

Ecole Polytechnique Universitaire de Paris
Spécialité Electronique Informatique ELI, 3^{ème} Année

Cours de traitement du signal

PREMIERE PARTIE

ZARADER J.L

2008/2009

SOMMAIRE

BIBLIOGRAPHIE	3
I GENERALITES	4
1°) - DEFINITIONS.	4
2°) - CLASSIFICATION DES SIGNAUX.	5
3°) - QUELQUES SIGNAUX IMPORTANTS.	7
II SERIES ET TRANSFORMEE DE FOURIER.....	10
1°) - SERIES DE FOURIER.....	10
2°) - DISTRIBUTIONS.	13
3°) - TRANSFORMEE DE FOURIER (TF).	16
III CONVOLUTION ET CORRELATION	21
1°) - CONVOLUTION.....	21
2°) - CORRELATION.	26
3°) - CAS DES SIGNAUX A PUISSANCE MOYENNE FINIE.	29
4°) - ANALYSE SPECTRALE.....	30
5°) - FILTRAGE.	36
IV ECHANTILLONNAGE	39
1°) - ECHANTILLONNAGE IDEAL.....	39
2°) - RECONSTRUCTION DU SIGNAL.....	42
3°) - SOUS-ECHANTILLONNAGE.	43
4°) - ECHANTILLONNAGE PRATIQUE.	45
V TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (T.F.D)	50
1°) - TRANSFORMEE DE FOURIER D'UN SIGNAL PERIODIQUE ET DISCRET...	50
2°) - TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (TFD).	51
3°) - CONVOLUTION DISCRETE.	56
4°) - CORRELATION.	59

Bibliographie

- L. Schwartz : " Théorie des distributions " ; Ed. Hermann
- E. Roubine : " Distributions Signal " ; Ed. Eyrolles
- J. Max : " Méthodes et techniques du traitement du signal " ; 2
Tomes ; Ed. Masson
- F. de Coulon : " Théorie et traitement des signaux " ; Ed. Dunod
- A. Spatarü : " Théorie de la transmission de l'information " ; Ed.
Masson
- M. Bellanger : " Traitement numérique du signal " ; Ed. Masson
- M. Kunt : " Traitement numérique des signaux " ; Ed. Dunod

I Généralités

1°) - Définitions.

Le *signal* est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

Le *traitement du signal (T.S)* est une discipline technique qui a pour objet l'élaboration, la détection et l'interprétation des signaux porteurs d'informations.

Cette discipline s'appuie sur la *théorie du signal* qui donne une description mathématique des signaux. Cette théorie fait essentiellement appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, l'électricité et l'étude des processus aléatoires.

Historiquement, le traitement des signaux apparaît au début du XX^{ème} siècle, en même temps que l'électronique (FLEMING, 1905, détection et amplification de signaux faibles). On peut cependant noter des premiers travaux au XIX^{ème} avec l'invention du télégraphe électrique (MORSE, COOKE, WHEATSTONE, 1830), du téléphone (BELL, 1876) et de la radio (MARCONI, POPOV, 1895).

Hormis la contribution apportée par FOURIER (1822, Travaux sur la propagation de la chaleur), la théorie du signal apparaît en 1930 avec les premiers travaux de WIENER et KINTCHINE sur les processus aléatoires, et ceux de NYQUIST et HARTLEY sur la quantité d'informations transmise sur une voie télégraphique.

Les contributions essentielles, au traitement du signal et à la théorie du signal n'interviennent qu'après la seconde guerre mondiale. Invention du transistor en 1948, travaux de SHANNON sur la communication, de WIENER sur le filtrage optimal et de SCHWARTZ sur les distributions.

Les applications du traitement du signal sont nombreuses (Télécommunication, Géophysique, Reconnaissance des formes, Biomédical, Acoustique, etc...).

Exemples

* Contrôle Radar: Ici l'analyse fréquentielle joue un rôle fondamental.

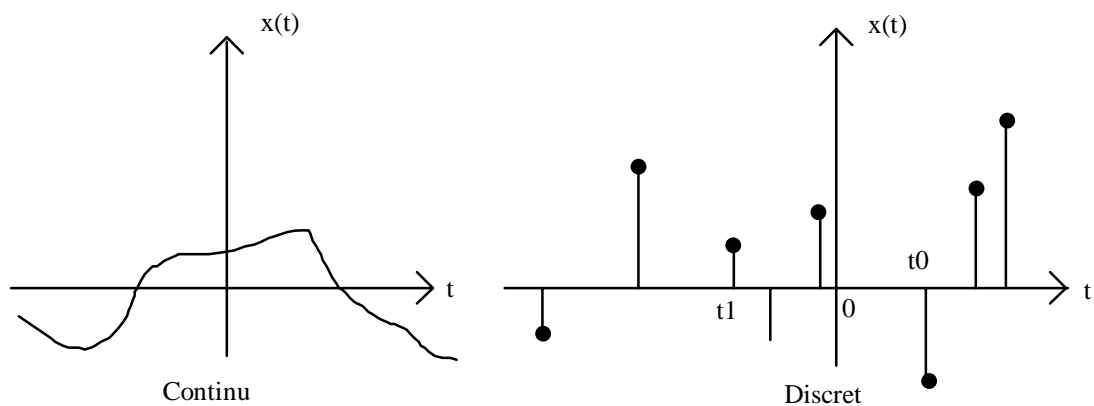
* Codage de la Parole: La reconnaissance de la parole nécessite le traitement d'une grande quantité de données. Le codage permet de réduire cette quantité, en éliminant les redondances et en conservant l'information utile.

* Les Télécommunications : Si les 17 Millions d'abonnés au téléphone étaient reliés 2 à 2 il faudrait $(17M)^2/2$ câbles. Heureusement les travaux sur la modulation, l'échantillonnage et la transmission permettent d'émettre, sur une même voie, des milliers de messages.

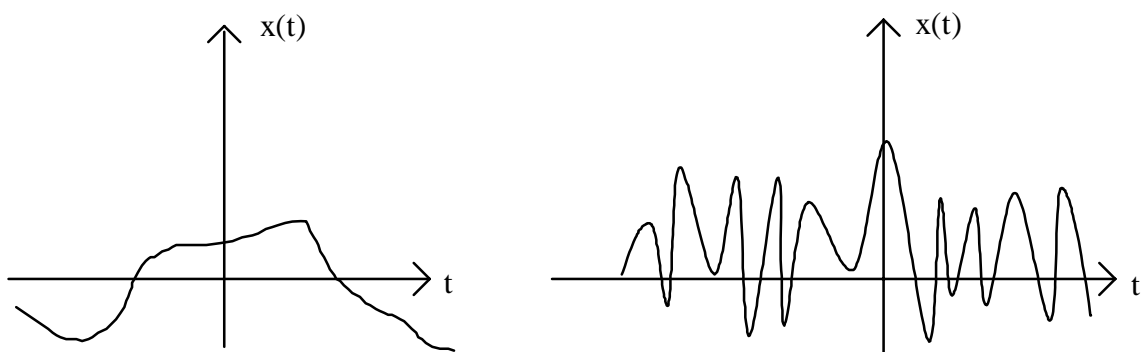
2°) - Classification des signaux.

Il existe différents modes de classification :

a) Morphologique : On distingue ici les signaux qui prennent des valeurs à chaque instant t (Signal *continu*) et les signaux qui n'ont de valeurs qu'à certains instants t_i (Signal *discret*).



b) Spectrale : On classe les signaux suivant la bande de fréquences qu'ils occupent.



Signal à variations lentes
Signal "Basses Fréquences"

Signal à variations rapides
Signal "Hautes Fréquences"

c) Energétique : Les signaux peuvent être à *énergie finie* ou à *puissance moyenne finie*.

Les signaux à énergie finie vérifient la condition :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

On dit aussi qu'ils sont de carré sommable. Les signaux à support borné, c'est à dire de durée limitée, sont à énergie finie.

Les signaux à puissance moyenne finie sont tels que :

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right] < +\infty$$

Les signaux périodiques sont à puissance moyenne finie.

Remarques :

- Un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle ($P_x = 0$).
- Un signal à puissance moyenne finie (non nulle) possède une énergie W_x infinie.

On définit, par ailleurs :

- La puissance instantanée (d'interaction).

$$P_x(t) = x(t) x^*(t)$$

$$P_{xy}(t) = x(t) y^*(t)$$

- La puissance moyenne (d'interaction) sur une durée T.

$$P_x(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t) dt$$

$$P_{xy}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) dt$$

- L'énergie moyenne (d'interaction) sur une durée T.

$$W_x(t_0, T) = T P_x(t_0, T)$$

$$W_{xy}(t_0, T) = T P_{xy}(t_0, T)$$

d) Typologique : On distingue ici les signaux suivant que leur évolution est *déterministe* ou *aléatoire*.

Signal déterministe : Un signal déterministe peut être prédit par un modèle mathématique connu. On distingue deux sous classes :

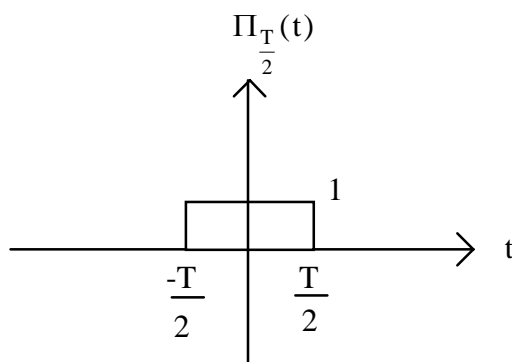
- Les signaux périodiques $x(t) = x(t + T)$.
- Les signaux non - périodiques.

Signal Aléatoire : Le signal aléatoire a un comportement imprévisible. On le décrit grâce à des outils statistiques (densité de probabilités, moyenne, variance,...).

3°) - Quelques signaux importants.

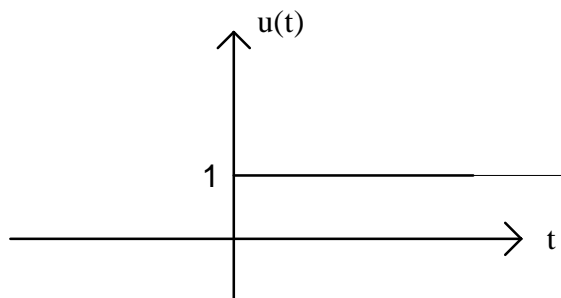
- Porte : $\Pi_{\frac{T}{2}}(t)$

$$\Pi_{\frac{T}{2}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



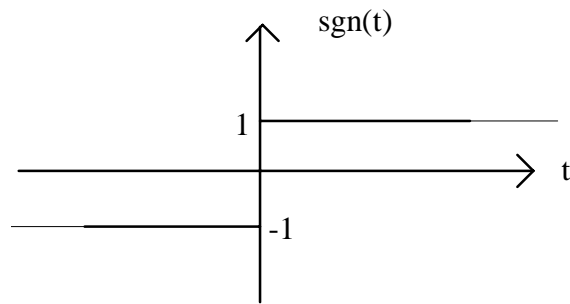
- Echelon d'Heavyside : $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



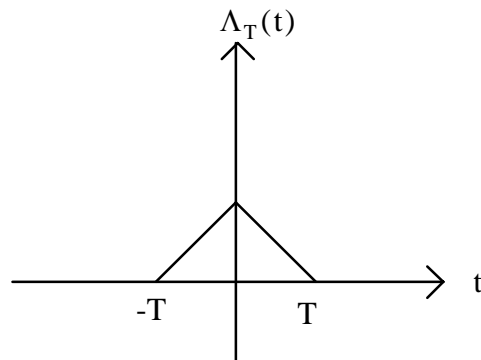
- Signe : $\text{sgn}(t)$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



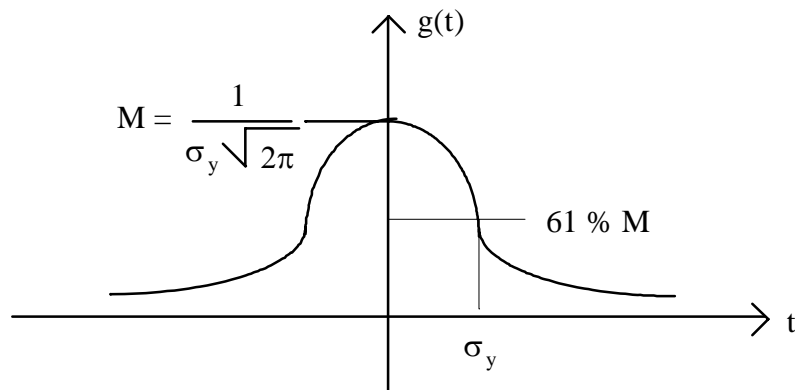
- Triangulaire : $\Lambda_T(t)$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



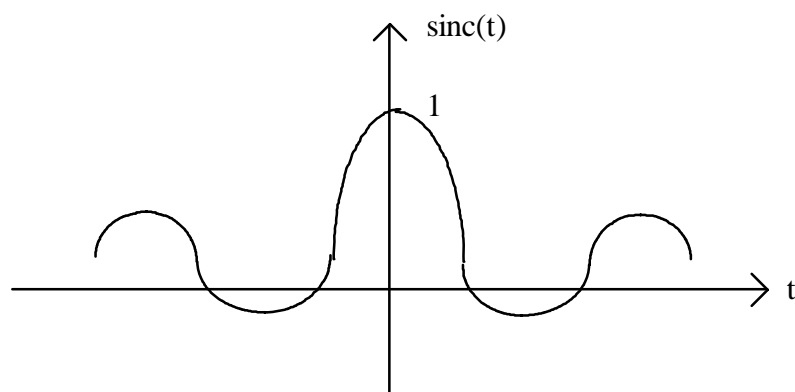
- Gaussienne : $g(t)$

$$g(t) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_y^2}}$$



- Sinus Cardinal : $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$



- Règle de l'Hopital :

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues et dérivables en t_0 et telles que :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow t_0} \{g(t)\} = 0 \text{ (resp } \pm \infty)$$

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \right\} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{f'(t)}{g'(t)} \right\}$$

Exemple :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(t)}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \{ \cos(t) \} = 1$$

II Séries et transformée de FOURIER

On présentera dans ce chapitre les principaux outils mathématiques nécessaires au traitement des signaux.

1°) - Séries de FOURIER.

Considérons les fonctions $g_n(t)$ définies par :

$$g_n(t) = e^{+2\pi j \frac{nt}{T}} = e^{+2\pi j n v_0 t} \text{ avec, } v_0 = \frac{1}{T} \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

On peut facilement montrer que ces fonctions sont orthogonales, c'est à dire :

$$\langle g_n(t), g_m^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} g_n(t) g_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Dem :

$$\langle g_n(t), g_m^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{2\pi j \frac{(n-m)t}{T}} dt$$

$$\langle g_n(t), g_m^*(t) \rangle = \frac{1}{2\pi j(n-m)} (e^{\pi j(n-m)} - e^{-\pi j(n-m)}) = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Soit $f(t)$ un signal périodique de période T ($T > 0$). Si $f(t)$ possède un nombre fini de sauts sur une période, alors il existe une suite C_n telle que :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n g_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2\pi j \frac{nt}{T}}$$

Cette série converge vers $f(t)$, si $f(t)$ est continue en t . Elle converge vers $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$, si $f(t)$ possède un saut en t . Les C_n sont couramment appelées *raies*, *composantes* ou *harmoniques* du signal et se calculent par projection:

$$C_n = \langle f(t), g_n^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) e^{-2\pi j \frac{nt}{T}} dt$$

- C_0 : composante continue = $\frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) dt$
- C_1 : 1^{ère} Harmonique ou fondamentale du signal $f(t)$.
- C_n : contribution de la n^{ième} harmonique.

Propriétés :

- Si $f(t)$ réelle alors $C_n = C_{-n}^*$ ($f(t) = f^*(t)$)
- Si $f(t)$ réelle et paire alors C_n réel ($f(t) = f^*(t) = f(-t)$)
- Si $f(t)$ réelle et impaire alors C_n imaginaire ($f(t) = -f(-t) = f^*(t)$)

Note : L'expression entre parenthèses est une indication pour la démonstration.

