EPL - SESSION 2007
CORRIGÉ

Pendule simple.

1. La période des petites oscillations, dans le champ de pesanteur uniforme, d'un pendule simple de longueur ℓ est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\ell = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 0,248\,\mathrm{m}}$$

Remarque. L'équation différentielle à laquelle obéit $\theta(t)$ s'obtient aisément à partir de la conservation de l'énergie mécanique.

2. $\mathcal{R}'$ est en translation non uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. La force d'inertie d'entraînement subit par le point matériel P est donc :

$$\mathbf{F}_{ie} = -m\,\mathbf{a}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -m\,a\,\mathbf{e}_x$$

On en déduit son moment par rapport à O' :

$$\boxed{\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{F}_{ie}) = \mathbf{O'P}\wedge\mathbf{F}_{ie} = -ma\ell\cos\theta\,\mathbf{e}_z}$$

3. Comme $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ la force d'inertie de Coriolis est nulle et il en est de même de son moment par rapport à O'.

4. Le théorème du moment cinétique appliqué à P en O' fixe dans $\mathcal{R}'$ se traduit par :

$$\left(\frac{d\mathbf{L}(O',P/\mathcal{R}')}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{F}_{ext}) + \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{F}_{ie})$$

avec :

$$\mathbf{L}(O',P/\mathcal{R}') = \mathbf{O'P}\wedge m\mathbf{V}(P/\mathcal{R}') = m\ell^2\dot\theta\mathbf{e}_z \text{ et } \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{F}_{ext}) = \mathbf{O'P}\wedge m\mathbf{g} + \mathbf{O'O'}\wedge\mathbf{R} = -mg\ell\sin\theta\,\mathbf{e}_z$$

Compte tenu du résultat de la question 2 on en déduit aisément l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{a}{\ell}\cos\theta}$$

5. Le pendule est en équilibre dans $\mathcal{R}'$ - équilibre relatif - pour $\theta = \theta_0$ tel que :

$$\boxed{\theta_0 = -\arctan\left(\frac{a}{g}\right)}$$

Cet équilibre est stable.

Remarque. On peut déterminer cette position d'équilibre et sa stabilité à partir de l'énergie potentielle totale du pendule dans $\mathcal{R}'$, soit :

$$E_p(\theta) = mg\ell\cos\theta - ma\ell\sin\theta$$

à une constante additive près.

6. On linéarise l'équation différentielle obtenue à la question 4, au voisinage de la position d'équilibre stable θ_0, en posant $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ (ε *petit*). Il vient :

$$\ddot\varepsilon + \frac{g\cos\theta_0 - a\sin\theta_0}{\ell}\varepsilon = 0$$

soit encore, compte tenue que $\sin\theta_0 = \dfrac{-a}{\sqrt{g^2+a^2}}$ et $\cos\theta_0 = \dfrac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}$:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{\ell}\varepsilon = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2+a^2}}}}$$

Tout se passe comme si le pendule était plongé dans un champ de pesanteur d'intensité $\sqrt{g^2+a^2}$.

Lunette astronomique.

7. Les triangles homothétiques AFB et OFJ conduisent à : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{JO}}{\overline{OF}} = -\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OF}}$.

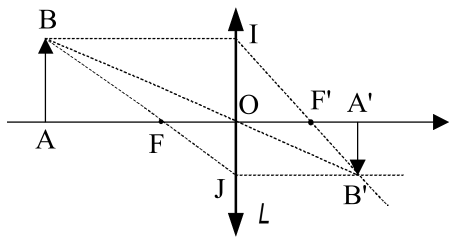
Les triangles homothétiques $OF'I$ et $A'F'B'$ donnent : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = \dfrac{\overline{IO}}{\overline{OF'}} = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OF'}}$.

De ces deux relations on déduit :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

soit la relation de conjugaison de Newton :

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = \overline{OF}.\overline{OF'} = f.f'}$$



Compte tenu que $f = -f'$, la relation précédente peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2}$$

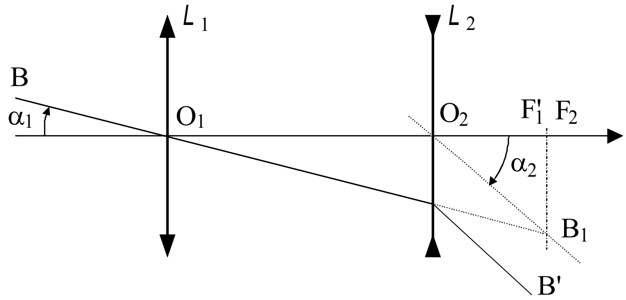
8. On a, par définition, $G_t = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Or, on a vu que $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\overline{OF}}{\overline{FA}}$ et comme par ailleurs $\overline{OF} = f = -f'$, il vient :

$$G_t = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

9. Le système est afocal si $F'_1 = F_2$. La distance entre les centres optiques des deux lentilles est alors :

$$\boxed{e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2 = 20\,\text{cm}}$$

