

Traitement du Signal

HEINRICH Yannick

Document créé avec L^AT_EX

La permission est accordée de copier, distribuer et/ou modifier ce document sous les termes de la licence GNU de la Documentation Libre, Version 1.2 ou toute autre version publiée par la Free Software Foundation. Vous pouvez consulter la GNU Free Documentation License sur <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>

Table des matières

1	Introduction au traitement numérique du signal	3
1.1	Définition d'un signal	3
1.2	Nécessité d'un traitement du signal	3
1.3	Filtre	5
1.4	Caractérisation d'un filtre	5
1.5	L'impulsion	7
1.5.1	Les distributions	7
1.5.2	Distribution de Dirac	7
1.5.3	Distribution de l'impulsion	8
1.5.4	Interprétation géométrique	8

1. Introduction au traitement numérique du signal

1.1 Définition d'un signal

Toutes les grandeurs physiques observables dans la nature peuvent être représentées par des fonctions d'une variable continue : la position en fonction de l'espace, l'avancement d'une équation chimique en fonction du temps ; etc. De manière formelle, nous utiliserons des fonctions pour les représenter. Dans le domaine de l'information, nous étudions le plus souvent des signaux électriques. Physiquement, il s'agit de la tension ou du courant généré par un système électronique. Nous pouvons les représenter par une fonction continue du temps.

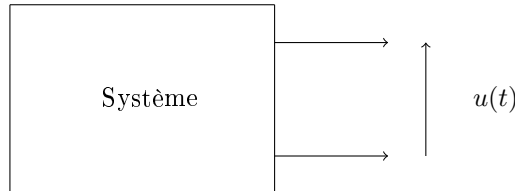


FIGURE 1.1 – Système caractérisé par sa tension de sortie

1.2 Nécessité d'un traitement du signal

Le traitement du signal ne se contente pas d'un "signal brut". De manière générale, l'information utile apportée par le signal est très peu visible car le signal amène aussi de l'information parasite que l'on qualifie de bruit. On peut voir un signal $u(t)$ comme :

$$u(t) = i(t) + b(t)$$

où $i(t)$ représente l'information utile et $b(t)$ le bruit du signal.

Exemple :

On imagine un système où :

- $i(t) = 5 \cos(5t)$
- $b(t) = 2,5 \cos(20t)$

On peut alors comparer l'allure de l'information utile seul et celle du signal (l'information plus le bruit).