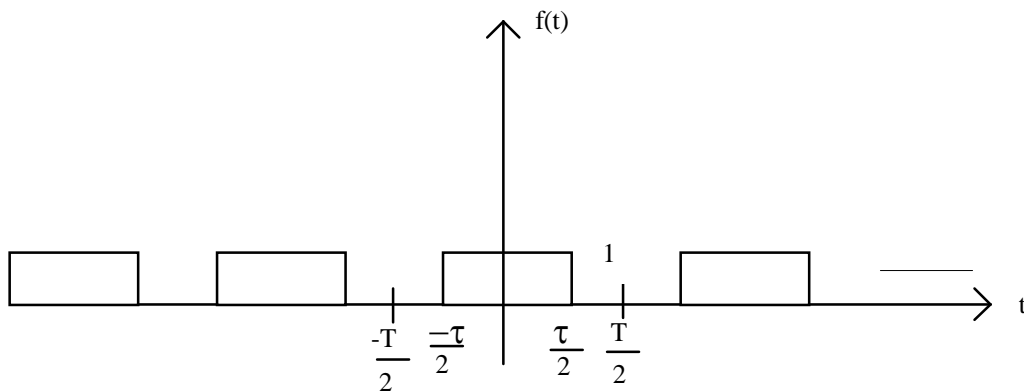
Exemples :

1) Soit C_n une suite définie par: $C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0$, si $n \neq (1, -1)$.

Déterminer $f(t)$?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2\pi j \frac{nt}{T}} = \frac{A}{2} (e^{2\pi j \frac{t}{T}} + e^{-2\pi j \frac{t}{T}}) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

2) On considère le signal carré périodique $f(t)$ défini par :

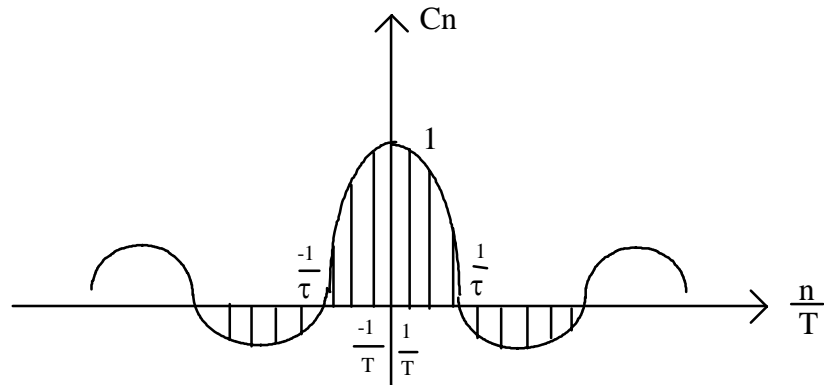


Calculer son spectre.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-2\pi j \frac{nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2\pi j \frac{nt}{T}} dt = \frac{1}{T} \frac{\left[e^{-2\pi j \frac{nt}{T}} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-2\pi j \frac{n}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(2\pi \frac{n\tau}{2T}\right)}{\frac{\pi n}{T}} = \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{n\tau}{T}\right)$$

- Le sinc constitue l'enveloppe des C_n



Relation de PARSEVAL :

La relation de PARSEVAL montre qu'il y a "conservation" de la puissance P_f lorsque l'on passe d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle. En effet, on a :

$$P_f = \langle f(t), f^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Dem :

$$P_f = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) f^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_n C_m^* \langle g_n(t), g_m^*(t) \rangle$$

$$\text{d'où : } P_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Exemple :

Dans le cas du signal $A \cos(\frac{2\pi t}{T})$ la puissance est $P_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{A^2}{2}$

On trouve souvent la décomposition en séries de FOURIER sur une base de fonctions sinus et cosinus :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right]$$

Dem :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[C_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t} + C_{-n} e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} \right]$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(C_n + C_{-n}) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + j (C_n - C_{-n}) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) \right]$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 a_n &= C_n + C_{-n} = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\
 b_n &= j(C_n - C_{-n}) = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\
 C_n &= \frac{1}{2}(a_n - j b_n)
 \end{aligned}$$

Le *spectre* du signal, représenté par les C_n , peut être décomposé en :

- Un *spectre d'amplitude* = $|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Un *spectre de puissance* = $|C_n|^2$
- Un *spectre de phase* = $\text{Arg}(C_n) = \text{Arctg}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

Remarques

- La décomposition en C_n introduit la notion de "fréquences négatives". Ces fréquences n'ont aucun sens physique, elles permettent uniquement de simplifier le calcul.
- Dans le cas où le signal $f(t)$ est réel, le spectre d'amplitude est symétrique car $C_n = C_{-n}^*$ d'où $|C_n| = |C_{-n}|$.

2°) - Distributions.

Nous nous intéresserons, dans ce paragraphe, à la distribution de DIRAC. Pour de plus amples renseignements sur la théorie des distributions, on pourra consulter les ouvrages L. SCHWARTZ et E. ROUBINE.

Les distributions généralisent la notion de fonctions numériques, en simplifiant certaines opérations effectuées par l'analyse classique.

La distribution de DIRAC, notée $\delta(t)$, tient une place particulièrement importante en traitement du signal. En effet, elle intervient dans un grand nombre d'applications telles que l'échantillonnage, la modulation ou le filtrage.

La distribution de DIRAC est aussi appelée Pic ou Impulsion de DIRAC. Certains auteurs parlent abusivement de "fonction" de DIRAC et la définissent par :

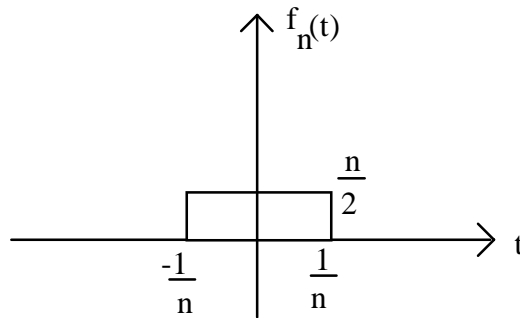
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \\ \delta(t) = +\infty \text{ si } t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Cette définition n'a aucun sens car une fonction presque partout nulle serait d'aire nulle.

Une approche "plus rigoureuse" consiste à considérer la distribution de DIRAC comme la limite de fonctions $f_n(t)$ d'aire unitaire et de support borné :

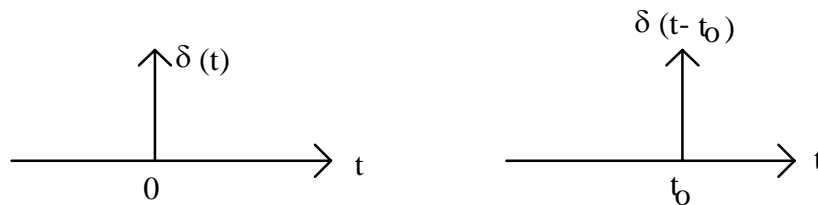
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \\ \delta(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(t)] \end{cases}$$

On peut prendre par exemple une suite de fonctions rectangles :



Il est évident qu'au passage à la limite on obtient un "rectangle infiniment étroit et infiniment haut", mais dont l'aire reste unitaire.

Si l'on centre les fonctions $f_n(t)$ autour d'un point t_0 ($f_n(t - t_0)$), la limite donne un pic de DIRAC décalé.



Propriétés

- Produit par une fonction $f(t)$:

$$\delta(t) f(t) = f(0) \delta(t)$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

Cela signifie que l'aire associée au pic de DIRAC n'est plus unitaire, mais vaut $f(0)$ ou $f(t_0)$.

- Intégration :

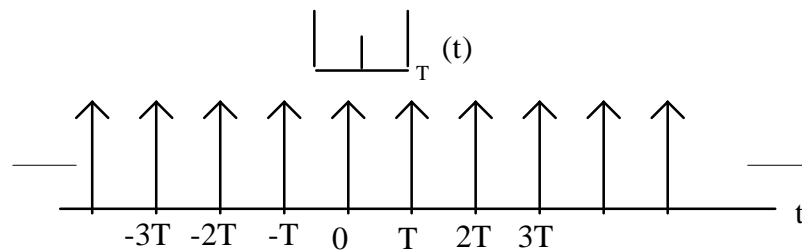
D'après les résultats précédents on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt = f(t_0)$$

et bien sûr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

Pour en terminer avec les distributions, on citera le peigne de Dirac, noté $|_I_|_T(t)$. Cette distribution est constituée d'une suite d'impulsions de Dirac, régulièrement espacées d'une durée T .



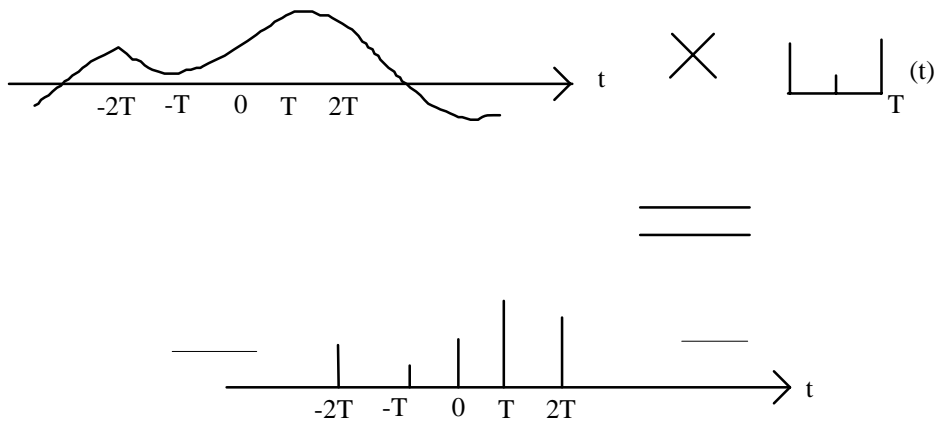
$$|_I_|_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Le produit de cette distribution par une fonction $f(t)$ donne une suite d'impulsions de Dirac d'aire égale à $f(nT)$:

$$f(t) |_I_|_T(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

On pose : $f_e(t) = f(t) |_I_|_T(t)$

On dit que $f_e(t)$ est une fonction échantillonnée.



3°) - Transformée de FOURIER (TF).

La transformation de FOURIER est une extension de la décomposition en série de FOURIER, mais pour des signaux quelconques. Intuitivement on peut considérer un signal non périodique comme un signal dont la période $T \rightarrow +\infty$. Ainsi la somme discrète et le facteur $1/T$ intervenant dans la décomposition en série de FOURIER deviennent respectivement une intégrale, et une petite variation de fréquence df . On définit la Transformée de Fourier (TF), notée $X(f)$, du signal $x(t)$ par:

$$\begin{aligned} \text{TF}\{x(t)\} &= X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt \\ \text{TF}^{-1}\{X(f)\} &= x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+2\pi jft} df \end{aligned}$$

$X(f)$ est la superposition d'une infinité de raies qui s'étendent, dans le domaine fréquentiel, de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple :

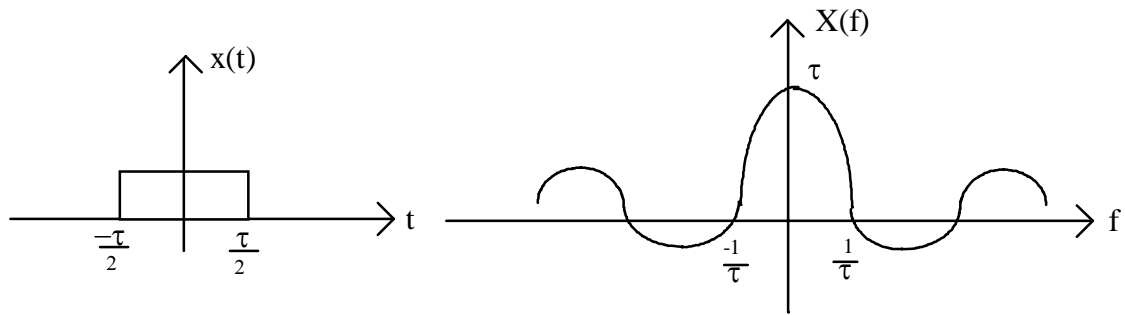
Considérons la fonction porte $x(t) = \prod_{\frac{\tau}{2}}(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

On a :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2\pi jft} dt$$

$$X(f) = \frac{\left[e^{-2\pi jft} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-2\pi jf} = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f} = \tau \text{sinc}(\pi f\tau)$$



Notation :

Dans la suite du cours, les signaux seront représentés par des minuscules x , s , f , etc..., les TF correspondantes par des majuscules X , S , F , etc ... Le temps par la variable t ou τ et la fréquence par f ou ν

Définitions :

- Spectre d'amplitude = $|X(f)|$
- Spectre (ou densité spectrale) de puissance = $|X(f)|^2$
- Spectre de phase = $\text{Arctg} \left(\frac{\text{Im} \{X(f)\}}{\text{Re} \{X(f)\}} \right) = \varphi(f)$

Remarques :

- Il est souvent plus aisé d'interpréter certains phénomènes physiques dans le domaine fréquentiel. C'est l'intérêt essentiel de la TF (Ex: poursuite Radar).
- La symétrie entre la TF et la TF^{-1} montre l'existence d'une dualité entre temps et fréquences. Toutes les informations contenues dans le signal sont contenues dans le spectre.
- La dimension des variables t et f est la seconde et le Hertz. Cependant on peut aussi exprimer cela en mètre et mètre⁻¹, on parle alors de fréquences spatiales.

Conditions d'existence de la TF

Une fonction $f(t)$ admet pour transformée de FOURIER la fonction $F(f)$ si :

- a) $f(t)$ bornée
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe
- c) les discontinuités de $f(t)$ sont en nombre limité.

Une grande partie des signaux étudiés répondent à ces conditions. Ceci est dû, en partie, au fait qu'ils sont observés sur une durée finie.

Attention ces conditions ne sont pas nécessaires lorsqu'il s'agit de distributions. Les fonctions périodiques ou les distributions $\delta(t)$ et $|_{-I_-|_T}(t)$ ont des TF.

Propriétés :

- *Linéarité* : TF et TF^{-1} sont des opérateurs linéaires.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda x(t) + y(t) \underset{\text{TF}^{-1}}{\overset{\text{TF}}{\Leftrightarrow}} \lambda \cdot X(f) + Y(f)$$

- *Similitude* : Une dilatation dans le domaine temporel correspond à une contraction dans le domaine fréquentiel

$$\forall a \in \mathbb{R}, f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right)$$

Dem :

En posant $at = t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-2\pi jft} dt = \text{Signe}(a) \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-2\pi j\left(\frac{f}{a}\right)t'} dt' = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right)$$

- *Translations* :

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &\underset{\text{TF}}{\Leftrightarrow} \exp(-2\pi jft_0) X(f) \\ X(f - f_0) &\underset{\text{TF}^{-1}}{\Leftrightarrow} \exp(+2\pi jf_0 t) x(t) \end{aligned}$$

Dem :

En posant $t - t_0 = t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-2\pi jft} dt = e^{-2\pi jft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2\pi jft'} dt' = e^{-2\pi jft_0} X(f)$$

Démonstration identique pour la translation de fréquence.

- *Dérivation en temps* :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\Leftrightarrow 2\pi jf X(f) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\Leftrightarrow (2\pi jf)^n X(f) \end{aligned}$$

Dem :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \frac{d^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df \right]}{d t^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d^n (e^{2\pi j f t})}{d t^n} df$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \text{TF}^{-1} \left\{ (2\pi j f)^n X(f) \right\}$$

- *Dérivation en fréquence :*

$$\frac{dX(f)}{df} \stackrel{\text{TF}^{-1}}{\Leftrightarrow} -2\pi j t x(t)$$

$$\frac{d^n X(f)}{df^n} \Leftrightarrow (-2\pi j t)^n x(t)$$

- *Parité :*

Si $x(t)$ est un signal réel et pair alors son spectre $X(f)$ est réel et pair.

Dem :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-2\pi j f t} dt \stackrel{t'=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-2\pi j (-f) t'} dt'$$

$$X(f) = X(-f) \rightarrow X(f) \text{ pair}$$

$$X(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \right]^* = X(f)^* \rightarrow X(f) \text{ réel}$$

Si $x(t)$ est réel et impair, son spectre $X(f)$ est imaginaire et impair.

