cette équation, en utilisant le fait qu'à la fin de la descente du yoyo, on a $r = r_0$ et $z = L$. En reprenant l'expression de l'énergie totale de la question 1.3, en déduire la vitesse verticale de chute sous la forme

$$\dot{z} = \sqrt{2gz}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_0^2 + \frac{\epsilon}{\pi}(L-z)}\right]^{-1/2}. \quad (2)$$

4. Comparer la vitesse initiale (pour $z = 0$) et la vitesse finale (pour $z = L$) avec celles du yoyo avec un fil d'épaisseur nulle. Comment l'épaisseur non nulle du fil change-t-elle la vitesse au cours de la descente, pour $0 < z < L$? Représenter qualitativement sur un même graphique l'allure de la vitesse en fonction de z pour $\epsilon = 0$ et $\epsilon \neq 0$.

5. On ne sait pas intégrer l'équation (2) pour calculer le temps de chute lorsque $\epsilon \neq 0$. On peut cependant faire un calcul approximatif, en remplaçant dans le crochet la hauteur instantanée z par la hauteur moyenne $z = L/2$. Que vaudrait dans ce cas le temps de chute T_c', avec une épaisseur de fil $\epsilon = 0.5$ mm ? Quelle épaisseur de fil permet la chute la plus lente possible ?

Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le vendredi 17 décembre 2004

Pendule simple et pendules couplés

I - Approche Newtonienne de deux pendules identiques couplés

On considère deux pendules identiques, chacun étant constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige sans masse de longueur l, et astreints à osciller dans un plan vertical. On repère par θ_1 et θ_2 l'angle des 2 pendules. Les deux masses sont reliées par un ressort sans masse, de raideur k (voir figure 1), dont la longueur à vide est égale à la distance entre les deux masses lorsque $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Dans tout le problème, on se place dans l'approximation des petites oscillations.

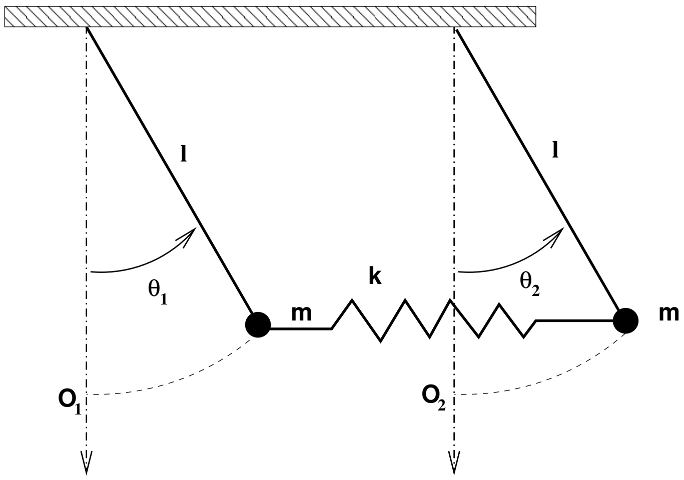


Figure 1: Deux pendules de masse m et de longueur l couplés par un ressort de raideur k.

1- A partir du principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles pour θ_1 et θ_2.

2- On introduit les deux coordonnées généralisées $X = \theta_1 + \theta_2$ et $Y = \theta_1 - \theta_2$. Montrer que les équations du mouvement pour X et Y correspondent à celles de deux oscillateurs harmoniques, dont on précisera les pulsations propres ω_0 et $\omega_c > \omega_0$ correspondantes.

3- A quoi correspond le mouvement tel que $Y = 0$ (faire un dessin) ? De même pour $X = 0$ (faire un dessin) ? Interpréter le fait que $\omega_c > \omega_0$.

II - Approche Lagrangienne de deux pendules couplés

On se place toujours dans l'approximation des petits angles et on étudie maintenant deux pendules de longueur différente l_1 et l_2, avec deux masses différentes m_1 et m_2, couplés par un ressort de raideur k (voir figure 2). Ici encore la position de repos du ressort correspond à $\theta_1 = 0 = \theta_2$.

1- Ecrire l'expression de l'énergie cinétique T du système en fonction de θ_1 et θ_2 et des données du problème.

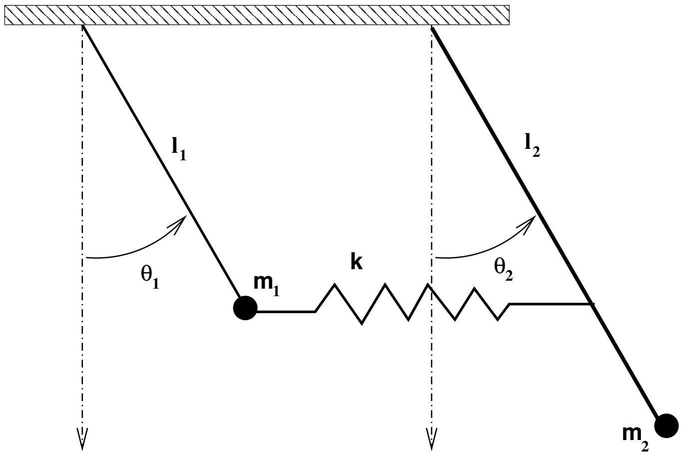


Figure 2: Deux pendules couplés par un ressort de raideur k avec deux masses m_1, m_2 et deux tiges sans masse de longueur l_1, l_2.