10. On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss.



Les angles α_1 et α_2 sont petits ce qui nous permet d'écrire :

$$\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{\overline{F'_1B_1}}{f'_1} \quad , \quad \alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{F'_1B_1}}{f_2}$$

On en déduit aisément :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{f'_1}{f_2}\alpha_1 = -\frac{f'_1}{f'_2}\alpha_1}$$

11. A l'aide de la relation précédente on obtient pour le grossissement de la lunette :

$$\boxed{G = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 5}$$

12. La lunette est toujours afocale mais l'objet observé est à distance finie. Le grandissement transversal de ce système optique est tel que :

$$\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = G_{t1}G_{t2}$$

En utilisant la relation de Newton on peut écrire :

$$G_{t1} = -\frac{\overline{F'_1A'}}{f'_1} \quad , \quad G_{t2} = \frac{f'_2}{\overline{F_2A'}}$$

Sachant que F_2 et F'_1 sont confondus, il en résulte que :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = G_{t1}G_{t2} = -\frac{f'_2}{f'_1} > 0}$$

Puissance en courant sinusoïdal.

13. La puissance moyenne dissipée dans la résistance variable R est, par définition :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re e\{\underline{u}_R.\underline{i}_R*\} = \frac{1}{2R}|\underline{u}_R|^2$$

L'ensemble (L_1,R) série est soumis à la tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$. En utilisant le diviseur de tension il vient :

$$\underline{u}_R(t) = \frac{R}{R + jL_1\omega}\underline{e}(t)$$

En définitive il vient :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{RE_0^2}{R^2 + (L_1\omega)^2}}$$

14. L_1 et ω sont fixés ; on peut donc écrire $\mathcal{P} = \dfrac{E_0^2}{R + (L_1\omega)^2/R} = \dfrac{E_0^2}{f(R)}$. La puissance est maximale si la fonction f(R) est minimale ce qui est obtenu pour $R = R_0$ tel que $R_0 = \dfrac{(L_1\omega)^2}{R_0}$, soit :

$$\boxed{R_0 = L_1\omega}$$

15. Lorsque la puissance est maximale on a $R_0 = 12\,\Omega$ ce qui nous donne :

$$\boxed{L_1 = \frac{R_0}{\omega} = 3,82.10^{-2}\,\text{H}}$$

16. Dans ces conditions la valeur de la puissance maximale est :

$$\boxed{\mathcal{P}_M = \frac{E_0^2}{2R_0} = 2017\,\text{W}}$$

17. Pour la valeur R_1 de R $(R_1 > R_0)$ la puissance délivrée par le générateur, et absorbée par la résistance, est $\mathcal{P}_1$ telle que :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{R_1 E_0^2}{R_1^2 + R_0^2} = \frac{2R_0 R_1}{R_1^2 + R_0^2}\mathcal{P}_M$$

Il en résulte l'équation du second degré, $R_1^2 - 2\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_1}R_0 R_1 + R_0 = 0$, dont la seule solution acceptable est :

$$\boxed{R_1 = R_0\left[\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_1} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_1}\right)^2 - 1}\right] = 16\,\Omega}$$

18. La tension aux bornes du générateur est en phase avec le courant qu'il débite si l'admittance complexe du circuit est telle que $\Im m\{\underline{Y}\} = 0$. Compte tenu que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL_0\omega} + jC\omega + \frac{1}{R_1 + jL_1\omega} = \frac{1}{jL_0\omega} + jC\omega + \frac{1}{R_1 + jR_0}$$

on en déduit :

$$\boxed{C = \frac{1}{L_0\omega^2} + \frac{R_0}{\omega\left(R_1^2 + R_0^2\right)} = 106.10^{-6}\,\mathrm{F}}$$

Transformations d'un gaz parfait.

19. Un gaz parfait suit la première loi de Joule. Sa variation d'énergie interne lorsqu'il passe de l'état initial (p_i, V_i, T_i) à l'état final (p_f, V_f, T_f) est donc, pour n moles :

$$\boxed{\Delta U = nc_V\left(T_f - T_i\right) = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_f - T_i\right) = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}}$$

20. Le volume balayé par le piston - qui n'atteint pas la paroi fixe $\mathcal{P}_0$ - est la différence entre le volume initial total et le volume final, soit :

$$\boxed{\Delta V = V_A + V_B - V_{f1}}$$

21. Le gaz subit une transformation adiabatique. Le premier principe de la thermodynamique se traduit alors par $\Delta U = W$, soit, comme $p_i = p_f = p_0$ pression atmosphérique :

$$\frac{p_0\left(V_{f1} - V_A\right)}{\gamma - 1} = p_0\left(V_A + V_B - V_{f1}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{V_{f1} = V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma}V_B}$$

Notons que l'on doit avoir $V_{f1} > V_B$ pour que le piston ne vienne par heurter la paroir $\mathcal{P}_0$ ce qui implique $V_B < \left(V_B\right)_{\lim} = \gamma V_A$.