- Si $x(t)$ est de carré sommable alors $X(f)$ est de carré sommable

Les transformées à connaître

$$x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow X(f) = 1$$

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow X(f) = \delta(f)$$

$$x(t) = e^{+2\pi j f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$x(t) = \delta(t - t_0) \Leftrightarrow X(f) = e^{-2\pi j f t_0}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2j} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$$

$$x(t) = |_{-} I_{|_T}(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{T} |_{-} I_{|_{\frac{1}{T}}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

Ces fonctions seront utilisées fréquemment, par la suite.

Relation de PARSEVAL

Cette relation est comparable à celle qui existe pour des signaux périodiques.

Soit $x(t)$ un signal de carré sommable (ou à énergie finie) et qui admet $X(f)$ pour TF, on a :

$$\boxed{W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

Dem :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f') e^{2\pi j f' t} df' \right]^* dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j t (f' - f)} dt \right] df df' \end{aligned}$$

L'expression entre crochets est égale à la TF de la fonction unité, calculée à la fréquence $f' - f$, soit $\delta(f' - f)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f' - f) df' \right] df$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f - f') df' = X^*(f)$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ est appelée *densité spectrale d'énergie* ou parfois, abusivement, *densité spectrale de puissance*. On peut montrer de la même façon que, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, l'énergie d'interaction W_{xy} vérifie la relation :

$$\boxed{W_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df}$$

III Convolution et Corrélation

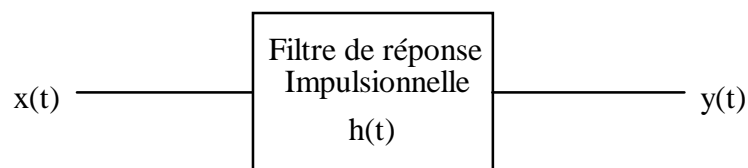
1°) - Convolution.

La convolution est un opérateur fondamental en traitement du signal. Il provient de la théorie des systèmes linéaires et invariants. Soit $h(t)$ la *réponse impulsionnelle* du filtre, c'est à dire la réponse du filtre lorsque l'entrée est un impulsion de Dirac :



La relation entre une entrée quelconque $x(t)$ et la sortie $y(t)$ du filtre est la convolution :

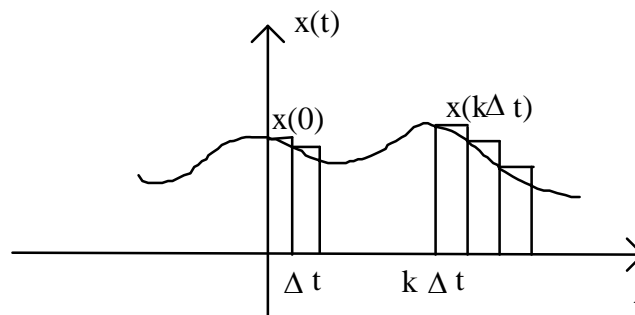
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t - u) du$$



Interprétation

Soit $h_1(t)$ la réponse du système à une impulsion de largeur Δt et de hauteur $\frac{1}{\Delta t}$. $h_1(t)\Delta t$ est donc la réponse à une impulsion de largeur Δt et de hauteur unité.

Décomposons le signal $x(t)$ en une suite d'impulsions de hauteur $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(k\Delta t)$.



La contribution apportée par chaque impulsion de hauteur $x(i\Delta t)$ est :

$$y(0) = x(0) h_1(t - 0)\Delta t; y(\Delta t) = x(\Delta t) h_1(t - \Delta t)\Delta t; \dots; y(i \Delta t) = x(i \Delta t) h_1(t - i\Delta t)\Delta t.$$

En appliquant le principe de superposition, la sortie à l'instant t est donnée par :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t) h_1(t - k\Delta t)\Delta t$$

Si Δt devient très petit alors l'impulsion tend vers un pic de Dirac et, par conséquent, la réponse $h_1(t)$ tend vers la réponse impulsionnelle $h(t)$. On trouve pour $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t - u) du$$

Propriétés

- *Commutativité* : $x(t) * g(t) = g(t) * x(t)$
- *Distributivité* : $[x(t) + s(t)] * g(t) = x(t) * g(t) + s(t) * g(t)$
- *Associativité* : $[x(t) * s(t)] * g(t) = x(t) * [s(t) * g(t)]$

- *$\delta(t)$ élément neutre* : $\delta(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)g(t - u) du = g(t)$

- *$\delta(t - t_0)$ élément de translation* :

$$\delta(t - t_0) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u - t_0)g(t - u) du = g(t - t_0)$$

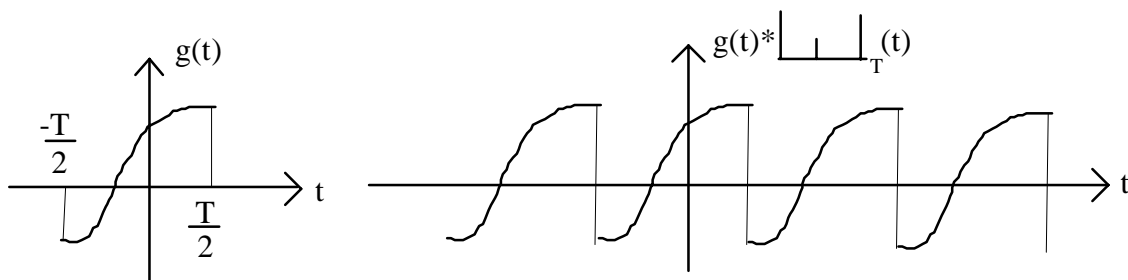
- *Dérivation* : $(x(t) * y(t))' = x'(t) * y(t) = x(t) * y'(t)$

On en déduit que la convolution par le peigne de Dirac $|_I_T(t)$ a pour effet de périodiser le signal. En effet :

$$|_I_T(t) * g(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right] * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(t - nT) * g(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT)$$

Exemple :

Soit $g(t)$ un signal défini sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$. Le produit de convolution $|_I_T(t) * g(t)$ restitue un signal périodique :

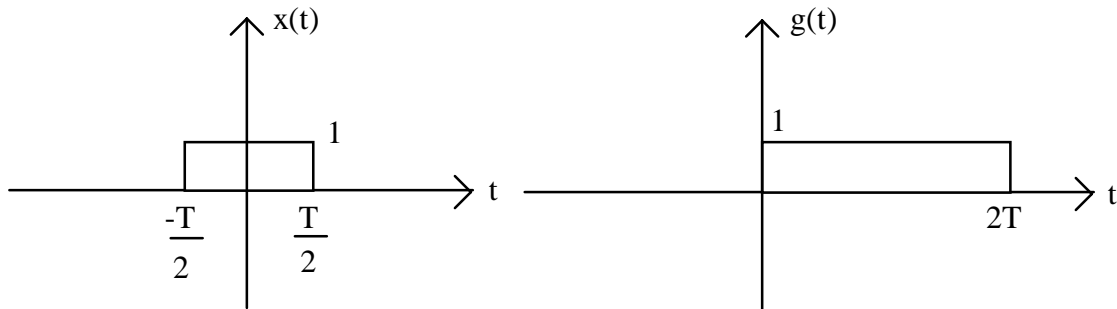


- *Produit de convolution de Dirac*:

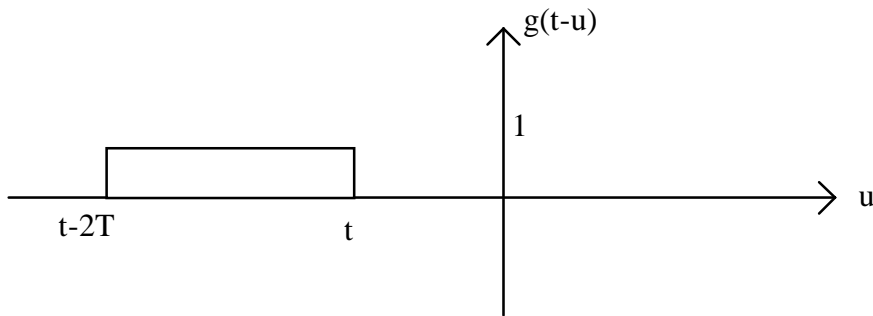
$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

Exemple :

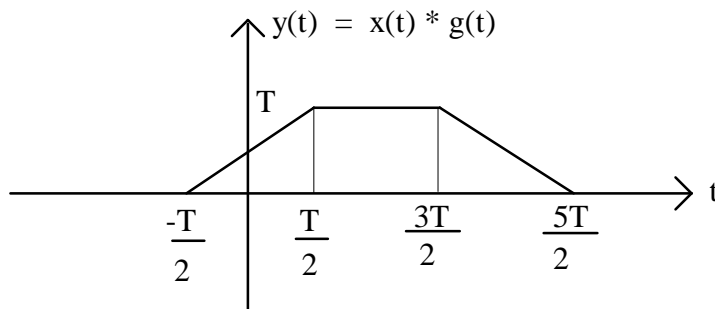
Soit $x(t) = \Pi_{\frac{T}{2}}(t)$ et $g(t) = \Pi_T(t - T)$. Calculons $y(t)$.



d'où :



et :



Théorème de PLANCHEREL

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux ayant pour transformée $X(f)$ et $Y(f)$. PLANCHEREL a démontré que :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{TF}(x(t) * y(t)) &= X(f)Y(f) \\ \text{TF}(x(t)y(t)) &= X(f) * Y(f) \end{aligned}}$$

Dem :

$$\text{TF}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du \right] e^{-2\pi j t f} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) e^{-2\pi j t f} dt \right] du$$

$$\text{TF}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \right] e^{-2\pi j f u} du = X(f)Y(f)$$

La seconde relation se démontre de la même façon.

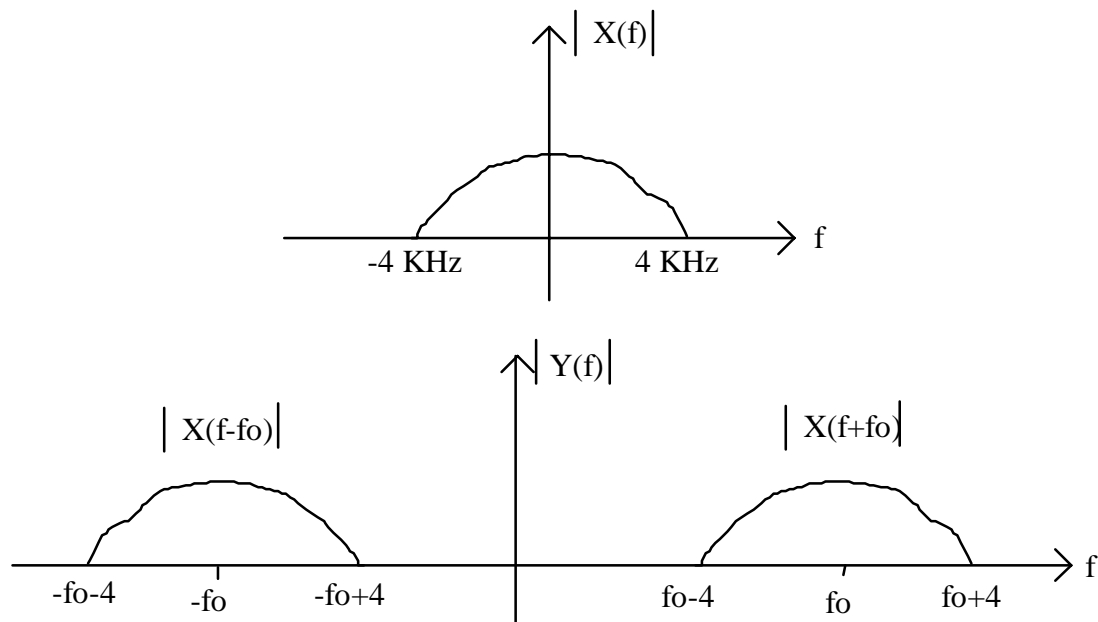
Application :

Ce théorème est utilisé dans de nombreuses applications. Prenons l'exemple du téléphone où le problème est de transmettre simultanément et sur un même canal de transmission un grand nombre de messages.

Considérons, dans un premier temps, un message $x(t)$ qui occupe la bande $[-4\text{KHz}, 4\text{KHz}]$ (bande passante de la voix humaine définie par les Télécommunications). Comment translater son spectre $X(f)$ autour des fréquences f_0 et $-f_0$? Pour réaliser cela il suffit de multiplier $x(t)$ par $\cos(2\pi f_0 t)$. D'après le théorème de PLANCHEREL on a :

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) * \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right]$$

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow Y(f) = \frac{X(f - f_0)}{2} + \frac{X(f + f_0)}{2}$$

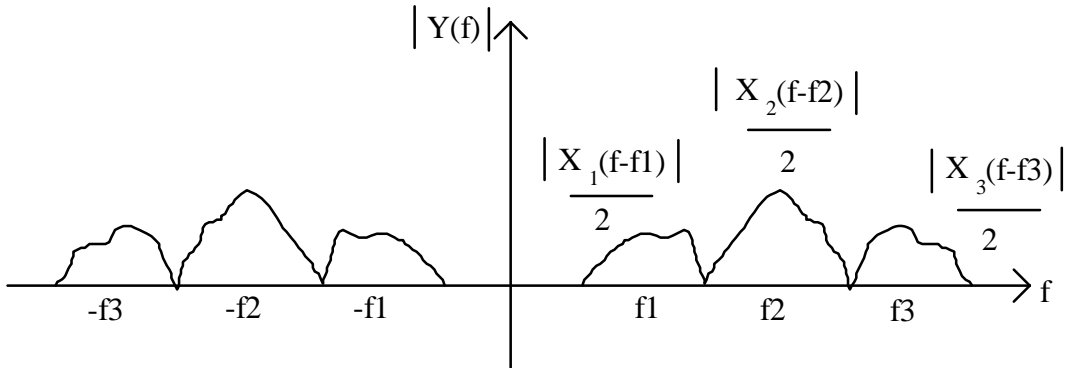


Cette opération est appelée modulation d'amplitude sans porteuse (MASP), bien que f_0 soit appelée porteuse. Il existe d'autres types de modulations (fréquence, phase,...). On pourra consulter sur ce point l'ouvrage de A.SPĂTARU.

En conclusion, si l'on désire transmettre simultanément et sur une même ligne les signaux $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, il suffit de construire le signal $y(t)$:

$$y(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_1 t) + \dots + x_n(t) \cos(2\pi f_n t)$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont les porteuses associées à $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.



En réception, pour retrouver le message $x_i(t)$, il faut filtrer $y(t)$ par un filtre passe-bande $[f_i - 4\text{KHz}, f_i + 4\text{KHz}]$ puis démoduler le signal de sortie du filtre (translation du spectre autour de l'origine des fréquences) afin que le message soit audible.

Relation entre série de Fourier et TF

Soient $x(t)$ un signal périodique de période T et $x_T(t)$ le signal tronqué sur une période défini par :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[\\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

On a :

$$x(t) = x_T(t) * |_{-1} |_T(t)$$

d'où :

$$X(f) = \frac{1}{T} X_T(f) |_{-1} |_{\frac{1}{T}}(f)$$

Soit encore :

$$(1) \quad X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

De plus le signal $x(t)$ étant périodique, il s'écrit aussi :

$$(2) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j \frac{n}{T} t} \quad \text{et} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

En comparant les expressions (1) et (2) on trouve :

$$C_n = \frac{X_T\left(\frac{n}{T}\right)}{T}$$

Le spectre du signal périodique est donc obtenu, à un facteur près, après échantillonnage du spectre du signal tronqué.

2°) - Corrélation.