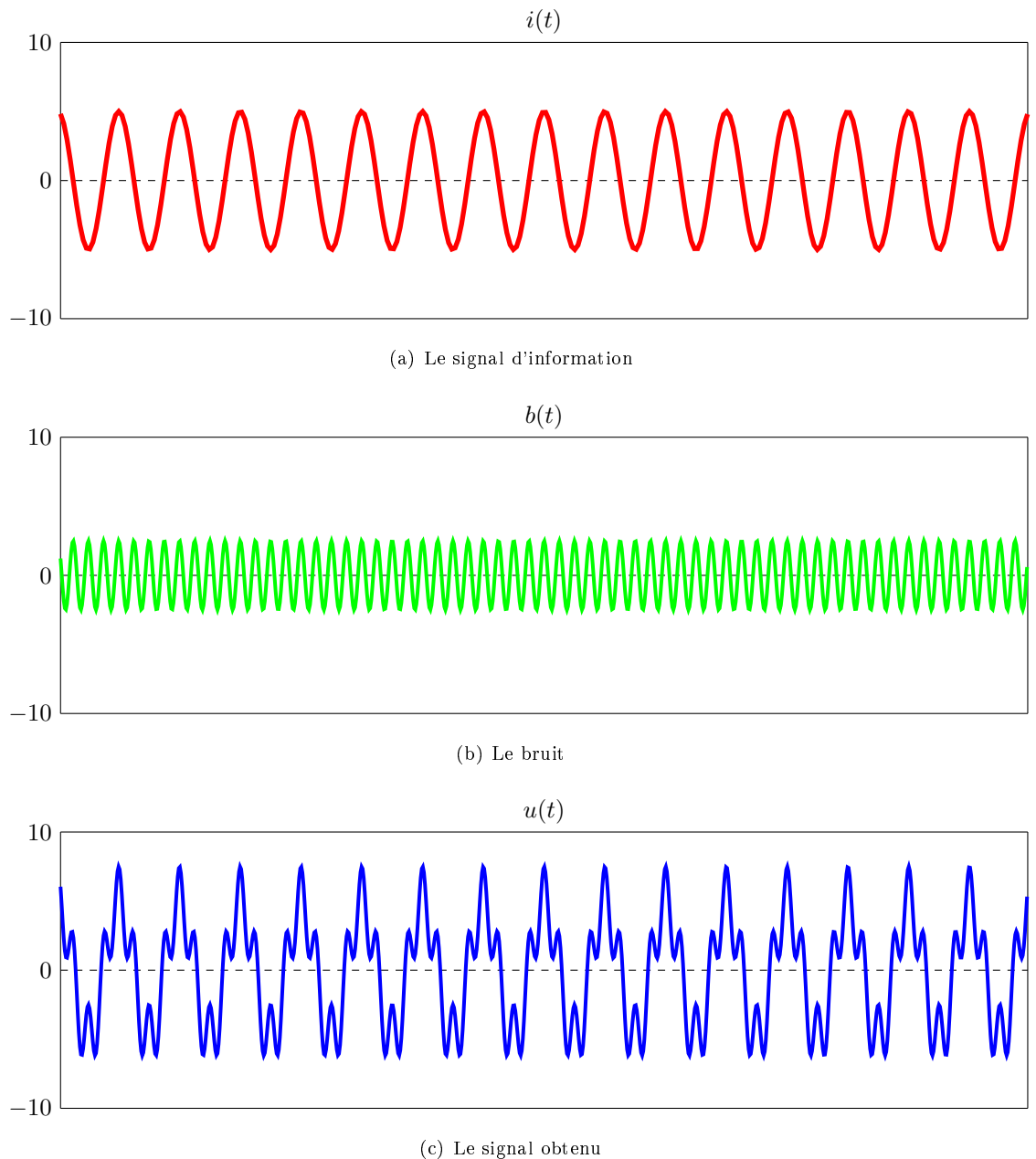


FIGURE 1.2 – Mise en évidence de la nécessité du filtrage

On voit nettement sur la figure 1.2 l'influence du bruit sur l'information. Idéalement, il faut atténuer l'influence des parasites pour obtenir un signal de sortie le plus proche de l'information. Ce processus est nommé le **filtrage**. Les éléments qui permettent de traiter les signaux sont appelés des **filtres**.

1.3 Filtre

Le filtrage utilise en ensemble de filtres pour modifier la forme d'un signal afin que le signal obtenu en sortir de filtrage ait la forme désirée. On représente habituellement un filtre par un bloc possédant un signal d'entrée (le signal a traité) et un signal en sortie (le signal traité).



FIGURE 1.3 – Représentation symbolique d'un filtre

Nous posons tout d'abord quelques hypothèses sur ce filtre. Nous allons supposer qu'il représente un système **linéaire et invariant dans le temps**. On note $F : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ l'application qui associe pour un signal d'entrée un signal de sortie. De manière formelle on peut écrire :

$$\forall(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(x(t)) = y(t) \Rightarrow F(x(t - \tau)) = y(t - \tau)$$

$$\forall(t, \tau, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^4), x_1(t) \in \mathcal{L}^2, x_2(t) \in \mathcal{L}^2$$

$$(F(x_1(t)) = y_1(t), F(x_2(t)) = y_2(t)) \Rightarrow F(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

La plupart des phénomènes physiques peuvent être étudiés comme de tels systèmes. Les propriétés de linéarité et d'invariance temporelle sont des hypothèses d'études nécessaires pour utiliser les résultats qui vont suivre.

1.4 Caractérisation d'un filtre

Pour travailler sur un filtre, nous devons connaître la relation qui existe entre son entrée et sa sortie. La difficulté réside dans la caractérisation de cette relation : il existe une infinité de signaux différents. Existe-t-il une relation simple qui nous permette de déduire la sortie à partir de n'importe quel signal d'entrée ?

On soumet le filtre à une impulsion (nous anticipons volontairement cette notion qui sera vu dans la partie 1.5) et on relève sa sortie dès le début de l'impulsion. Le résultat est donné à la figure 1.4.

La courbe bleue est appelée la **réponse impulsionnelle** du filtre au temps t_0 . L'idée de base de la caractérisation d'un filtre pour tous les signaux possibles et imaginaires est de se servir de cette réponse impulsionnelle au temps t_0 et des propriétés de linéarité et d'invariance temporelle du filtre.

Supposons que nous soumettons le filtre à deux impulsions similaires au temps t_0 et t_1 . D'après les propriétés évoquées précédemment, la réponse en t_1 sera la même que la réponse en t_0 mais décalé dans le temps. Le résultat est visible à la figure 1.5.

