PS91

Examen partiel

Durée : 1h
Documents autorisés : AUCUN
Nombre de pages du sujet : 1

Rappels de trigonométrie

$$\left\{\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a \sin b \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ &\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ &\frac{\sin 2\theta}{2} = \sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right.$$

Problème : Étude d'une trajectoire plane

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel et $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère cartésien associé. On s'intéresse à la trajectoire d'un point materiel M qui se déplace dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Le vecteur position de M est donné par : $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y$ avec,

$$\left\{\begin{aligned} x(t) =& r_0\left(\frac{1}{2} + \cos\omega t + \frac{\cos 2\omega t}{2}\right) \\ y(t) =& r_0\left(\sin\omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{, où } r_0 \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives} \tag{1}$$

1. Calculer la vitesse du point M par rapport à $\mathcal{R}$.

2. En déduire que la vitesse scalaire se met sous la forme :

$$v(t) = r_0\omega\,\sqrt{2\,(1+\cos\omega t)}$$

3. En déduire l'expression du vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement ainsi que l'accélération tangentielle.

4. Calculer l'accélération de M par rapport à $\mathcal{R}$.

5. En déduire l'accélération normale puis montrer que le rayon de courbure se met sous la forme :

$$R_c(t) = \frac{2\,r_0}{3}\,\sqrt{2\,(1+\cos\omega t)}$$

6. Calculer la longueur de la trajectoire sur l'intervalle de temps $[0, \frac{\pi}{\omega}]$.

Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base vectorielle associée aux coordonnées polaires de M. Avec les notations habituelles, $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r$ et les coordonnées polaires de M sont notées (r, θ).

7. À partir des coordonnées cartésiennes de M données par l'expression (1), calculer $r(t)$. À partir de (1), exprimer alors, grâce à quelques simplifications et mises en facteur, $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $r(t)$. En déduire l'expression de $\theta(t)$.

8. À partir des coordonnées polaires de M, calculer l'expression de la vitesse dans la base polaire.

9. Retrouver le résultat de la question précédente à partir de l'expression de la vitesse obtenue à la question 1.