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie, la fonction d'intercorrélation $C_{xy}(\tau)$ est définie par :

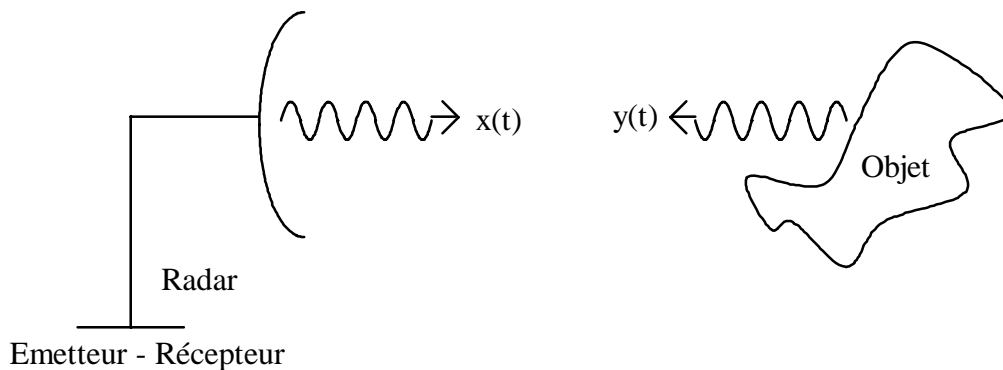
$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

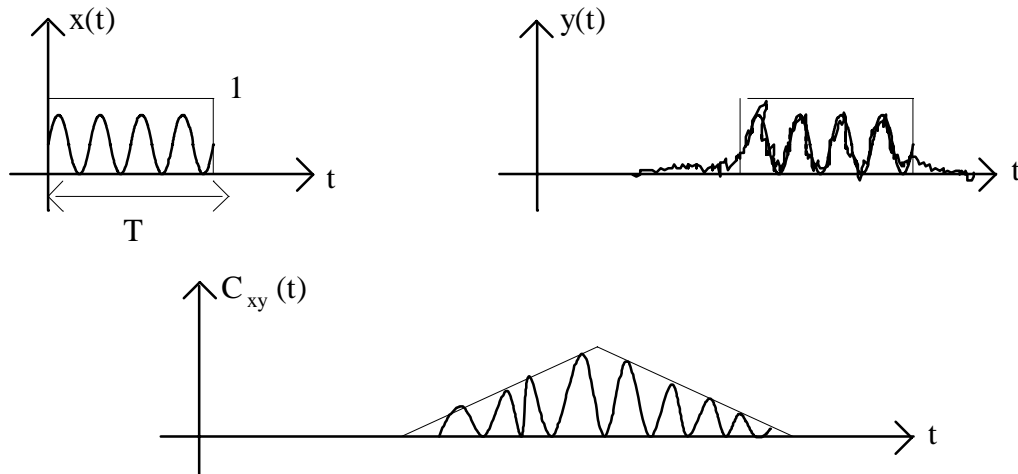
Ce produit scalaire mesure les similitudes en forme et position des signaux. Ces similitudes peuvent évoluer au cours du temps τ . On remarque de plus, que $C_{xy}(\tau)$ restitue l'énergie d'interaction entre les signaux $x(t)$ et $y(t - \tau)$.

Si $C_{xy}(\tau) = 0$ on dit que les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont décorrélés ou orthogonaux.

Exemple

Un radar émet une impulsion sinusoïdale $x(t)$ sur un objet fixe et reçoit le signal bruité $y(t)$.





Le maximum τ_0 donne la distance à l'objet. En effet si v_0 est la vitesse de propagation de l'onde on a :

$$d = \frac{v_0 \tau_0}{2} \leftarrow \text{trajet Aller et Retour}$$

Si $x(t)=y(t)$, $C_{xx}(\tau)$ est appelé fonction *d'autocorrélation* du signal $x(t)$.

Propriétés

- La fonction d'intercorrélacion vérifie la relation :

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}^*(-\tau)$$

Dem :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt \stackrel{t-\tau=t'}{=} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t'+\tau)y(t') dt' \right]^*$$

$$C_{xy}(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t')x^*(t'-(-\tau)) dt' \right]^*$$

d'où :

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}^*(-\tau)$$

On en déduit que $C_{xx}(\tau)$ est à symétrie hermitienne :

$$C_{xx}(\tau) = C_{xx}^*(-\tau)$$

Et si $x(t)$ est réel sa fonction d'autocorrélation est paire.

- L'énergie totale W_x d'un signal $x(t)$ est :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = C_{xx}(0) > 0$$

-Le théorème de Cauchy-Schwartz conduit aux relations suivantes

$$\begin{aligned} |C_{xx}(\tau)| &\leq C_{xx}(0) & \forall \tau \\ |C_{xy}(\tau)|^2 &\leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) & \forall \tau \end{aligned}$$

Théorème de Wiener-Kintchine

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie. La TF de la fonction d'intercorrélation est égale à la densité interspectrale d'énergie (ou densité spectrale mutuelle).

$$\boxed{\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)}$$

Dem :

$$\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau = S_{xy}(f)$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \right] e^{-2\pi j f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{t' = t - \tau}{y^*(t - \tau)} e^{-2\pi j f \tau} d\tau \right] dt$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t') e^{+2\pi j f t'} dt'$$

$$S_{xy}(f) = X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t') e^{-2\pi j f t'} dt' \right]^* = X(f) Y^*(f)$$

Si $x(t)=y(t)$ alors $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$.

$S_{xx}(f)$ est la *densité spectrale d'énergie*. C'est une *fonction réelle positive*.

Relation Convolution - Corrélation

Si $C_{xy}(\tau)$ est l'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $y(t)$ alors:

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

Dem :

$$\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f) = X(f) Y^*(f)$$

d'où

$$C_{xy}(\tau) = \text{TF}^{-1}\{S_{xy}(f)\} = x(t) * \text{TF}^{-1}\{Y^*(f)\}$$

avec

$$\text{TF}^{-1}\{Y^*(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f)e^{2\pi jf\tau} df = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{2\pi jf(-\tau)} df \right]^* = y^*(-\tau)$$

3°) - Cas des signaux à puissance moyenne finie.

Dans le cas où les signaux sont à puissance moyenne finie, la convolution s'écrit :

$$x(t) * y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(u)y(t-u) du \right\}$$

De même la corrélation est définie par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau) dt \right\}$$

Si de plus les $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques et de même période T_0 , on peut simplifier les expressions précédentes :

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(u)y(t-u) du \\ C_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t-\tau) dt \end{aligned}$$

Densité interspectrale de puissance

La TF de la fonction d'intercorrélation de deux signaux à puissance moyenne finie est appelée densité interspectrale de puissance $S_{xy}(f)$

$$\text{TF}\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f)$$

Soient $x(t, T)$ et $y(t, T)$ deux signaux à énergie finie définis par :

$$x(t, T) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t, T) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont tels que :

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \{x(t, T)\} \quad \text{et} \quad y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \{y(t, T)\}$$

Soient $X(f, T)$ et $Y(f, T)$ les transformées de $x(t, T)$ et $y(t, T)$. On démontre que :

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{X(f, T) Y^*(f, T)}{T} \right\}$$

Dem :

La puissance totale P_{xy} est :

$$(1) \quad P_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) df$$

Mais aussi :

$$P_{xy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, T)y^*(t, T) dt$$

d'où, en appliquant la relation de PARSEVAL pour les signaux à énergie finie $x(t, T)$ et $y(t, T)$:

$$(2) \quad P_{xy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f, T)Y^*(f, T) df$$

En identifiant (1) et (2) :

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{X(f, T)Y^*(f, T)}{T} \right\}$$

Si $x(t) = y(t)$, la *densité spectrale de puissance* est:

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \right\}$$

4°) - Analyse spectrale.

L'analyse spectrale des signaux tient une place importante dans un grand nombre d'applications (Télécommunications, Géophysique, Biochimie,...). On peut citer comme exemple, l'analyse spectrale de signaux de parole qui fournit une indication sur le sexe du locuteur. En effet, les signaux de parole sont en grande partie voisés (quasi-périodiques). La hauteur de la fréquence fondamentale est d'environ 100-150 Hz pour un homme, 150-250 Hz pour une femme et peut aller jusqu'à 400 Hz pour un enfant.

Un autre exemple est celui de la poursuite d'une cible mobile. Le signal réfléchi par la cible fournit des informations sur la vitesse et la position de l'objet.

Ambiguïté: Durée d'un signal-Largeur spectrale.

En théorie un *signal de durée finie* (support borné) possède un *spectre de largeur infinie* (support infini). Corrélativement, un spectre à support borné correspond à un signal de durée illimitée.

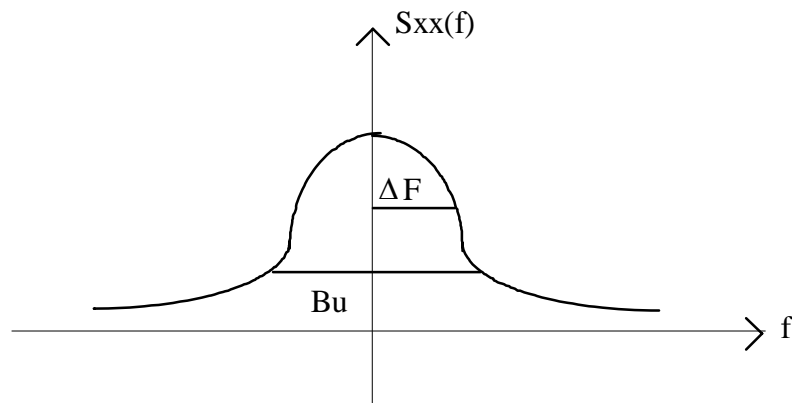
Expérimentalement, le problème est le suivant: "Comment étudier un signal, sur une durée limitée T (donc avec un spectre à support infini), avec un instrument qui a une bande passante finie ?". Il est évident que, si la puissance du signal décroît rapidement en fonction de la fréquence, on a intérêt à utiliser un instrument dont la bande passante est très supérieure à la *bande utile* du signal. L'effet du filtrage (passage du signal dans l'instrument) est alors réduit.

La notion de bande utile est liée à l'application. Soit $x(t)$ un signal d'énergie totale W_x et de densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$. On définit la bande utile B_u par :

$$\Delta F = \sqrt{\frac{1}{W_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_{xx}(f) df}$$

et

$$B_u = 2 \alpha \Delta F \quad \text{avec } \alpha \text{ choisi arbitrairement.}$$

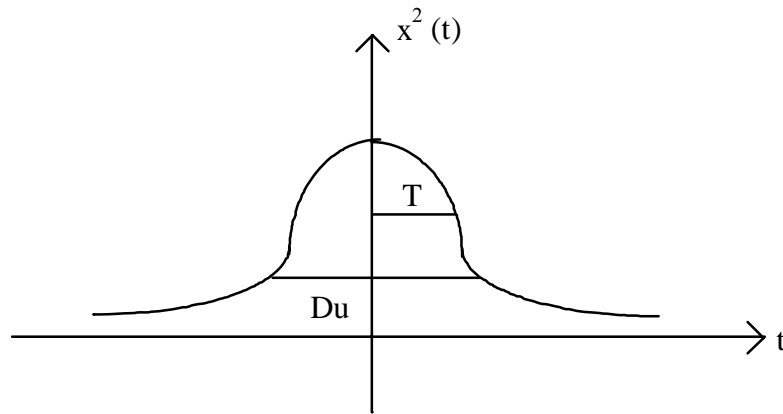


De même on définit la durée utile D_u d'un signal $x(t)$ par :

$$D_u = 2\beta T \quad \text{avec } \beta \text{ choisi arbitrairement.}$$

et :

$$T = \sqrt{\frac{1}{W_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x^2(t)| dt}$$



En utilisant la relation de Cauchy-Schwartz on en déduit la *relation d'incertitude* :

$$\boxed{B_u D_u \geq \text{Cte}}$$

Cette relation montre qu'un signal (resp. un spectre) à fluctuations rapides possède un spectre (resp. un signal) large.

Dem :

En utilisant la relation de Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt$$

En intégrant par partie, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} [t x^2(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = -\frac{W_x}{2}$$

de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_{xx}(f) df = 4\pi^2 W_x \Delta F^2$$

d'où :

$$\frac{W_x^2}{4} \leq W_x T^2 4\pi^2 W_x \Delta F^2$$

$$4T\Delta F \geq \frac{1}{\pi} \quad \text{d'où} \quad D_u B_u \geq \frac{\alpha\beta}{\pi}$$

Fenêtres d'observation.

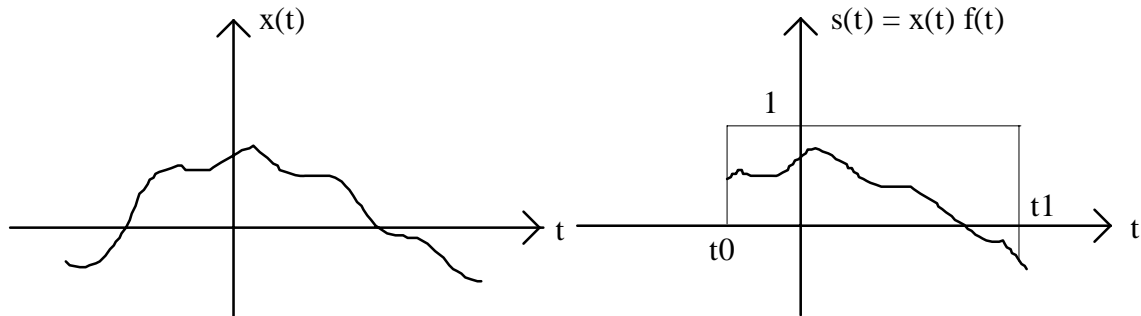
L'analyse d'un signal ne peut s'effectuer que sur une durée finie $[t_0, t_1]$. Si $x(t)$ est le signal initial, le signal observé $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = x(t)f(t)$$

où $f(t)$ est nulle en dehors de $[t_0, t_1]$. $f(t)$ est appelée *fenêtre d'observation* ou *fonction de pondération*.

Exemple : Fenêtre rectangulaire

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



La fenêtre idéale est celle qui ne modifiera pas le spectre $X(f)$ du signal $x(t)$, c'est à dire telle que :

$$S(f) = X(f) * F(f) = X(f)$$

on en déduit :

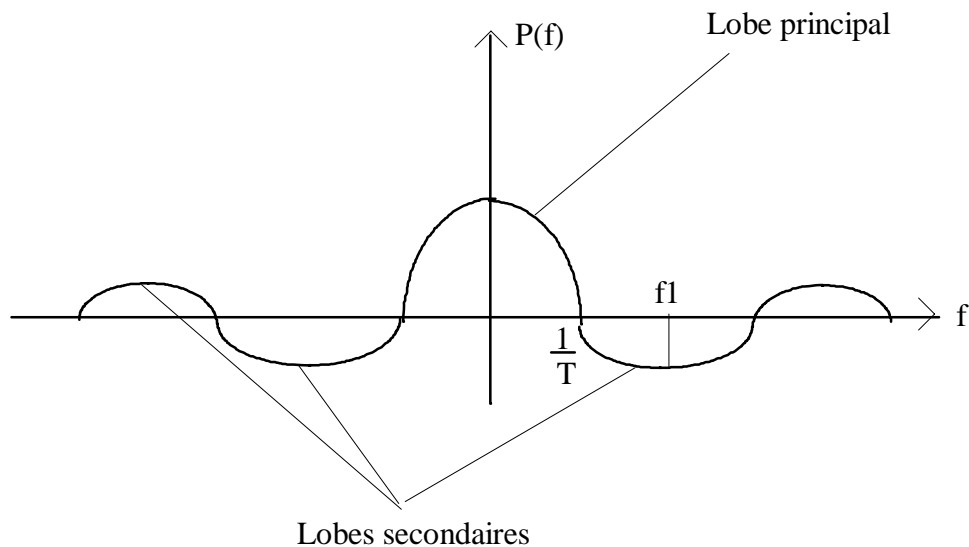
$$F(f) = \delta(f) \Rightarrow f(t) = 1$$

La fonction unité ($f(t) = 1$) définie sur $]-\infty, +\infty[$ n'est pas une fenêtre. On en déduit cependant que la transformée de Fourier d'une fenêtre "satisfaisante", c'est à dire modifiant peu $X(f)$, doit s'approcher du pic de Dirac.

