Modélisation des actions mécaniques

1. Définition d'une action mécanique

D'une façon générale, on appelle **action mécanique** toute cause physique susceptible :

- de maintenir un corps au repos,
- de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement,
- de déformer un corps.

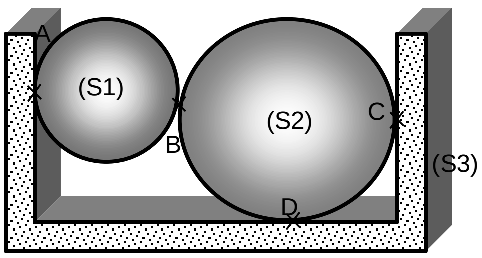
2. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

- Les **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur, champ magnétique)
- Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

Un ensemble de corps étant défini (isolement), on distingue les actions mécaniques **extérieures** des actions mécaniques **intérieures** à cet ensemble.

Soient trois solides S_1, S_2 et S_3.
Soit E l'ensemble constitué par les corps S_1 et S_2 : E={ S_1, S_2 }.



Le bilan des **actions mécaniques extérieures** qui agissent sur l'ensemble E s'établit ainsi:

- Poids de l'ensemble E (Action Mécanique à distance : Poids de S_1 et S_2).
- Actions mécaniques de contact exercées par S_3 sur l'ensemble E aux points A, C et D (Actions Mécaniques de contact).

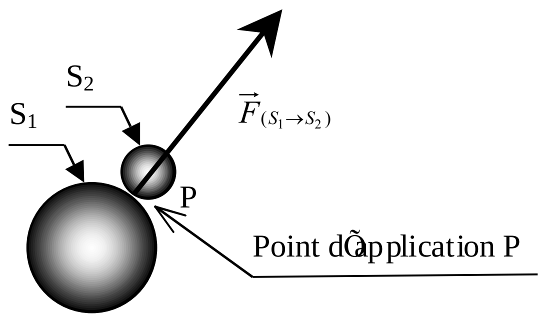
3. Force ? Moment ? Couple ?

3.1 Notion de force

On appelle **force**, l'action mécanique (attraction ou répulsion) qui s'exerce mutuellement entre deux solides. Ces deux solides ne sont pas obligatoirement en contact.

Une force s'applique en un **point**. L'action mécanique exercée par une force sur une pièce dépend de :

- l'**intensité de la force**,
- la **direction de la force,**
- du **sens de la force**.



L'entité mathématique « **Vecteur** » est, lui, aussi caractérisé par sa Norme, sa Direction et son Sens. Une force sera donc modélisée par un vecteur, associé à un Point d'application.

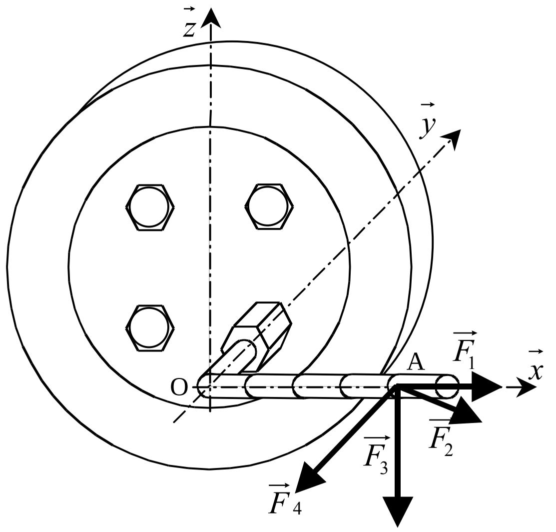
Unité : Une force s'exprime en Newton

Notation : $\vec{F}_{(S_1 \to S_2)}$

Ordre de grandeur : Une personne de masse 70 Kg a un poids d'environ 700 N, soit, 70 daN.

3.2 Notion de moment

3.2.1 Moment d'une force par rapport à un point



Considérons un utilisateur qui souhaite, à l'aide d'une clé, fixer la jante d'un véhicule automobile.

Il positionne sa main au point A.

Puis il commence par exercer une force $\overrightarrow{F_1}$ intégralement portée par $\vec{x}$. Malgré sa bonne volonté, il n'arrive pas à obtenir le serrage de la vis.