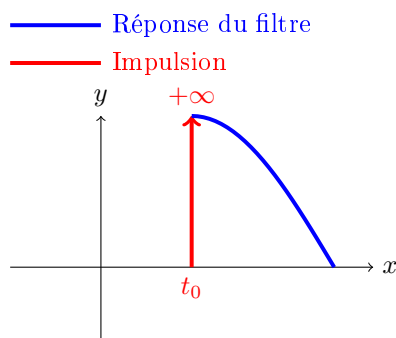


FIGURE 1.4 – Réponse d'un filtre à une impulsion

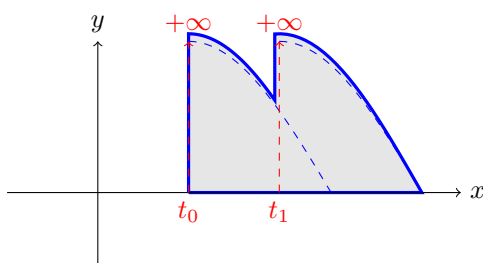


FIGURE 1.5 – Réponse d'un filtre deux impulsions

Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre à $t = 0$. La réponse à la même impulsion au temps t_0 sera $h(t - t_0)$ et au temps t_1 sera $h(t - t_1)$. D'après les propriétés de linéarité, sortie s'exprimera alors :

$$y(t) = h(t - t_0) + h(t - t_1)$$

On peut imaginer maintenant soumettre le filtre à une suite de N impulsions séparées de Δt . La première impulsion est envoyée à t_0 . La valeur de la sortie est :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t - t_0) + h(t - t_0 - \Delta t) + h(t - t_0 - 2\Delta t) + \dots + h(t - t_0 - (N - 1)\Delta t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(t - t_0 - k\Delta t) \end{aligned}$$

En prenant l'origine des temps à $t_0 = 0$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(t - k\Delta t)$$

Chaque impulsion contribue au signal de sortie : il suffit de connaître le comportement du filtre suite à une impulsion pour connaître la réponse du filtre à n'importe quelle suite d'impulsion.

Il vient naturellement à l'esprit la question de savoir, si tout signal réel peut s'exprimer comme une somme d'impulsion. Si tel est le cas, nous pourrions connaître la réponse du système à n'importe quel signal en connaissant uniquement sa réponse impulsionnelle.

1.5 L'impulsion

Une impulsion est un signal de durée très courte avec une amplitude très grande. Idéalement, cette impulsion est infiniment courte. On note Δ la durée de cette impulsion. L'amplitude de cette impulsion est inversement proportionnelle à cette durée d'impulsion. Idéalement, cette amplitude tend vers l'infini. On peut modéliser cette amplitude par $\frac{1}{\Delta}$ comme vu à la figure 1.6

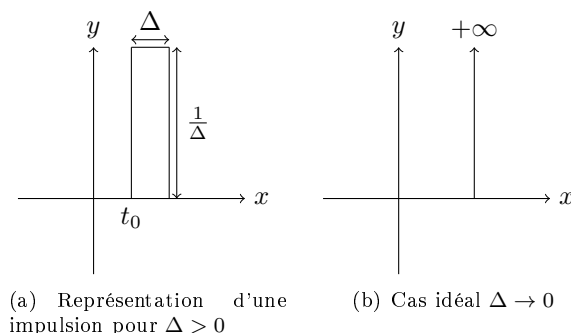


FIGURE 1.6 – Représentation de l'impulsion

1.5.1 Les distributions

Le cas limite présenté à la figure 1.7(b) n'est pas une fonction au sens mathématique du terme. Il s'agit d'une distribution.

Ici, il s'agit d'une application $D : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathbb{K}, \phi \mapsto \langle D, \phi \rangle$ telle que :

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \langle D, \alpha\phi \rangle = \alpha \langle D, \phi \rangle$
- $\forall (\phi_1, \phi_2) \in (\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2), \langle D, \phi_1 \rangle + \langle D, \phi_2 \rangle$
- Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \phi_L$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle D, \phi(t) \rangle = \langle D, \phi_L \rangle, \phi_L \in \mathbb{K}$

Soit $f \in \mathcal{L}^2$, alors l'application $\langle D_f, \phi(t) \rangle$ définie par :

$$\langle D_f, \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt$$

est une distribution.

Les signaux à énergie finie peuvent être représentés par une fonction de \mathcal{L}^2 . et chacun d'eux peut définir une distribution.