2- La présence du ressort induit un couplage mécanique entre les deux pendules de la forme

$$V_R = \frac{1}{2}\alpha(\theta_1 - \theta_2)^2$$

où α est une grandeur physique proportionnelle à la raideur k du ressort. Quel est le signe de α ?

Ecrire l'expression de l'énergie potentielle totale (on choisira la valeur de la constante arbitraire de telle sorte que $V(\theta_1 = 0 = \theta_2) = 0$), et en déduire l'expression d'un Lagrangien du système. Par analogie avec le I, combien de pulsations s'attend-on à trouver autour de la position d'équilibre ? Ces pulsations sont appelées *pulsations propres*, notées ω_{P1} et ω_{P2}.

3- On s'intéresse aux petites oscillations autour de la position d'équilibre. On essaie d'imaginer ce que devient le système mécanique dans les deux cas extrêmes où $\alpha \longrightarrow 0$ et $\alpha \longrightarrow \infty$

a) On suppose que $\alpha \longrightarrow 0$. Vers quel système physique tend le système considéré ? Quelles sont les valeurs des pulsations propres ω_{P1} et ω_{P2} ?

b) On suppose que $\alpha \longrightarrow \infty$. Donner une interprétation physique de cette hypothèse et décrire le système limite par une phrase et un dessin. Que pensez-vous du nombre de degrés de liberté du système lors du passage à cette limite ?

4- On considère un pendule composé d'une tige de masse négligeable, portant deux masses m_1 et m_2, comme le montre la figure 3.

Ecrire, toujours dans l'approximation des petites oscillations, le Lagrangien de ce système, et calculer sa pulsation propre ω' en fonction de $g,\ m_1,\ m_2,\ l_1$ et l_2.

Montrer que $\omega_{P2} < \omega' < \omega_{P1}$, et interpréter d'après le système étudié précédemment.

5- On revient à un couplage α quelconque.

a) Ecrire les équations du mouvement dérivant du Lagrangien obtenu en II-2. En introduisant dans ces équations des solutions de la forme

$$\theta_1(t) = A_1 e^{i\omega t},\ \theta_2(t) = A_2 e^{i\omega t},$$

écrire le système d'équations obtenues sous la forme matricielle

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

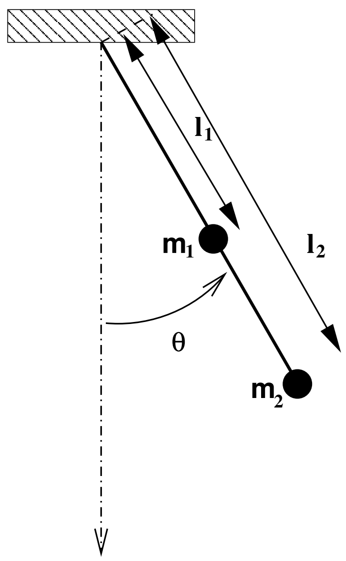


Figure 3: Pendule pesant avec deux masses m_1 et m_2 placées sur une tige sans masse à deux longueurs l_1 et l_2.

où $\mathcal{M}$ est une matrice 2×2 que l'on exprimera en fonction des données du problème.

b) Pour obtenir les pulsations propres de ce système, on cherche des solutions non nulles, c'est-à-dire telles que $(A_1 \quad A_2) \neq (0 \quad 0)$. Pour que ce système admette de telles solutions non nulles, il faut que le déterminant de $\mathcal{M}$ soit nul. En déduire que $\lambda = \omega^2$ vérifie l'équation du second degré :

$$a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0, \tag{1}$$

où l'on a posé :

$$a = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2, \quad b_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 g(l_1 + l_2), \tag{2}$$

$$b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2, \quad c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 g^2, \quad c_1 = (m_1 l_1 + m_2 l_2)g. \tag{3}$$

c) Calculer les racines λ_1^0 et λ_2^0 de l'équation (1) pour $\alpha = 0$ (on supposera que $\lambda_2^0 < \lambda_1^0$). Commenter ce résultat en termes d'études précédentes.

d) On souhaite accéder à la connaissance du comportement des solutions $\lambda_1(\alpha)$ et $\lambda_2(\alpha)$ pour α quelconque de façon graphique. On travaille dans le plan (α, λ). L'équation (1) est une conique dans ce plan. Préciser la région physiquement acceptable du plan. Montrer que la conique possède deux asymptotes, dont une horizontale et une oblique (les courbes $\lambda(\alpha)$ sont donc des branches d'hyperbole). Comment varient ω_{P1} et ω_{P2} quand on rigidifie progressivement le système en augmentant la raideur du ressort ?