Il décide, alors, d'incliner légèrement son action mécanique pour obtenir la force $\overrightarrow{F_2}$ portée par $\vec{x}$ *et* $-\vec{z}$. Le serrage semble s'amorcer.

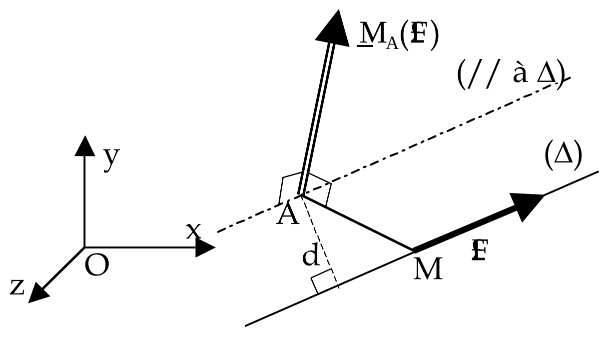
Finalement il exerce une force $\overrightarrow{F_3}$ intégralement portée par $-\vec{z}$. Son action mécanique semble être efficace… Pour retirer sa clé, il exercera une force $\overrightarrow{F_4}$ intégralement portée par $-\vec{y}$.

L'exemple précédent montre que les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position du point d'application et de l'orientation dans l'espace (direction et sens) de la force $\vec{F}$ associée à cette A.M.
Nous sommes donc conduits à introduire la notion **de moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point** pour caractériser complètement l'A.M.

On appelle **moment par rapport au point A de la force** $\vec{F}$ appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Unité : Newton mètre (N.m)

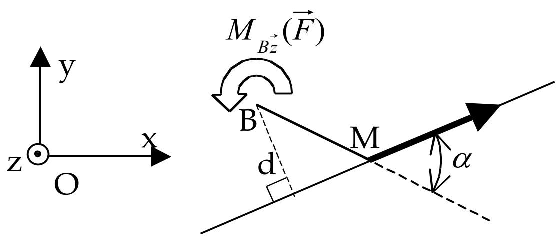


Ce vecteur moment $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$ sera représenté par une double flèche. Il possède les caractéristiques suivantes :

- Une origine : Le point A
- Une direction : perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{F}$.
- Un sens : Le trièdre $(\overrightarrow{AM},\ \vec{F},\ \overrightarrow{M_A}(\vec{F}))$ est direct.
- Une norme : $\left\|\overrightarrow{M_A}(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| . \left\|\vec{F}\right\| . \left|\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})\right|$

3.2.2 Application aux problèmes Plans

Lorsque nous étudions un problème plan, les vecteurs moments sont nécessairement portés par l'axe perpendiculaire au plan d'étude. Nous introduisons donc la notion de **moment d'une force par rapport à un axe** : $M_{O\vec{z}}(\vec{F})$. Il est judicieux d'utiliser la relation dite du « **Bras de Levier** ». En effet, moyennant l'utilisation d'un peu de trigonométrie, il est aisé de déterminer la longueur d.



$$M_{B\vec{z}}(\vec{F}) = +d.\|\vec{F}\|$$

La longueur d sera affectée d'un signe plus (+) si la force tend à faire tourner le système dans le sens positif, du signe moins (–) dans le cas contraire. C'est donc une grandeur algébrique.

3.2.3 Relation fondamentale entre les moments

Soit une force $\vec{F}$ appliquée au point M, et deux points quelconques A et B.

Par définition, $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$ et $\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}$

D'après le relation de Chasles $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$

