

EPL - SESSION 2005 CORRIGÉ

Mécanique du point : expérience de Millikan.

1. En l'absence de champ électrique E , une gouttelette sphérique est soumise à :

♦ son poids $mg = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h g \mathbf{e}_z$;

♦ la poussée d'Archimède $\Pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g \mathbf{e}_z$;

♦ la force de frottement visqueux (*formule de Stokes*) $\mathbf{f} = -6\pi \eta R \mathbf{v} \mathbf{e}_z$.

La deuxième loi de Newton appliquée à la gouttelette dans le référentiel, supposé galiléen, lié au condensateur s'écrit :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = mg + \mathbf{f} + \Pi$$

On en déduit, en projection suivant $\mathbf{e}_z$, l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_h R^2} v = \left(\frac{\rho_a}{\rho_h} - 1 \right) g$$

Avec la condition initiale $v(0) = 0$ cette équation s'intègre en :

$$v(t) = -\frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_h - \rho_a) \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2\rho_h R^2} t\right) \right]$$

Si on pose $\tau = \frac{2\rho_h R^2}{9\eta}$, durée caractéristique du mouvement de la gouttelette, il vient :

$$\boxed{v(t) = -\frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_h - \rho_a) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \mathbf{e}_z}$$

2. La gouttelette atteint, théoriquement au bout d'un temps infini, une vitesse limite :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(t)| = v_0 = \frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_h - \rho_a)}$$

Compte tenu de la valeur de la vitesse limite donnée dans la question suivante on obtient $\tau = 20,4\mu\text{s}$. Ainsi cette vitesse limite sera atteinte, à 10^{-3} près, au bout d'une durée $t = 3\tau \ln(10) = 1,4\text{ms}$; donc, à notre échelle de temps, de manière quasi instantanée.

3. A partir de la mesure de la vitesse limite on détermine le rayon de la gouttelette soit :

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho_h - \rho_a)}} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}}$$

4. La norme du champ électrique uniforme et la différence de potentiel entre les armatures du condensateur sont liées par la relation :

$$\boxed{U = Ed}$$

5. Quand la gouttelette est immobilisée elle est en équilibre sous l'action de son poids et de la force électrique, soit : $mg + (-q)E = 0$. On en déduit la valeur absolue de la charge de la gouttelette :

$$\boxed{q = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_h R^3 g d}{U} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

La charge q est donc égale à un nombre entier de fois (ici $n = 3$) la charge élémentaire e .

Électrocinétique : régime sinusoïdal.

6. On peut écrire : $\underline{V}_s = \underline{V}_A - \underline{V}_B = (\underline{V}_A - \underline{V}_C) + (\underline{V}_C - \underline{V}_B)$.

Les deux résistances R étant identiques on a : $\underline{V}_C - \underline{V}_B = \frac{\underline{V}_C - \underline{V}_D}{2} = \frac{\underline{V}_e}{2}$.

D'autre part le même courant traverse la capacité C et la résistance r qui constituent un diviseur de tension. On a donc : $\underline{V}_C - \underline{V}_A = \frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \underline{V}_e$.

On en déduit alors aisément la fonction de transfert :

$$\left| \underline{T}_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1 - j r C \omega}{2(1 + j r C \omega)} \right|$$

Notons que : $\underline{E}_{Th} = (\underline{V}_s)_{i_s=0} = \frac{1 - j r C \omega}{2(1 + j r C \omega)} \underline{V}_e$ représente l'amplitude complexe de la f.é.m. du générateur de Thévenin équivalent au circuit du point de vue de ses bornes de sortie A et B.

7. On obtient l'impédance interne $\underline{Z}_{Th}$ du générateur de Thévenin équivalent au circuit du point de vue de ses bornes de sortie A et B en éteignant la source $v_e(t)$. Il en résulte le schéma ci-contre d'où on déduit :

$$\left| \underline{Z}_{Th} = \frac{R}{2} + \frac{r}{1 + j r C \omega} \right|$$

8. Le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est :

$$\varphi_1 = \arg(\underline{T}_1(j\omega)) = \arg\left(\frac{1 - j r C \omega}{2(1 + j r C \omega)}\right)$$

Or, les nombres complexes $(1 - j r C \omega)$ et $(1 + j r C \omega)$, conjugués, ont des arguments opposés. Il vient alors :

$$\left| \varphi_1 = 2 \arg(1 - j r C \omega) = -2 \arctan(r C \omega) \right|$$

9. Avec $\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ on aura $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ si on donne à r la valeur r_0 telle que :

$$\left| r_0 = \frac{1}{C \omega} = 10^3 \text{ }\Omega \right|$$

10. On remplace le montage en pont par son générateur de Thévenin équivalent dans l'hypothèse où $r = r_0$.

Dans ce cas le même courant traverse la résistance $R_u = \frac{R}{2}$ et l'impédance $\underline{Z}_{Th}$ qui constituent un diviseur de tension. Compte tenu que $r_0 = \frac{1}{C \omega} = R$ on a donc :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{E}_{Th}}{1 + \frac{2 \underline{Z}_{Th}}{R}} = \frac{1 - 3j}{20} \underline{V}_e$$

Il en résulte que la tension de sortie présente, par rapport à la tension d'entrée, un déphasage :

$$\left| \varphi'_1 = \arg(1 - 3j) = -\arctan 3 = -71,6^\circ \right|$$

11. On considère que l'A.O. est idéal ($i_+ = i_- = 0$) et fonctionne en régime linéaire ($v_+ = v_-$). On applique le théorème de Millman respectivement aux entrées inverseuse et non inverseuse, soit :

$$\underline{V}_- = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(\frac{\underline{V}_e}{R_2} + \frac{\underline{V}_s}{R_1} \right), \quad \underline{V}_+ = \frac{\underline{V}_e}{1 + j r C \omega}$$