22. A partir de l'équation d'état d'un gaz parfait on obtient :

$$\boxed{T_{f1} = \frac{p_0 V_{f1}}{nR} = \frac{p_0}{nR}\left(V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma}V_B\right)}$$

23. A partir de l'identité thermodynamique $dH = T\,dS - V\,dp$ il vient :

$$dS_1 = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} - nR\frac{dp}{p}$$

Comme $p_i = p_f = p_0$ on en déduit la variation d'entropie du gaz :

$$\boxed{\Delta S_1 = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_{f1}}{T_0}\right) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{V_{f1}}{V_A}\right) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{V_B}{V_A}\right) > 0}$$

Résultat cohérent avec le fait que la transformation est irréversible.

24. On est dans le cas où $V_B > \left(V_B\right)_{lim}$; ainsi, dans l'état d'équilibre final, le piston est en contact avec la paroi $\mathcal{P}_0$. L'évolution du gaz étant toujours adiabatique, le premier principe de la thermodynamique nous conduit à :

$$\frac{p_{f2}V_B - p_0V_A}{\gamma - 1} = p_0V_A$$

On en déduit :

$$\boxed{p_{f2} = p_0\gamma\frac{V_A}{V_B}}$$

25. A partir de l'équation d'état des gaz parfaits il vient :

$$\boxed{T_{f2} = p_0\gamma\frac{V_A}{nR}}$$

Potentiel de Yukawa.

26. Le terme de l'exponentielle doit être sans dimension ; r est une longueur donc a_0 a la dimension d'une longueur.

27. Le problème étant à symétrie sphérique on a $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\mathbf{e}_r = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$, soit :

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)}$$

28. Le flux sortant de **E** à travers une surface sphérique S, de rayon R et de centre O, est défini par :

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E}(R).\left(dS\,\mathbf{e}_r\right)$$

avec $dS = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Il en résulte que :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{R}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{R}{a_0}\right)}$$

29. Du résultat précédent on déduit aisément :

$$\boxed{\lim_{R\to 0}\Phi(R) = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\lim_{R\to +\infty}\Phi(R) = 0}$$

30. Le théorème de Gauss appliqué à la surface sphérique S utilisée précédemment se traduit par :

$$\Phi(R) = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0}$$

On a donc : $\lim_{R\to 0} Q(R) = q$ et $\lim_{R\to +\infty} Q(R) = 0$. Ces résultats nous montrent que la distribution de charge qui crée le potentiel étudié est constituée d'une charge ponctuelle q placée en O et d'une charge $-q$ répartie dans tout l'espace.
Ce potentiel peut donc modéliser celui d'un atome d'hydrogène.

31. V(r) est le potentiel crée par toutes les charges ; $V'(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ est celui crée par la charge ponctuelle q placée en O. Le potentiel crée par la charge $-q$ distribuée dans tout l'espace est, d'après le théorème de superposition :

$$\boxed{V_0(r) = V(r) - V'(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)-1\right)}$$

Tore de section carrée.

32. La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oy donc le champ magnétique **B** est indépendant de θ. Tout plan contenant l'axe de révolution Oy est plan de symétrie de la distribution de courant donc plan d'antisymétrie pour le champ magnétique **B** qui est un pseudo-vecteur. Ce dernier doit être orthogonal à tous ces plans : il est donc orthoradial, $\mathbf{B}(M) = B(M)\mathbf{e}_\theta$.

33. Par définition, le champ magnétique est tangent en tout point M d'une ligne de champ. Il en résulte que les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe Oy.

34. On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire C, de rayon $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$, centré sur l'axe Oy. Il vient :

$$\oint_C \mathbf{B}.d\ell = 2\pi r B = \mu_0 n I$$

Ainsi, la norme du champ magnétique qui règne en un point $M(x,y)$ quelconque du plan xOy à l'intérieur du tore est alors :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi x}}$$

Notons que le champ magnétique est nul à l'extérieur de la bobine.

35. Le flux du champ magnétique à travers une spire du tore - dont la normale est orientée dans le sens du champ - est :

$$\boxed{\varphi = \iint_S \mathbf{B}.(dS\mathbf{e}_\theta) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{R-(a/2)}^{R+(a/2)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right)}$$

Remarque. La notion de flux magnétique n'est pas au programme de première année des classes préparatoires.

36. On a respectivement $B_{max} = \frac{\mu_0 n I}{\pi(2R-a)}$ et $B_{min} = \frac{\mu_0 n I}{\pi(2R+a)}$. Il en résulte que :

$$\boxed{2\frac{B_{max} - B_{min}}{B_{max} + B_{min}} = \frac{a}{R} = 0,10}$$

-:-:-:-:-