D'où $\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{F}$

Soit $\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

Finalement $\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$

Cette relation est **fondamentale**

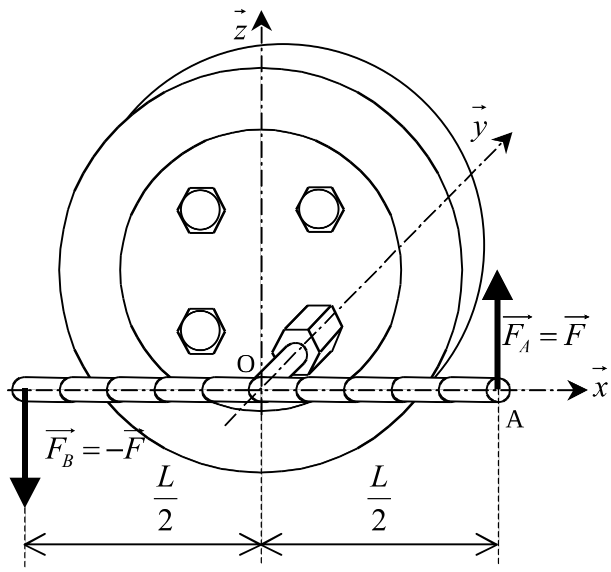
3.3 Notion de Couple

Notre opérateur souhaite desserrer la vis bloquée installée sur la jante. Après avoir utilisé le premier modèle de clé sans grande réussite, il préfère utiliser un modèle de type « croix ». Il pose ses mains en A et en B et exerce deux forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ telles que :

$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B} = \vec{F} = F.\vec{z}$

Un rapide calcul lui donne les moments par rapport au point O de ces deux forces:

$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_A}) = -F.\dfrac{L}{2}.\vec{y}$ et $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_B}) = -F.\dfrac{L}{2}.\vec{y}$



Le bilan des A.M. exercées par l'utilisateur sur la croix est composé :

- d'une résultante des forces : $\overrightarrow{F_U} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = F.\vec{z} - F.\vec{z} = \vec{0}$
- d'un moment résultant par rapport au point O : $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_U}) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_A}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_B}) = -F.L.\vec{y}$

La résultante de ces deux forces est nulle. Par contre, ces mêmes deux forces génèrent un moment que l'on appellera : un **Couple**.

4 Torseur associé à une action mécanique

4.1 Définitions

Une A.M. est complètement définie lorsque nous connaissons les deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$. Nous allons donc regrouper ces deux vecteurs dans une entité mathématique appelée **Torseur**.

Le toseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

Composantes de la résultante

Composantes du moment Résultant en A

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}X_{21} & L_{21}\\ Y_{21} & M_{21}\\ Z_{21} & N_{21}\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Base de projection des vecteurs

Centre de réduction

Remarques :

- Le point A est un point quelconque.
- $\vec{R}_{(2\to1)}$ et $\overrightarrow{M_A}_{(2\to1)}$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}$.

4.2 Torseurs particuliers

4.2.1 Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)} \neq \vec{0}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} = \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

4.2.2 Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)} = \vec{0}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \neq \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

- Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

4.3 Opérations entre torseurs

4.3.1 Changement de centre de réduction

Soit : $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)}\end{matrix}\right\}$

Ecriture au point B :

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_B}_{(2\to1)} = \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{(2\to1)}\end{matrix}\right\}$$

4.3.2 Somme de deux torseurs

Soient : $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)}\end{matrix}\right\}$

$\left\{\tau_{(3\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(3\to1)}\\ \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)}\end{matrix}\right\}$

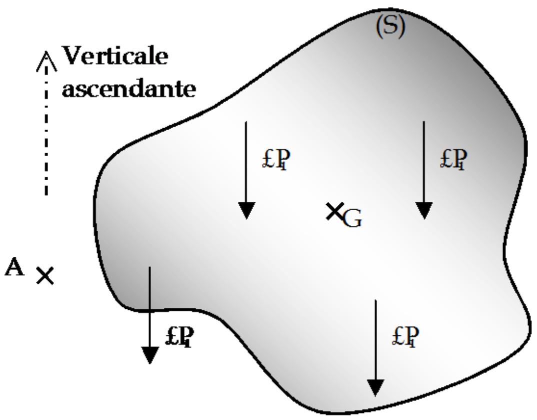
alors : $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} + \left\{\tau_{(3\to1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)} + \vec{R}_{(3\to1)}\\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)}\end{matrix}\right\}$

- Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**. Il sera parfois nécessaire de réaliser, au préalable, un changement de centre réduction.
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.
- Les unités doivent être compatibles entre elles.