La fonction Porte $\Pi_{\frac{T}{2}}(t)$, appelée aussi fenêtre naturelle fut la première utilisée. Sa transformée $P(f)$ est :

$$P(f) = \text{TF} \left[\Pi_{\frac{T}{2}}(t) \right] = T \text{sinc}(\pi f T)$$

$P(f)$ est constitué d'un lobe principal et de lobes secondaires. Comme on le verra, toutes les transformées de Fourier de fenêtres de pondération possèdent un lobe principal et des lobes secondaires .



Pour restituer au mieux le spectre $X(f)$, il faut que le lobe principal soit le plus étroit possible. De plus pour éviter une dispersion (leakage) de l'énergie vers des fréquences éloignées, il faut que les lobes secondaires soient faibles.

Pour comparer les différentes fenêtres on utilise essentiellement deux critères:

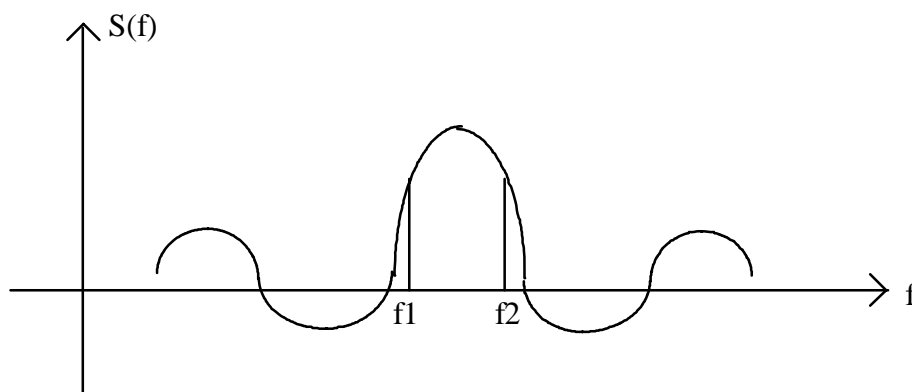
- La largeur de Bande à mi-hauteur : B
- L'amplitude relative du 1^{er} lobe secondaire : Q

$$Q = 20 \text{Log}_{10} \left| \frac{P(f_1)}{P(0)} \right|$$

Où $|P(f_1)|$ est l'amplitude maximale du 1^{er} lobe secondaire.

Dans le cas de la fenêtre naturelle on trouve $B = \frac{1}{T}$ et $Q = -13$ dB.

B définit la *résolution ou pouvoir séparateur* du spectre. Si $X(f)$ est constitué de deux raies aux fréquences très proches f_1 et f_2 ($|f_1 - f_2| < B$), il ne sera pas possible de les distinguer.



La fenêtre naturelle est peu utilisée, en analyse spectrale, car elle présente des lobes secondaires de forte amplitude. Un

très grand nombre de fenêtres ont été proposées. Celles ci sont généralement choisies en fonction de l'application.

Fenêtre de Bartlett (1950): Elle correspond à la fonction triangle

$\Lambda_{\frac{T}{2}}(t)$:

$$\Lambda_{\frac{T}{2}}(t) = \begin{cases} 1 - 2\frac{|t|}{T} & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

avec:

$$\Lambda_{\frac{T}{2}}(t) = \frac{2}{T} \prod_{\frac{T}{4}}(t) * \prod_{\frac{T}{4}}(t)$$

d'où:

$$\text{TF}\left\{\Lambda_{\frac{T}{2}}(t)\right\} = \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$$

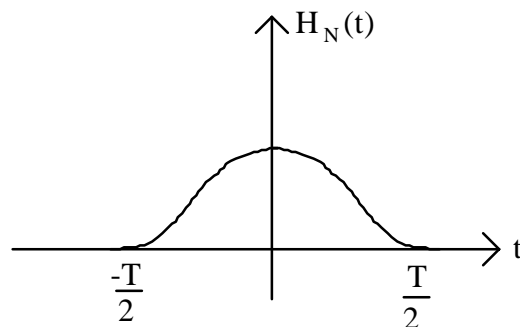
On a: $B = \frac{2}{T}$ et $Q = -26$ dB

Fenêtre de Hanning : (J. VAN HANN)

Elle est définie par :

$$\begin{cases} H_N(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T}\right) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ H_N(t) = 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

$B = \frac{2}{T}$ et $Q = -32$ dB



$$H_N(f) = \frac{1}{2} P(f) + \frac{1}{4} P\left(f + \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4} P\left(f - \frac{1}{T}\right), \text{ avec: } P(f) = \text{TF}\left\{\prod_{\frac{T}{2}}(t)\right\}$$

Fenêtre de Hamming : R.W. HAMMING a étudié une famille de fonctions définies par :

$$\begin{cases} H_m(t) = \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ H_m(t) = 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

La valeur de α qui minimise Q est $\alpha=0,54$. On a alors $B=\frac{2}{T}$ et $Q = -52$ dB. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve la fenêtre de HANNING.

5°) - Filtrage.

Soit S un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Soient $x(t)$ l'entrée de ce filtre et $y(t)$ la sortie :

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \text{et} \quad Y(f) = H(f)X(f)$$

On appelle *réponse indicielle*, la réponse du filtre à un échelon.

$$y_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t) \quad \text{avec} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La réponse indicielle s'obtient en intégrant la réponse impulsionnelle. En effet :

$$y_{\text{ind}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} h(t - \tau) d\tau$$

$$y_{\text{ind}}(t) = \int_{\substack{\uparrow \\ t' = t - \tau}}^t h(t') dt'$$

d'où :

$$\boxed{y_{\text{ind}}(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'}$$

$H(f)$ est la *fonction de transfert* et $H(0)$, le *gain statique* du filtre.

Un filtre est dit réalisable si sa réponse impulsionnelle est causale ($h(t) = 0, \forall t < 0$). Ceci traduit le fait qu'il ne peut y avoir d'effets avant la cause.

On appelle *réponse harmonique*, la réponse du filtre à une entrée de type :

$$x(t) = e^{2\pi j f_0 t}$$

alors :

$$y(t) = e^{2\pi j f_0 t} * h(t)$$

d'où :

$$Y(f) = \delta(f-f_0)H(f) = H(f_0) \delta(f-f_0)$$

soit, après transformation inverse :

$$y(t) = H(f_0)e^{2\pi j f_0 t} = H(f_0) x(t)$$

$$y(t) = |H(f_0)| e^{j\varphi(f_0)} x(t)$$

Cette relation est intéressante pour l'identification des systèmes. En effet, lorsque le filtre est inconnu (Boite Noire), il suffit de faire varier f_0 et d'observer la sortie $y(t)$ pour connaître les caractéristiques fréquentielles du filtre ($|H(f_0)|$, $\varphi(f_0)$).

Dérivation :

Soit $y(t)$ la sortie d'un filtre, de réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

Dem :

$$\text{TF}\{y'(t)\} = Y(f) \cdot 2\pi j f = 2\pi j f \cdot X(f) \cdot H(f)$$

$$\text{et } \begin{cases} \text{TF}^{-1}\{[2\pi j f \cdot X(f)] H(f)\} = x'(t) * h(t) \\ \text{TF}^{-1}\{[2\pi j f \cdot H(f)] X(f)\} = h'(t) * x(t) \end{cases}$$

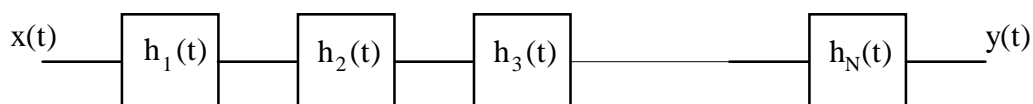
Stabilité :

Un filtre est stable si pour toute entrée bornée, la sortie reste bornée. On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit stable est que sa réponse impulsionnelle soit absolument intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \text{ existe.}$$

Filtres cascades :

Considérons N filtres F_1, F_2, \dots, F_N de réponse impulsionnelle $h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)$.



$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t) \text{ et } Y(f) = X(f) \prod_{i=1}^N H_i(f)$$

Fréquence de coupure :

La définition de la fréquence de coupure F_c est :

En *Traitement du signal* :

F_c est telle que : $\forall f > F_c ; H(f) = 0$.

En *Automatique* :

F_c est telle que : $|H(F_c)| = 1$.

En *Electronique* :

F_c est telle que : $|H(F_c)|^2 = \frac{\text{Max}(|H(f)|^2)}{2}$.

IV Echantillonnage

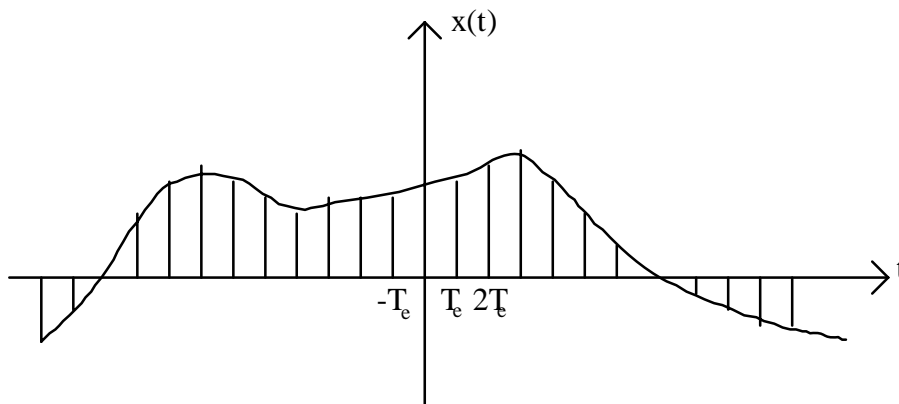
1°) - Echantillonnage idéal.

L'évolution constante, observée depuis 15 ans dans le domaine des circuits intégrés, a transformé le monde des applications. En effet, la puissance des calculateurs, et plus particulièrement des processeurs spécialisés en traitement du signal, permet de traiter *numériquement* un grand nombre de problèmes. Rendant obsolètes certains traitements *analogiques*. De plus le numérique autorise des opérations interdites en analogique (Filtrage Non-Causal, modulation temporelle, ...).

Cette numérisation du signal nécessite dans un premier temps l'*échantillonnage* du signal puis sa *quantification*.

- L'échantillonnage correspond à une discrétisation en temps du signal.

- La quantification permet d'associer une valeur numérique à l'échantillon prélevé. C'est une discrétisation en amplitude. Les valeurs discrètes obtenues sont codées sur un ou plusieurs bits.



L'objectif du traitement numérique du signal est d'extraire les informations contenues dans le signal analogique initial $x(t)$. Il est donc impératif de conserver ces informations après échantillonnage. Pour cela nous étudierons les différentes opérations temporelles et fréquentielles effectuées.

Soient $x(t)$ le signal analogique et $x_e(t)$ le signal échantillonné. Soient T_e la période d'échantillonnage et $F_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage. Le signal $x_e(t)$ est obtenu par multiplication de $x(t)$ par un peigne de Dirac.

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

d'où :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Pour ne perdre aucune information, il faut que cette transformation $(x(t) \rightarrow x_e(t))$ soit réversible.

Déterminons le spectre $X_e(f)$ du signal $x_e(t)$:

$$X_e(f) = \text{TF}\{x_e(t)\} = \text{TF}\{x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\}$$

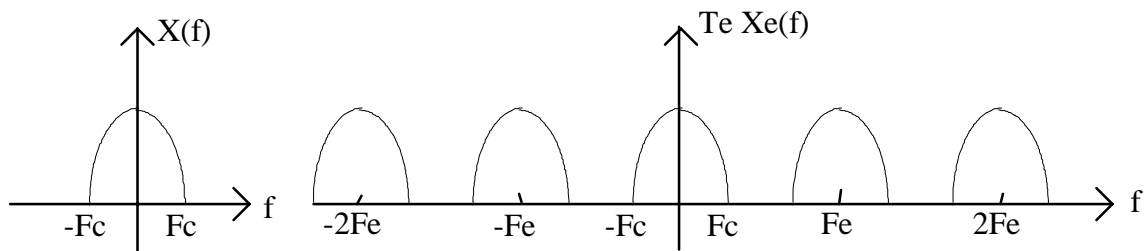
$$X_e(f) = X(f) * \text{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right\} = X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

Cette relation montre que $X_e(f)$ est obtenue, à un facteur près ($1/T_e$), par une simple périodisation en fréquence du spectre $X(f)$. Le spectre est reproduit tous les $F_e = 1/T_e$. Cette périodisation peut s'effectuer suivant trois cas de figures :

1°) : $X(f)$ est à support borné, sa fréquence de coupure est F_c et $F_e > 2 F_c$.



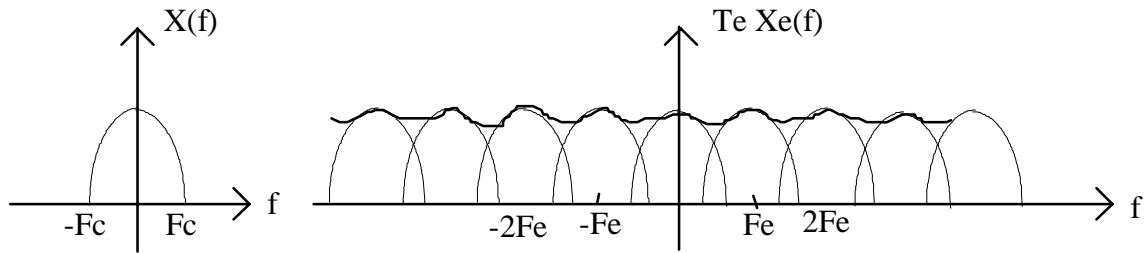
On constate qu'au prix d'un simple filtrage passe-bas idéal, de fréquence de coupure $F_e/2$, on retrouve $X(f)$, donc $x(t)$:

Les informations initiales ne sont pas perdues.

La transformation $(x(t) \rightarrow x_e(t))$ est réversible.

On a correctement échantillonné le signal.

2°) : $X(f)$ est à support borné, sa fréquence de coupure est F_c et $F_e < 2 F_c$



Il est clair que le spectre initial $X(f)$ est déformé. On ne peut pas obtenir $X(f)$ à partir de $X_e(f)$, donc :

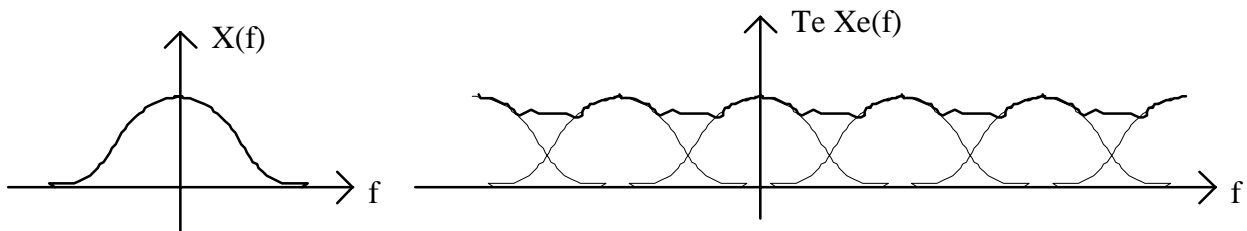
Les informations initiales sont perdues.
La transformation est irréversible.
On a mal échantillonné le signal.

Remarque :

Si après l'échantillonnage les spectres translétés $X(f)$ se chevauchent, on dit qu'il y a repliement spectral, recouvrement spectral ou encore "aliasing".

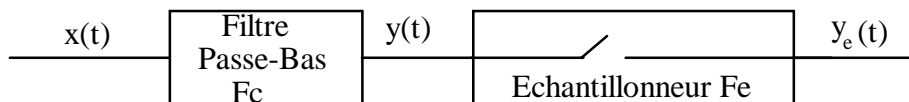
3°): $X(f)$ est à support non-borné.

Dans ce cas, il est évident qu'il y aura repliement spectral.



Il apparaît donc impossible d'échantillonner un tel signal.

En pratique, on filtrera le signal $x(t)$ par un filtre passe bas de fréquence de coupure F_c , puis on échantillonnera le signal de sortie du filtre à une fréquence $F_e > 2F_c$.



