UNIVERSITE DE BOURGOGNE **Année 2010-2011**
U.F.R. Sciences et Techniques 24 janvier 2011
Licence 2^e année - Mention Science de la matière

EPREUVE :
Electromagnétisme - P_3

Durée : 2h00 — Documents et calculatrice non autorisés

I Magnétostatique.

Un câble coaxial **infini** de génératrice $\overrightarrow{Oz}$ est composé d'une âme métalique (*cylindre conducteur parfait*) de rayon a situé à l'intérieur d'un deuxième cylindre coaxial au premier creux de rayon intérieur b tel que $b > a$ composé de la même matière que le premier. Entre les deux cylindres règne le vide.

1. Énoncer le théorème d'Ampère.
2. Déterminer le champ magnétostatique dans l'espace situé entre les deux cylindres, à une distance r de l'axe $\overrightarrow{Oz}$, sachant que le courant des cylindres intérieur et extérieur est $+I$ et $-I$ respectivement.
3. En déduire le flux Φ du champ magnétique à travers une surface rectangulaire de hauteur l et de largeur comprise entre $r = a$ et $r = b$. En déduire le coefficient d'auto-induction L par unité de longueur du système.

II Propagation d'une onde dans un câble coaxial.

Le câble coaxial précédent est maintenant parcouru par un courant sinusoïdal. Il créé une onde électromagnétique sinusoïdale monochromatique se propageant dans la direction $\overrightarrow{Oz}$ (axe des deux cylindres). En raison de la symétrie du problème les champs électriques et magnétiques s'écrivent dans un repère cylindrique $(O|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

$$\overrightarrow{E}(M) = E(M)e^{-i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_r} = E_r\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{B}(M) = B(M)e^{-i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_\theta} = B_\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

1. Écrire les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants.
2. Écrire l'ensemble des relations entre les composantes E_r et B_θ obtenu à partir des équations de Maxwell et des champs considérés ci-dessus.
3. Compte tenu de la géométrie du système, expliquez pourquoi les amplitudes $E(M)$ et $B(M)$ ne peuvent pas dépendre de z.
4. En utilisant les relations de la question II.2, montrer que $E(M)$ et $B(M)$ ne dépendent pas non plus de θ.
5. Montrer également d'après les relations de la question II.2 que les amplitudes des champs peuvent s'écrire sous la forme $E(M) = \dfrac{A_1}{r}$ et $B(M) = \dfrac{A_2}{r}$, où A_1 et A_2 sont des constantes.
6. Toujours d'après la question II.2, calculer les deux relations que l'on peut obtenir entre les composantes E_r et B_θ des champs, en déduire une relation liant k, ω et c.

N.B. On rappelle qu'en coordonnées cylindriques on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

$$\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$