5 Actions mécaniques particulières

5.1 Action mécanique de Pesanteur

L'action **mécanique de Pesanteur** exercée par notre planète Terre sur un solide S de masse m, est une action mécanique à distance car elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre la Terre et S.



en un point quelconque A :

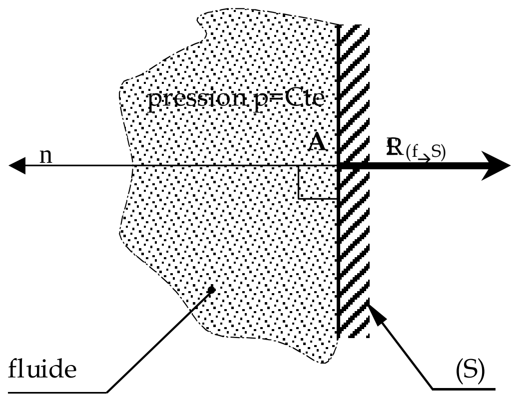
$$\left\{\tau_{(T\to S)}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \vec{R}_{(T\to S)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{P} \\ \vec{M}_{A(T\to S)} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{p}_i) \end{array}\right\}_A$$

au centre de gravité G du solide S :

$$\left\{\tau_{(T\to S)}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \vec{R}_{(T\to S)} = \vec{P} = m.\vec{g} \\ \vec{M}_{G(T\to S)} = \vec{0} \end{array}\right\}_G$$

5.2 Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) se modélisent par un torseur glisseur au centre A de la surface (S) tel que :



$$\left\{\tau_{(f\to s)}\right\} \left\{\begin{array}{l} \vec{R}_{(f\to S)} = -p.S.\vec{n} \\ \vec{M}_{A(f\to S)} = \vec{0} \end{array}\right\}_A$$

avec :

- p : pression exercée par le fluide, sur la surface (S). Le fluide est supposé à pression constante,
- S : aire de (S) ;
- n : normale à la paroi orientée vers le fluide

Unités légales :	Autres unités :	Unités historiques:
p en Pa	p en MPa	p en bars
S en m²	S en mm²	S en cm²
$\|\vec{R}_{(f\to S)}\|$ en N	$\|\vec{R}_{(f\to S)}\|$ en N	$\|\vec{R}_{(f\to S)}\|$ en daN

0,1 MPa = 10^5 Pa = 1 bar

6 Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Une **liaison mécanique** entre deux pièces dite **parfaite** est caractérisée par :

- Des volumes géométriquement parfaits et indéformables ,
- Des ajustements sans jeu ,
- Des contacts sans frottement.

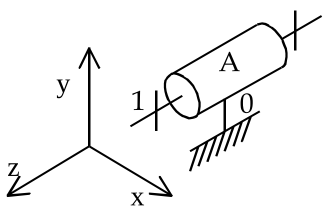
Ce modèle est certes, très théorique, mais bien pratique pour réaliser nos calculs de mécanique.

6.1 Méthode

☞ Une Force $\vec{F}$, intégralement portée par $\vec{x}$, ne pourra être transmise par une liaison, que si cette dernière dispose d'un « obstacle » (de la matière en contact) dans cette même direction $\vec{x}$, interdisant la translation d'une pièce par rapport à l'autre.

☞ Un Moment $\overrightarrow{M_A}$, intégralement porté par $\vec{y}$, ne pourra être transmis par une liaison, que si celle-ci dispose d'un « obstacle » dans cette même direction $\vec{y}$, interdisant la rotation d'une pièce par rapport à l'autre.

6.2 Application: La liaison pivot



L_{01} : Liaison pivot parfaite d'axe $(A,\vec{z})$

Mobilités

$$\overrightarrow{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot}\begin{vmatrix}0\\0\\Rz\end{vmatrix}$$