THEOREME DE SHANNON : "Un signal $x(t)$ à spectre $X(f)$ borné sur l'intervalle $[-F_c, F_c]$ est correctement échantillonné si $F_e > 2F_c$."

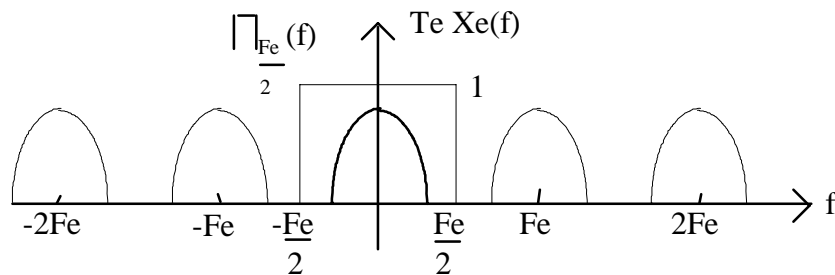
Exemple :

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t) \Rightarrow F_c = F_0 \text{ et } F_e > 2F_0.$$

2°) - Reconstruction du signal.

Pour retrouver $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on supposera que le signal a été correctement échantillonné ($F_e > 2 F_c$). Déterminer $x(t)$ revient à isoler $X(f)$ dans $X_e(f)$. Ceci est possible en multipliant $X_e(f)$ par une porte en fréquence $\prod_{\frac{F_c}{2}}(f)$ de hauteur T_e :

$$X(f) = T_e X_e(f) \prod_{\frac{F_c}{2}}(f)$$



$$x(t) = \text{TF}^{-1}\{X(f)\} = T_e \text{TF}^{-1}\left\{X_e(f) \prod_{\frac{F_c}{2}}(f)\right\}$$

$$x(t) = T_e x_e(t) * \text{TF}^{-1}\left\{\prod_{\frac{F_c}{2}}(f)\right\}$$

$$x(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) * F_e \text{sinc}(\pi F_e t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) (\delta(t - nT_e) * \text{sinc}(\pi F_e t))$$

d'où :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \text{sinc}(\pi F_e (t - nT_e))$$

C'est la formule *d'interpolation de SHANNON*.

Remarques :

1°) Cette formule n'est pas utilisable en temps réel car elle nécessite la connaissance à l'instant t de tous les échantillons ($-\infty \rightarrow +\infty$).

2°) Sur-échantillonner n'apporte aucune information supplémentaire.

3°) Les fonctions $s_n(t) = \text{sinc}(\pi F_e (t - nT_e))$ sont orthogonales. On en déduit que toute fonction à spectre borné $[-F_c, F_c]$ peut être décomposée sur la base $\{s_n(t)\}$.

4°) En supposant $s_n(t)$ très petit lorsque n croît, on approche la formule d'interpolation en tronquant la formule à un petit nombre d'échantillons.

$$x(t) \approx \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(nT_e) \operatorname{sinc}(\pi F_c (t - nT_e))$$

Formule de POISSON

Soit $X(f)$ la TF de $x(t)$. Soit T un réel quelconque, on a :

$$\boxed{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{q}{T}\right)}$$

Dem :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi jfpT} df \\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfpT} \right] df \end{aligned}$$

avec

$$I(f) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfpT} \Rightarrow \operatorname{TF}^{-1}\{I(f)\} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(t + pT) = |_{-} \mathbf{I}_{|_T}(t)$$

Par suite

$$I(f) = \operatorname{TF}\{|_{-} \mathbf{I}_{|_T}(t)\} = \frac{1}{T} |_{-} \mathbf{I}_{|_T}(f) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{q}{T}\right)$$

d'où :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \delta\left(f - \frac{q}{T}\right) df$$

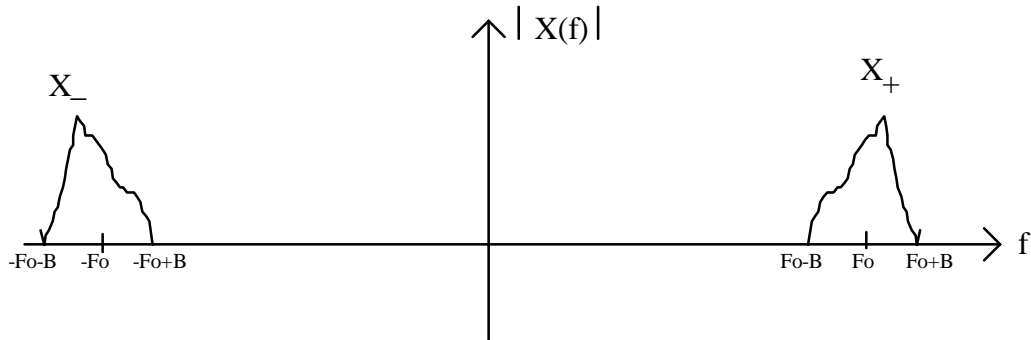
Soit

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(pT) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{q}{T}\right)$$

3°) - Sous-échantillonnage.

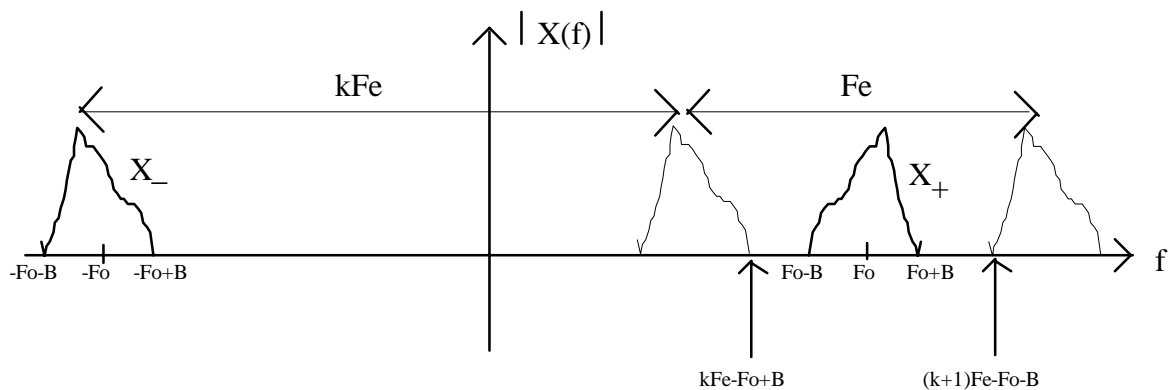
On appelle sous-échantillonnage, l'échantillonnage d'un signal à une fréquence inférieure à celle de SHANNON, c'est à dire telle que $F_e < 2F_c$. **Ceci n'est possible que dans le cas suivant.**

Soit $x(t)$ un signal dont le spectre est nul en dehors des bandes $[-F_0 - B, -F_0 + B] \cup [F_0 - B, F_0 + B]$. (Ex: Modulation d'amplitude de porteuse F_0).



On suppose que $F_0 \gg B$, le signal est dit à bande étroite. Selon SHANNON, on devrait échantillonner $x(t)$ avec une fréquence $F_e > 2(F_0 + B)$. Cependant, on peut exploiter la nullité des spectres entre les bandes $[-F_0 - B, -F_0 + B]$ et $[F_0 - B, F_0 + B]$, en translatant les motifs X_+ et X_- dans cette bande et en prenant soin que X_+ et X_- ne se chevauchent pas.

Supposons que la $k^{\text{ième}}$ translatée de X_- précède X_+ , sans recouvrement, et que la $(k+1)^{\text{ième}}$ translatée suive X_+ , toujours sans recouvrement :



Les bornes de ces translatées doivent vérifier les relations :

$$\begin{cases} kF_e - F_0 + B < F_0 - B \\ (k+1)F_e - F_0 - B > F_0 + B \end{cases}$$

Soit pour F_e , la condition :

$$\boxed{\frac{2(F_0 + B)}{k+1} < F_e < \frac{2(F_0 - B)}{k}}$$

Il faut de plus que : $\frac{2(F_0 + B)}{k+1} < \frac{2(F_0 - B)}{k}$

On obtient la condition suivante sur k :

$$\boxed{k < \frac{F_0 - B}{2B}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Exemple :

Si $F_0 = 10^6$ Hz et $B = 5 \cdot 10^3$ Hz alors $k < 99,5$ et $\frac{2,01 \cdot 10^6}{k+1} < F_e < \frac{1,99 \cdot 10^6}{k}$.

Si $k = 99 \Rightarrow 20,100$ KHz $< F_e < 20,101$ KHz

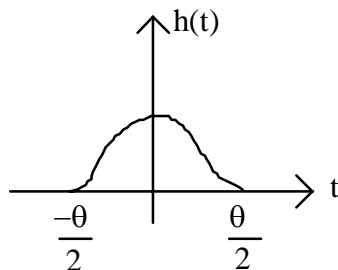
Si $k = 24 \Rightarrow 80,04$ KHz $< F_e < 82,9$ KHz

4°) - Echantillonnage pratique.

En pratique, l'échantillonnage ne peut être réalisé par une impulsion de Dirac. L'échantillon $x_e(kT_e)$ est donc obtenu par intégration du signal $x(t)$ multiplié par une impulsion de largeur θ autour de kT_e .

$$x_e(kT_e) = \int_{kT_e - \frac{\theta}{2}}^{kT_e + \frac{\theta}{2}} x(t) h(t - kT_e) dt$$

où $h(t)$ est une impulsion de forme quelconque et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$:



d'où :

$$x_e(kT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) h(t - kT_e) dt = C_{xh}(kT_e) = x(\tau) * h(-\tau) \Big|_{\tau=kT_e}$$

Cette relation indique que toutes les valeurs $x_e(kT_e)$ sont portées par la fonction $g(t) = x(t) * h(-t)$. Le signal discret $x_e(t)$ est obtenu par échantillonnage **idéal** de $g(t)$:

$$x_e(t) = [x(t) * h(-t)] \Big|_{T_e}(t)$$

$g(t)$ peut être considéré comme la sortie d'un filtre, de réponse impulsionnelle $h(-t)$, excité par $x(t)$. La transformée de Fourier de $x_e(t)$ s'écrit :

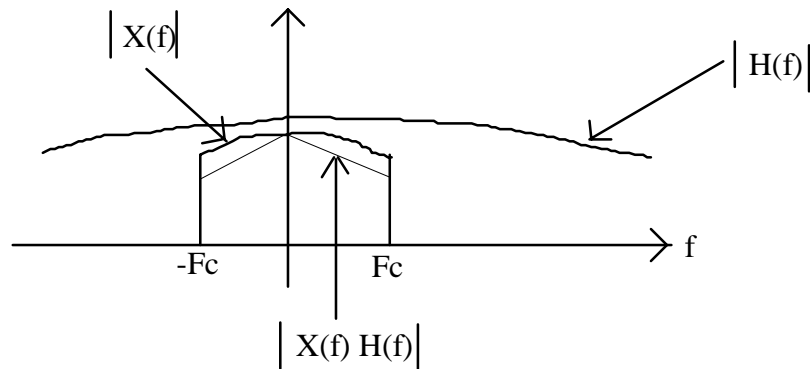
$$X_e(f) = (X(f)H^*(f)) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right) H^*\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

Le spectre $X_e(f)$ est obtenu par périodisation du produit $X(f)H^*(f)$.

Remarque: Si $h(t) = \delta(t)$, on retrouve l'échantillonnage idéal.

Comme θ est petit, $h(t)$ a un spectre $H(f)$ étendu. Il suffit donc que la variation de $H(f)$ soit faible pour que $X(f)$ soit peu modifié.



Cas de l'échantillonneur moyennneur

Dans ce cas $h(t) = \frac{1}{\theta} \prod_{\frac{\theta}{2}}(t)$ et $H(f) = \text{sinc}(\pi f \theta)$.

Posons : $\theta = \lambda T_e$ avec $\lambda \in [0, 1]$ et $F_c = 2\alpha F_c$ avec $\alpha > 1$

On veut que la distorsion sur $X(f)$ due à $H(f)$, soit inférieure à 1 %, pour la fréquence F_c . C'est à dire :

$$\frac{|X(F_c)| - |X(F_c)H(F_c)|}{|X(F_c)|} < 1\%$$

Soit :

$$1 - |H(F_c)| < 1\%$$

$$1 - \text{sinc}(\pi F_c \theta) = 1 - \text{sinc}\left(\frac{\pi \lambda}{2\alpha}\right) < 1\%$$

$$\text{d'où } \text{sinc}\left(\frac{\pi \lambda}{2\alpha}\right) > 0,99$$

ou encore par développement limité :

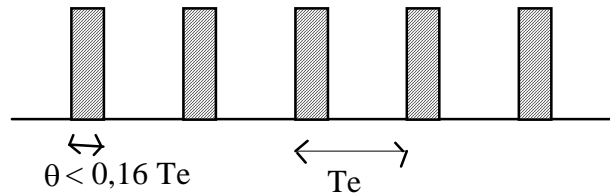
$$1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi \lambda}{2\alpha}\right)^2 > 0,99 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha} < 0,16$$

Exemple : Si on échantillonne à la limite de SHANNON on a :

$$\alpha = 1 \text{ soit } \lambda < 0,16$$

L'ouverture θ de la porte ne peut donc être supérieur à λT_e , soit $0,16 T_e$.

$$\theta < 0,16 T_e \text{ et } T_e = \frac{1}{2F_c}$$

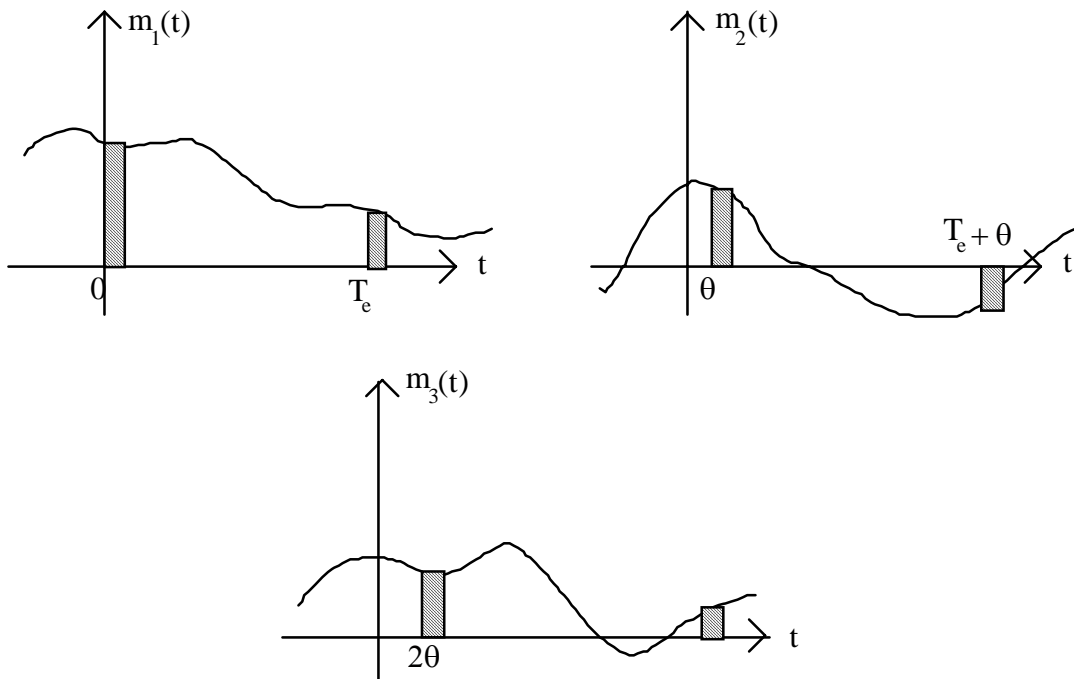


Si par contre, on a $\lambda_{\max} = 1$ alors $\alpha = \frac{\lambda_{\max}}{0,16}$ et $\theta = T_e$ avec $T_e = \frac{1}{13,2F_c}$

Application

Une application de l'échantillonneur moyennneur est la Modulation par Impulsions Codées (MIC). Pour diminuer les coûts de la transmission téléphonique de signaux numérique, on utilise un même échantillonneur pour plusieurs voies. On procède de la façon suivante :

- soient T_e la période d'échantillonnage, θ le temps d'ouverture de la porte et $m_1(t), m_2(t), \dots, m_N(t)$ les signaux à transmettre.