1.5.2 Distribution de Dirac

On définit la distribution de Dirac par :

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

Autrement dit, c'est l'application qui à toute fonctions ϕ lui associe $\phi(0)$. De même, on définit la distribution $\langle \delta(t - t_0), \phi \rangle$ au temps t_0 par :

$$\langle \delta(t - t_0), \phi \rangle = \langle \delta, \phi(t - t_0) \rangle = \phi(t_0)$$

1.5.3 Distribution de l'impulsion

Nous avons vu à la figure 1.7(a) la fonction représentant l'impulsion. C'est une fonction de \mathcal{L}^2 , elle définit une distribution. Appellons $\Delta(t - t_0)$ cette fonction.

$$\begin{aligned} \langle D_\Delta, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t - t_0) \phi(t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \phi(t) dt \end{aligned}$$

On pose $\Phi(t)$ une primitive de $\phi(t)$ en admettant qu'elle existe et qu'elle est dérivable. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle D_\Delta, \phi \rangle &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \phi(t) dt \\ &= \frac{\Phi(t_0 + \Delta) - \Phi(t_0)}{\Delta} \end{aligned}$$

En faisant tendre Δ vers 0, on a la définition du taux d'accroissement de $\Phi(t)$ en t_0 . Par définition du taux d'accroissement :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle D_\Delta, \phi \rangle = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta) - \Phi(t_0)}{\Delta} = \Phi'(t_0) = \phi(t_0)$$

On a alors :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle D_\Delta, \phi \rangle = \langle \delta(t - t_0), \phi \rangle = \langle \delta, \phi(t - t_0) \rangle = \phi(t_0) \quad (1.1)$$

1.5.4 Interprétation géométrique

On cherche à représenter graphiquement la distribution idéale définie par l'impulsion sur un signal $f(t)$.

Soit $f(t)$ une fonction représentant un signal quelconque. Par définition de la distribution créée par $\Delta(t - t_0)$ pour $f(t)$:

$$\langle D_\Delta, f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t - t_0) f(t) dt$$

La valeur de cette distribution représente l'aire sous la courbe de la fonction $\Delta(t - t_0) f(t)$.

⇒ La valeur de la distribution déterminée par une fonction $g(t)$ quelconque associe à toute fonction $\phi(t)$ l'aire de la courbe sous la fonction $g(t)\phi(t)$ (cf Fig 1.7(c)).

En faisant tendre Δ vers 0, la largeur de l'amplitude tend vers 0 et l'amplitude de l'impulsion tend vers $+\infty$ et ce pour n'importe quelle valeur de t . Pour différencier la valeur de la distribution en chaque point de t , on trace une flèche dont l'amplitude est égale à la valeur de la distribution (donc à l'aire sous la courbe).

Nous savons d'après la relation 1.1 que cette aire vaut $f(t_0)$. Sa représentation est visible à la figure 1.8

Comme vu au chapitre 1.4, si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre et F l'application qui décrit ce filtre, on a :

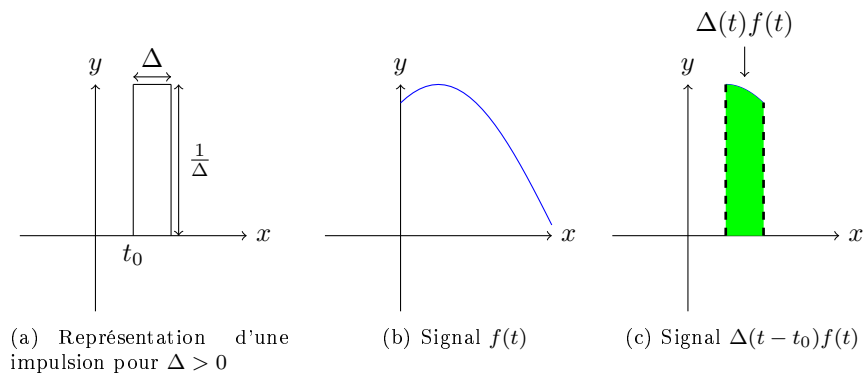


FIGURE 1.7 – Représentation de l'impulsion

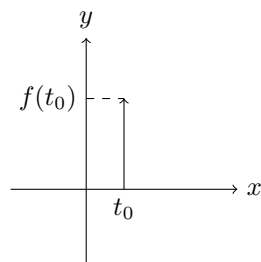


FIGURE 1.8 – Représentation d'une distribution au point t_0