Torseur des actions mécaniques transmissibles par L_{01}

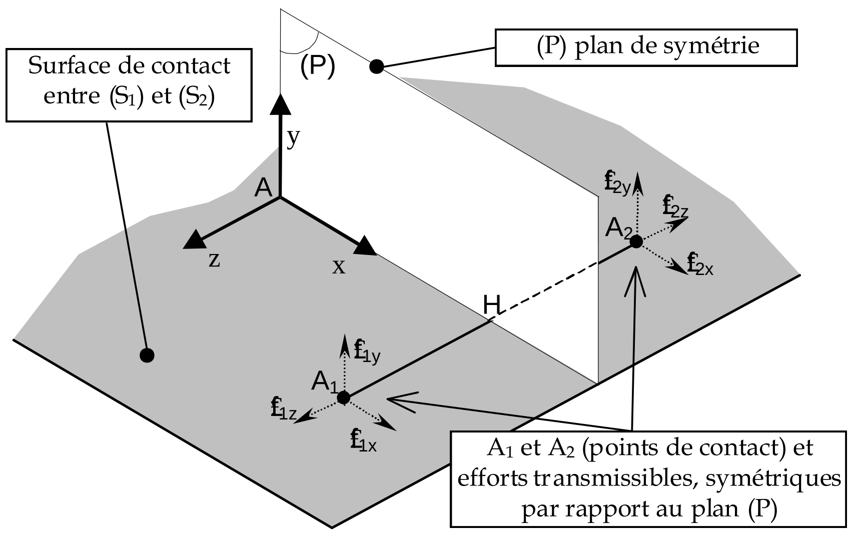
$$\left\{\tau_{(0\rightarrow 1)}\right\} \left\{\begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

7 Cas des problèmes admettant un Plan de Symétrie

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate et longue. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

7.1 Hypothèses

- La surface de contact possède une géométrie qui présente une symétrie par rapport à un plan . Il devra en être de même pour les actions mécaniques extérieures.
- Nous choisissons alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes du plan de symétrie.



7.2 Simplification

Lorsque les hypothèses précédentes sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. Il subsiste :

- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie,
- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie .

Dans notre exemple, le plan de symétrie est $(A,\vec{x},\vec{y})$.

Allure générale (3D) :

$$\left\{\tau_{(2\rightarrow 1)}\right\} \left\{\begin{matrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(6 inconnues)

Simplification :

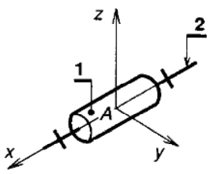
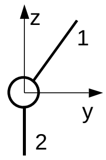
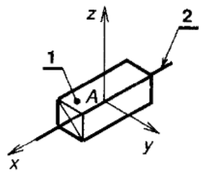
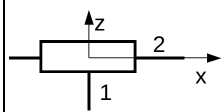
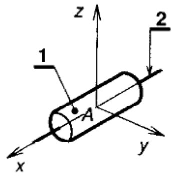
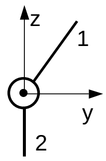
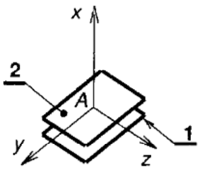
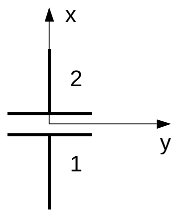
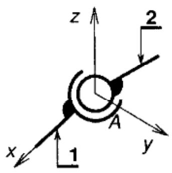
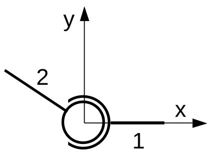
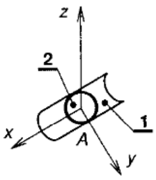
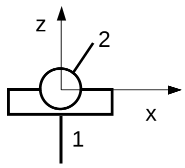
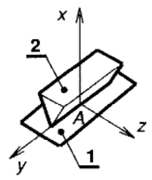
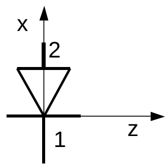
$$\left\{\tau_{(2\rightarrow 1)}\right\} \left\{\begin{matrix} X_{21} & \cancel{L_{21}} \\ Y_{21} & \cancel{M_{21}} \\ \cancel{Z_{21}} & N_{21} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Allure simplifiée (2D) :

$$\left\{\tau_{(2\rightarrow 1)}\right\} \left\{\begin{matrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(3 inconnues)

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe $(A,\vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{y},\vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}0 & L_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & M_{12}\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{y},\vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Appui plan de normale $(A,\vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & M_{12}\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{y})$ $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	
Rotule de centre A		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{y})$ $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Linéaire annulaire d'axe $(A,\vec{x})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{x})$ et de contact $(A,\vec{y})$		$\vec{Tr}\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}\ \vec{Rot}\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A,\vec{x},\vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_A$	

Ce tableau n'est pas exhaustif

<u>NB</u> : Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison glissière hélicoïdale n'est pas modélisable aussi simplement.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en place un Principe que nous utiliserons pour déterminer (entre autres) les inconnues de liaisons…