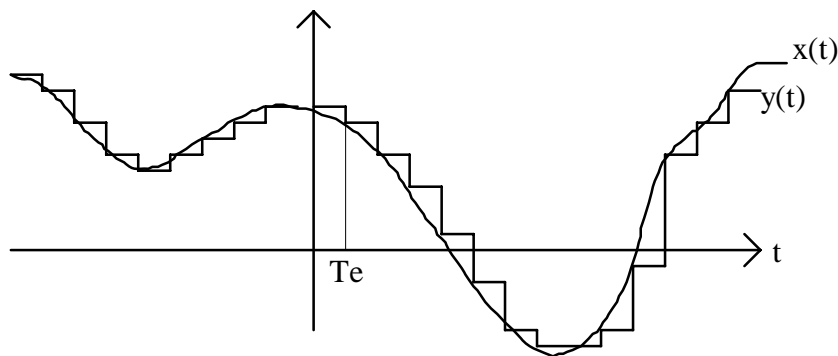
A chaque fin d'acquisition d'un échantillon du message $m_i(t)$ l'échantillonneur commute sur le message $m_{i+1}(t)$. On utilise ainsi l'échantillonneur durant toute la période $T_e (=125 \mu s)$. Si $\theta=4 \mu s$ alors le nombre de signaux transmis est $N=\frac{T_e}{\theta}=30+1$. Ce système est appelé MIC 30 Voies (+ 1 voie de synchronisation).

Reconstitution pratique du signal :

De même que l'échantillonnage idéal est irréalisable, la reconstitution du signal $x(t)$ à partir de la formule d'interpolation de Shannon est impossible. On utilise donc des interpolateurs plus simples. Appelons $y(t)$ le signal reconstitué.

Interpolateur d'ordre 0 ou "Bloqueur".

$y(t)$ est constant par morceaux.



$$y(t) = x_e(kT_e) \text{ pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e[$$

ou encore :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) \prod_{\frac{T_e}{2}} \left(t - kT_e - \frac{T_e}{2} \right)$$

Posons

$$h(t) = \prod_{\frac{T_e}{2}} \left(t - \frac{T_e}{2} \right) \text{ alors :}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) h(t - kT_e)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) \delta(t - kT_e) * h(t)$$

$$y(t) = x_e(t) * h(t)$$

d'où :

$$Y(f) = X_e(f) H(f)$$

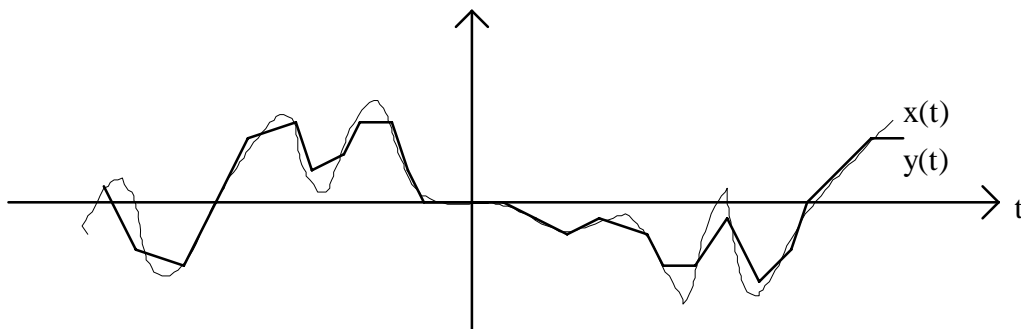
Comme pour l'échantillonnage pratique, on remarque que $X_e(f)$ est modifié par $H(f)$. La distorsion sera d'autant plus faible que le spectre $|H(f)|$ ($= |\text{sinc}(\pi f T_e)|$) sera étendu, c'est à dire que T_e sera petit. On a donc, dans ce cas, intérêt à sur-échantillonner le signal ($F_e \gg 2F_c$).

Remarque : Pour avoir $Y(f)=X(f)$, il faut que $H(f)$ soit une porte de demi-largeur $F_e/2$. Par conséquent, $h(t)$ doit être un sinus cardinal. On retrouve la formule d'interpolation de SHANNON.

Interpolateur d'ordre 1.

Les points sont reliés par une droite.

$$y(t) = x_e(kT_e) + \left[\frac{x_e((k+1)T_e) - x_e(kT_e)}{T_e} \right] (t - kT_e)$$



V Transformée de Fourier Discrète (T.F.D)

1°) - Transformée de Fourier d'un signal périodique et discret.

Soit $x(t)$ un signal défini aux instants kT_e , périodique et de période $T = NT_e$:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \\ x(t + NT_e) = x(t) \end{cases}$$

Le signal tronqué sur une période, $x_T(t)$, s'écrit :

$$x_T(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

d'où

$$x(t) = x_T(t) * \text{[]}_T(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Alors

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2\pi jfkT_e} \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{NT_e}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2\pi j \frac{nk}{N}} \right] \delta\left(f - \frac{n}{NT_e}\right)$$

$$\text{Soit } X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}$$

$$X(f) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \delta\left(f - \frac{n}{NT_e}\right)$$

Comme prévu, le spectre n'est défini qu'aux fréquences multiples de $\frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T}$ (car le signal est périodique (T)). De plus le signal $x(t)$ étant discret (T_e), le spectre est périodique et de période $\frac{1}{T_e} = F_e$

Dem :

$$X\left(f + \frac{1}{T_e}\right) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n) \delta\left(f + \frac{(N-n)}{NT_e}\right)$$

Si $N-n = -n'$

$$X\left(f + \frac{1}{T_e}\right) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} X(n'+N) \delta\left(f - \frac{n'}{NT_e}\right)$$

Avec

$$X(n'+N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2\pi j(n'+N)\frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2\pi j\frac{n'k}{N}}$$

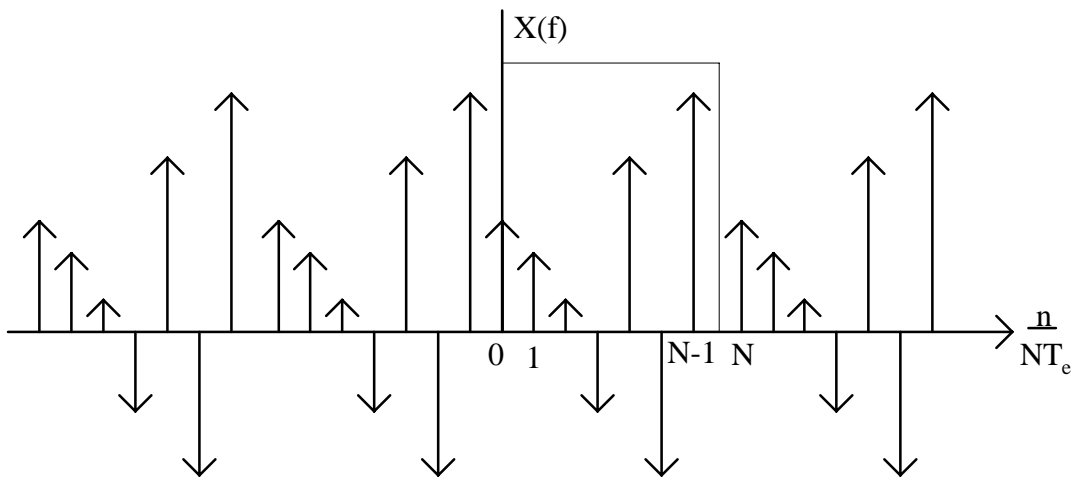
d'où

$$\boxed{X(n'+N) = X(n')}$$

et

$$\boxed{X\left(f + \frac{1}{T_e}\right) = X(f)}$$

Conclusion : Le spectre $X(f)$ est entièrement défini par les raies $X(n)$, pour n variant de 0 à $N-1$.



2°) - Transformée de Fourier Discrète (TFD).

Définition : La transformée de Fourier discrète, sur N points, du signal discret $x(k)$ est définie par :

$$\boxed{\text{TFD}_N \{x(k)\} = X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk}}$$

avec $W_N = e^{\frac{2\pi j}{N}} = \text{Facteur de Rotation}$.

Remarque : Les notations $x(k)$ (échantillonnage temporel) et $X(n)$ (échantillonnage fréquentiel) sont abusives. On devrait écrire :

$$\begin{cases} x(kT_c) \\ X(n \Delta f) \end{cases} \text{ avec } \Delta f = \frac{1}{NT_c} = \frac{1}{T}$$

Δf est l'écart entre deux raies du spectre. Δf est appelé résolution ou pas en fréquence

Propriétés

. $W_N^{Nk} = 1$; $W_N^{\frac{N}{2}} = -1$

. $W_N^{\frac{N}{2}k} = (-1)^k$; $W_N^{\alpha k} = W_{\frac{N}{\alpha}}^k$

- La $TFD_N\{x(k)\}$ est périodique sur N points.

- La formule d'inversion est donnée par :

$$x(k) = TFD_N^{-1}\{X(n)\} = TFD_{I_N}\{X(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{+nk}$$

On en déduit que $x(k) = x(k+N)$.

- Si $x(k)$ est réel alors :

$$X(N - n) = X(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{+nk}$$

$$X(N - n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk} \right]^*$$

$$X(N - n) = X(n)^*$$

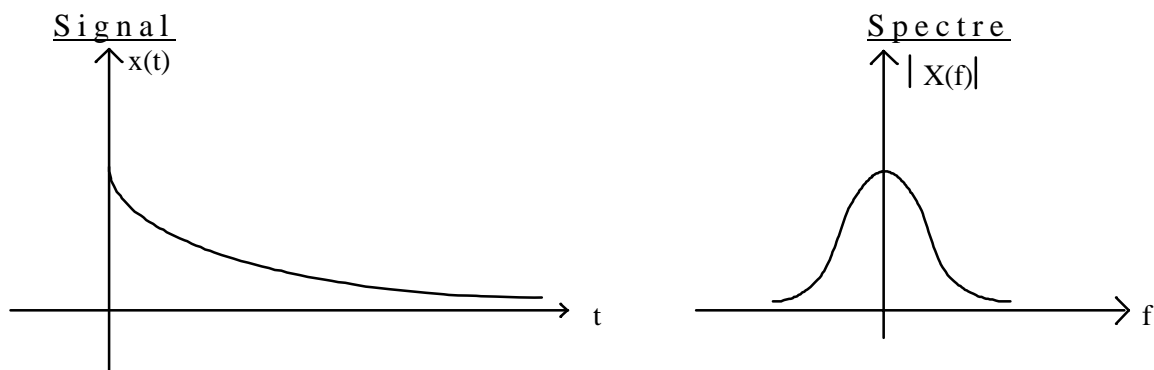
Cette propriété est particulièrement importante pour les applications, car elle permet de diviser par 2 le temps de calcul. En effet, la connaissance de $X(n)$ pour n allant de 0 à $N/2$ suffit à calculer $X(n)$, pour tout n .

Lien entre TF et TFD

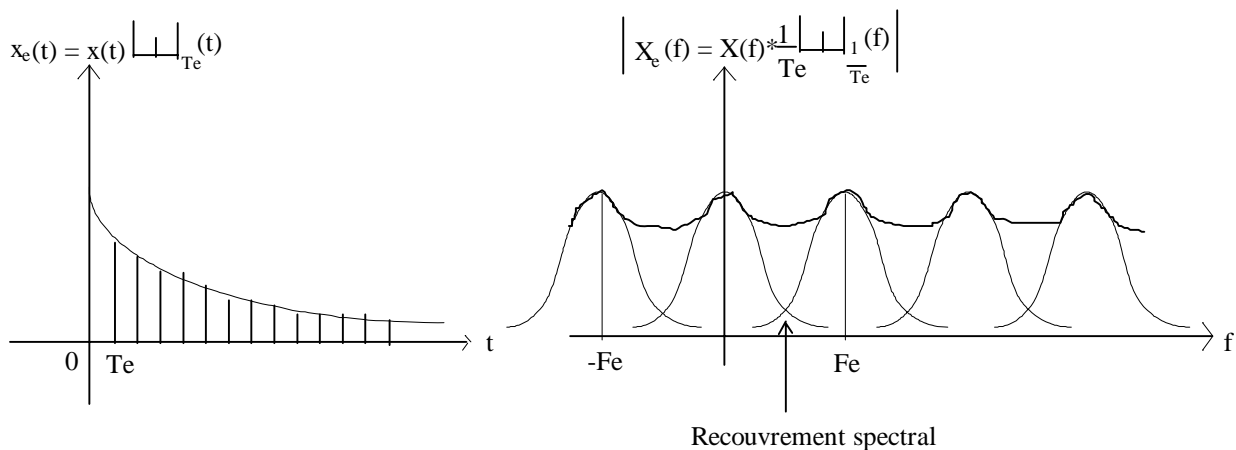
Hélas, les signaux physiques ne sont pas aussi coopératifs (discrets et périodiques). Ils sont le plus souvent quelconques (continus et apériodiques). Pour étudier ces signaux, à l'aide d'une TFD, il faut procéder à un échantillonnage, une troncature, puis une périodisation du signal. On peut alors appliquer la T.F.D. Ces trois opérations ont pour effet de modifier le spectre $X(f)$ du signal $x(t)$.

Ex : Si $x(t) = e^{-at} u(t)$, avec $a > 0$ et $u(t) =$ échelon, alors :

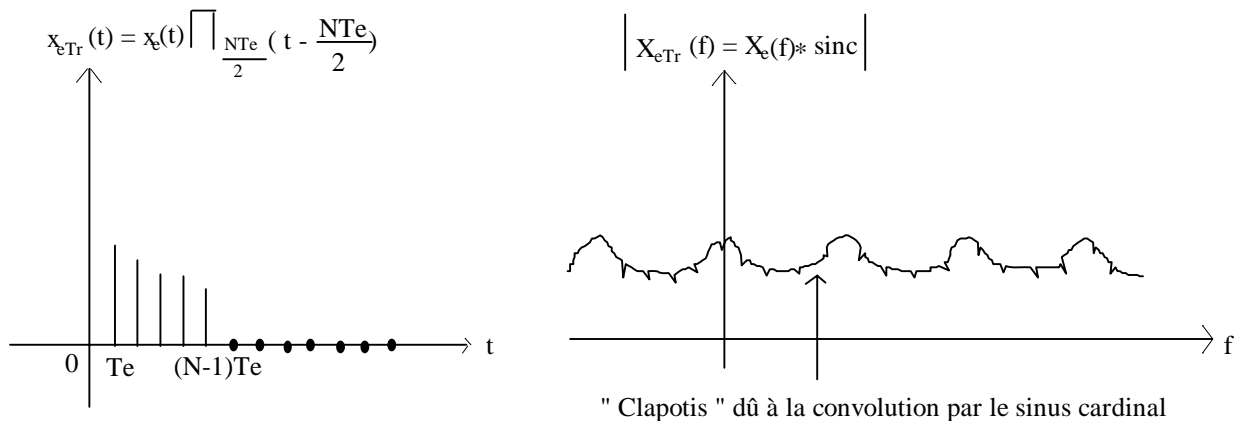
$$X(f) = \frac{1}{a + 2\pi jf} \quad \text{et} \quad |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$



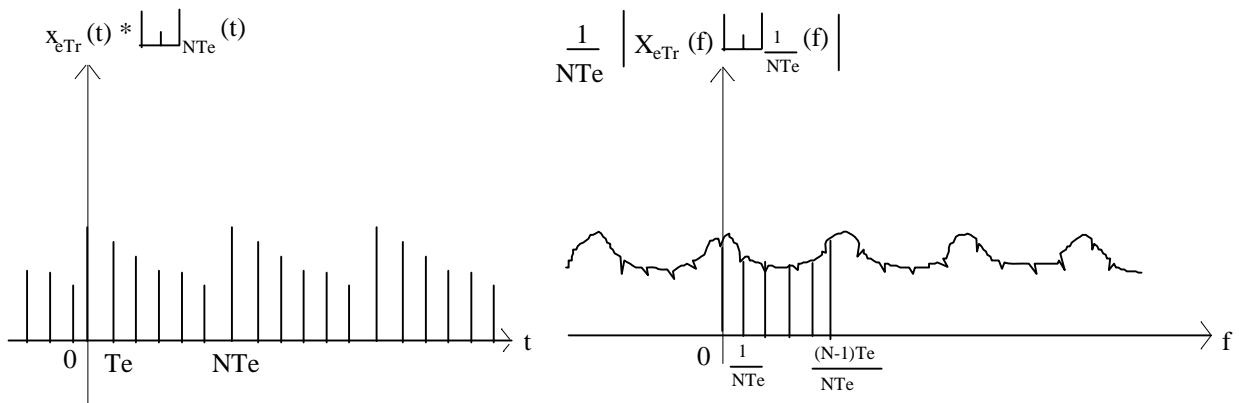
Après échantillonnage à une période T_e :



Après troncature du signal sur N points :



Après périodisation du signal:



Remarques :

- Si le signal est déjà à durée limitée alors, le clapotis disparaît, seul le phénomène de recouvrement subsiste.
- Pour atténuer les clapotis on utilise en pratique des fenêtres de pondération discrètes (Cf Ch.III-4: Analyse spectrale) telles que:

$$\cdot \text{Hanning} = w(k) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right], \quad k \in [0, N-1]$$

$$\cdot \text{Bartlett} = w(k) = 1 - \frac{|k - N/2|}{N/2}, \quad k \in [0, N-1]$$

La transformée $X_p(n)$ du signal $x(k)$ pondéré est:

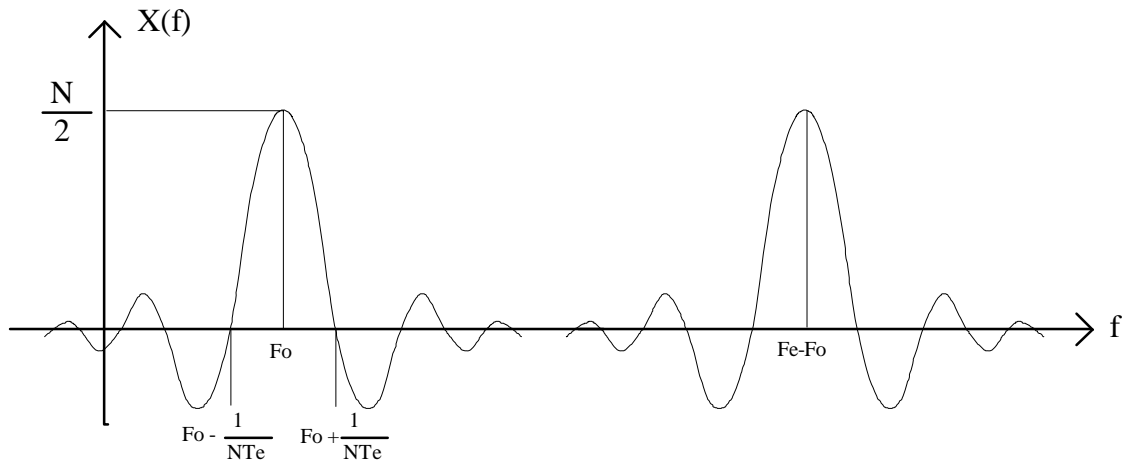
$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k) x(k) W_N^{-nk}$$

Cas des signaux continus périodiques

Prenons l'exemple du signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \text{ alors } X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Après troncature du signal, sur une durée $T = NT_e$, le spectre $X(f)$ est la somme de deux sinus cardinaux centrés en f_0 et $-f_0$. Après échantillonnage à une fréquence F_e , le spectre devient périodique. $X(f)$ est finalement représenté, sur la bande de fréquence $[0, F_e]$, par :



Deux cas se présentent pour le calcul de la T.F.D.

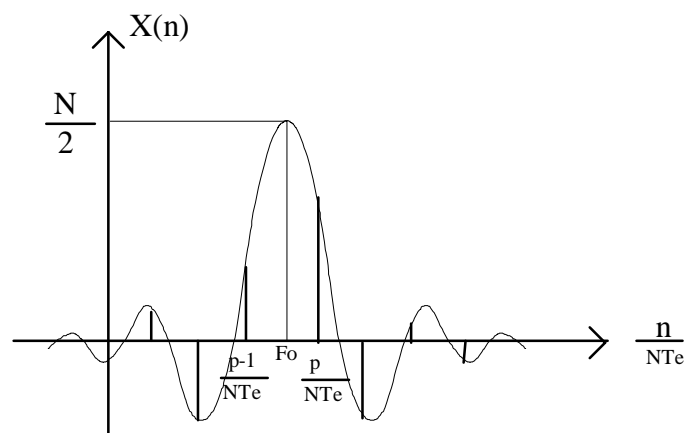
① Si $f_0 = \frac{p}{NT_e}$, avec p entier $\in [0, N - 1]$, alors le spectre $X(n)$ est donné par :

$$X(n) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } n = p \text{ ou } n = N - p \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Dans ce cas la $p^{\text{ième}}$ composante correspond *exactement* à la fréquence f_0 . Les raies éloignées de $\frac{n}{NT_e}$ correspondent alors aux zéros du sinus cardinal.

② Si $f_0 \neq \frac{p}{NT_e}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas $X(n)$ correspond à un échantillonnage de $X(f)$, tel que :



Conclusion: La TF et TFD de ce signal périodique sont identiques, à un terme d'amplitude près, si $f_0 = \frac{p}{NT_e}$. C'est à dire si

l'on tronque le signal sur un nombre entier de périodes ($T = NT_e = pT_0$).

3°) - Convolution discrète.

Comme nous le verrons, dans le chapitre suivant, il existe un algorithme de calcul rapide de la TFD appelé Transformée de Fourier Rapide (TFR). Nous allons essayer, dans ce paragraphe, de déterminer une relation entre convolution et TFD. Cette relation permet de considérablement diminuer le temps de calcul de la convolution, si l'on utilise la TFR.

Cas des signaux périodiques.

Soient $x(k)$ et $y(k)$ deux signaux périodiques et de période N . Le produit de convolution de ces signaux est donné par :

$$z(k) = x(k) * y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k - i)$$

On peut montrer que la TFD de $z(k)$ est :

$$Z(n) = \text{TFD} \{z(k)\} = X(n) Y(n)$$

Dem :

$$Z(n) = \text{TFD} \{z(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k - i) \right] W_N^{-nk}$$

$$Z(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left[\sum_{k=0}^{N-1} y(k - i) W_N^{-nk} \right]$$

Posons $k - i = k'$

$$Z(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left[\sum_{k'=i}^{N-1-i} y(k') W_N^{-nk'} \right] W_N^{-ni}$$

soit S :

$$S = \sum_{k'=i}^{N-1-i} y(k') W_N^{-nk'} = \sum_{k'=i}^{-1} y(k') W_N^{-nk'} + \sum_{k'=0}^{N-1-i} y(k') W_N^{-1}$$

Comme $y(k')$ est périodique sur N points

$$S = \sum_{k'=N-i}^{N-1} y(k') W_N^{-nk'} + \sum_{k'=0}^{N-1-i} y(k') W_N^{-nk'}$$

d'où

$$S = \sum_{k'=0}^{N-1} y(k') W_N^{-nk'} = Y(n)$$

Par suite :

$$Z(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{-ni} Y(n) = X(n) Y(n)$$

On peut donc calculer le produit de convolution à partir du calcul de trois TFD, dont une inverse:

$$z(k) = \text{TFD}^{-1}\{\text{TFD}\{x(k)\} \text{TFD}\{y(k)\}\}$$

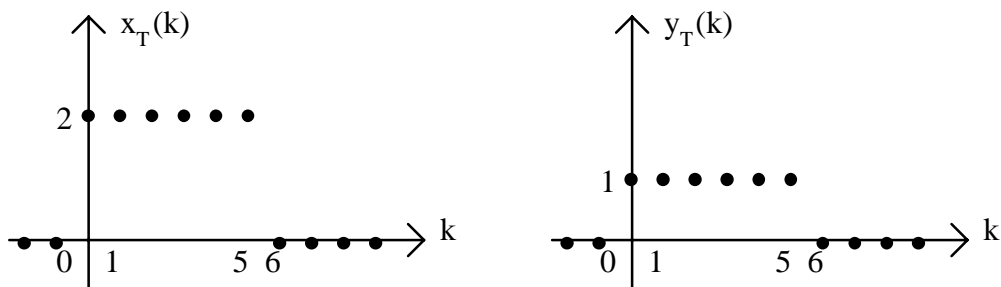
Cas des signaux à durée finie.

Soient $x_T(k)$ et $y_T(k)$ deux signaux définis respectivement sur N_x et N_y points. Pour calculer le produit de convolution, à l'aide de la relation précédente, il faut périodiser $x_T(k)$ et $y_T(k)$ sur une même période N . On pourra alors calculer les TFD sur les signaux périodiques et en déduire $z(k)$. Le problème est : "Comment choisir N ?".

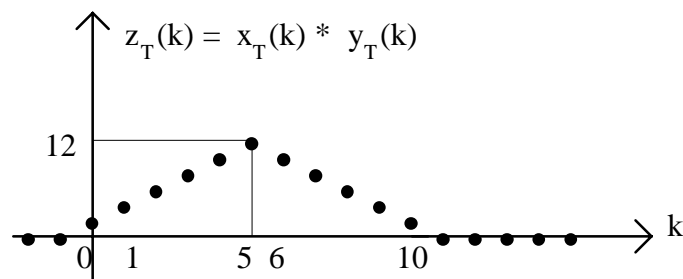
Prenons l'exemple de deux signaux définis par:

$$x_T(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in [0,5] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} ; \quad y_T(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in [0,5] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

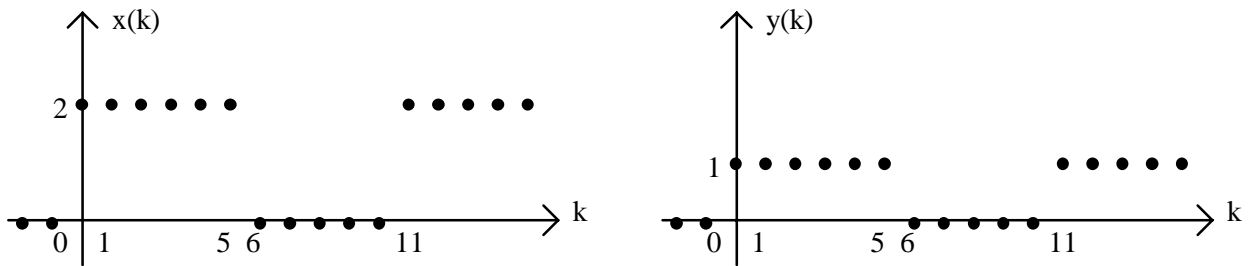
Avec $T_e = 1$ et $N_x = N_y = 6$



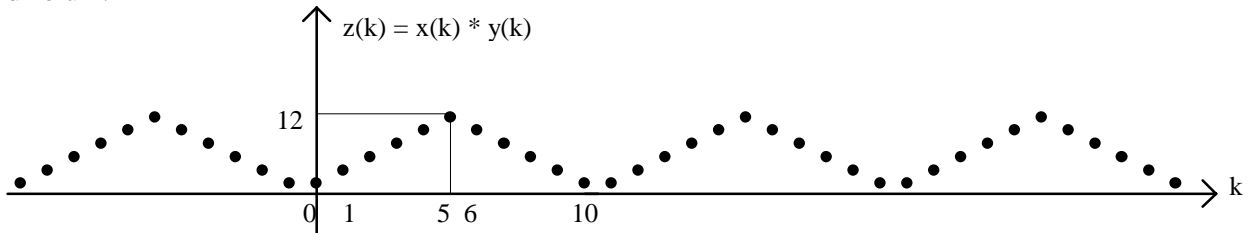
et :



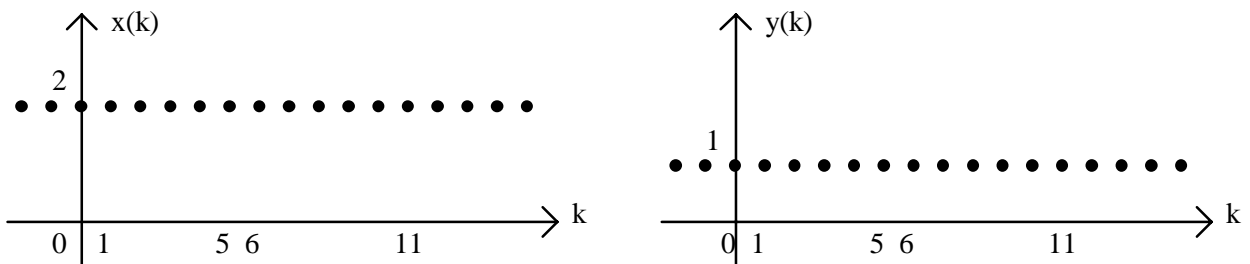
$z_T(k)$ est défini sur $N (=11)$ points. C'est à dire avec $N=N_x+N_y-1$. Soient $x(k)$ et $y(k)$ les signaux périodiques.

- Si $N = 11$ 

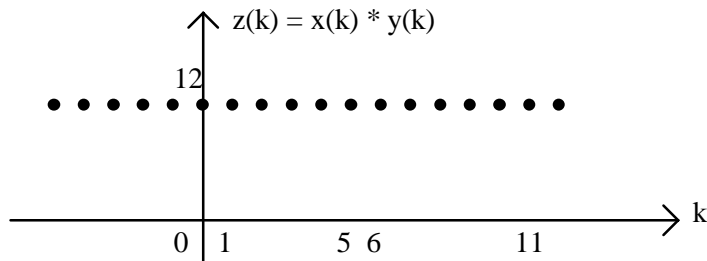
d'où :



$$\text{Avec } z(k) = \sum_{i=0}^{10} x(i) y(k - i)$$

- Si $N = 6$ 

$$\text{d'où } z(k) = \sum_{i=0}^5 x(i) y(k - i) = 12$$



- A l'évidence le produit de convolution est biaisé si $N < N_x + N_y - 1$

- Si $N > N_x + N_y - 1$ alors $z(k)$ est nulle pour $k \in [N_x + N_y, N]$

En conclusion pour calculer le produit de convolution de signaux à durée finie il faut:

- ① Prolonger $x_T(k)$ et $y_T(k)$ par des zéros jusqu'à $k=N-1=N_x+N_y-2$.
- ② Calculer les TFD des deux nouveaux signaux.
- ③ Calculer la TFD inverse du produit.
- ④ En principe le signal $z(k)$ est réel, mais la TFD inverse restituée, le plus souvent, un signal complexe dont la partie imaginaire est non-nulle (très petite). Ceci est dû aux erreurs d'arrondis durant le calcul.

Cas des signaux à énergie finie .

Soient $x(k)$ et $y(k)$ deux signaux à énergie finie. Le produit de convolution $z(k)$ est donné par :

$$z(k) = x(k) * y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) y(k - i).$$

On peut se ramener au calcul par TFD si l'un des signaux est à durée finie. On utilise alors la technique dite de convolution sectionnée (Cf.KUNT).

4°) - Corrélation.

Les relations et propriétés de la corrélation sont analogues à celles établies pour la convolution. Si $x(k)$ et $y(k)$ sont à énergie finie :

$$C_{xy}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) y^*(i - k).$$

Si $x(k)$ et $y(k)$ sont périodiques et de même période N

$$C_{xy}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y^*(i - k).$$

On peut montrer dans ce cas que :

$$S_{xy}(n) = \text{TFD}_N \{ C_{xy}(k) \} = X(n) Y^*(n)$$

Si les signaux $x(k)$ et $y(k)$ sont à durée finie, l'intercorrélation $C_{xy}(k)$ s'obtient en calculant les TFD de $x(k)$ et $y(k)$ sur N points, avec $N=N_x+N_y-1$.

$$S_{xy}(n) = \text{TFD}_N \{ x(k) \} \text{TFD}_N^* \{ y(k) \}$$