On en déduit la fonction de transfert du montage :

$$\left| \underline{T}_2(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R_1 - j r R_2 C \omega}{R_1 (1 + j r C \omega)} \right|$$

12. Pour que $|T_2(j\omega)| = 1$ il faut que numérateur et dénominateur soient des nombres complexes conjugués. Cette condition sera remplie si :

$$R_1 = R_2$$

13. Dans ce cas on a : $T_2(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}$. Il en résulte que la tension de sortie présente, par rapport à la tension d'entrée, un déphasage :

$$\varphi_2 = 2 \arg(1 - jrC\omega) = -2 \arctan(rC\omega)$$

Ce montage constitue un **déphaseur pur**.

Optique géométrique.

14. En utilisant les formule de Descartes il vient :

$$-\frac{1}{O_1A_o} + \frac{1}{O_1A_i} = \frac{1}{f_1}, \quad G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A_o}}$$

Par élimination de $\overline{O_1A_i}$ entre ces deux relations on obtient :

$$\overline{O_1A_o} = f_1 \left(\frac{1}{G_t} - 1 \right) = -20\text{cm}$$

L'objet, réel, se trouve donc dans le plan focal image de la lentille divergente.

15. La position de l'image est telle que :

$$\overline{O_1A_i} = G_t \overline{O_1A_o} = -10\text{cm}$$

Elle est donc **droite et virtuelle**.

16. L'image virtuelle $\overline{A_iB_i}$ donnée par L_1 sert d'objet réel pour L_2 qui en donne une image réelle nette sur l'écran. De la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{O_2A_i} + \frac{1}{O_2E} = \frac{1}{f_2}$$

on déduit, compte tenu que $\overline{O_2E} = 2f_2$:

$$\overline{O_2A_i} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_i} = \frac{f_2 \overline{O_2E}}{\overline{O_2E} - f_2} = 2f_2$$

Il en résulte que :

$$\overline{O_1O_2} = 70\text{cm}$$

Remarque. $\overline{O_2E} = 2f_2$ montre que l'écran est dans le plan antiprincipal image de L_2 . Pour observer une image nette sur cet écran il faut que l'objet $\overline{A_iB_i}$ se trouve dans le plan antiprincipal objet de L_2 soit $\overline{O_2A_i} = -2f_2$. On en déduit évidemment $\overline{O_1O_2} = 70\text{cm}$. Notons que dans cette géométrie le grandissement transversal dû à la lentille convergente est, par définition des plans antiprincipaux, $G'_t = -1$.

17. Le système (L_1, L_2) doit être **afocal** soit $F_{i1} = F_{o2}$. La distance entre les centres optiques des deux lentilles est alors :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_{i1}} + \overline{F_{o2}O_2} = f_1 + f_2 = 20\text{cm}$$

18. Le grandissement d'un système afocal est $G_t = -\frac{f_2}{f_1}$ donc le rapport des diamètres des faisceaux émergent et incident est tel que :

$$\frac{D}{d} = -\frac{f_2}{f_1} = 2$$

Thermodynamique : pompe à chaleur.

19. Au cours d'un cycle élémentaire réversible la machine fonctionne en pompe à chaleur si elle :

♦ prélève de la chaleur à une source froide, $\delta Q_f > 0$ (transformation isotherme $D \rightarrow C$) ;

♦ cède de la chaleur à une source chaude, $\delta Q_c < 0$ (transformation isotherme $B \rightarrow A$).

Le cycle doit donc être parcouru dans le sens ADCBA. L'aire algébrique de la surface limitée par le cycle orienté représente l'opposé du travail reçu par l'agent thermique ; ici $\delta W > 0$.

Au cours du premier cycle élémentaire réversible les deux premiers principes de la thermodynamique conduisent à écrire :

$$\delta Q_c + \delta Q_f < 0 \rightarrow |\delta Q_c| > \delta Q_f, \quad \frac{\delta Q_c}{T(0)} + \frac{\delta Q_f}{T_{\text{ext}}} = 0 \rightarrow |\delta Q_c| = \frac{T(0)}{T_{\text{ext}}} \delta Q_f$$

Ces relations sont vérifiées si $T(0) > T_{\text{ext}}$.

20. Au cours d'un cycle élémentaire réversible on a, d'après les deux principes de la thermodynamique :

$$\delta W = -(\delta Q_c + \delta Q_f), \quad \delta Q_f = -\frac{T_{\text{ext}}}{T(t)} \delta Q_c$$

On en déduit :

$$\delta W = -\frac{T(t) - T_{\text{ext}}}{T(t)} \delta Q_c$$

d'où l'efficacité thermique de la pompe :

$$\eta(t) = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}} > 1$$

21. Pendant la durée dt d'un cycle élémentaire l'agent thermique :

♦ reçoit un travail $\delta W = \mathcal{P} dt$;

♦ cède une quantité de chaleur $-\delta Q_c = C dT$.

L'efficacité de la pompe étant définie par $\eta(t) = \frac{-\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}}$ on en déduit l'équation différentielle

qui régit l'évolution de la température de la pièce au cours du temps :

$$\frac{dT(t)}{dt} - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}} = 0$$

Avec la condition initiale $T(0) = T_0$ cette équation différentielle s'intègre en :

$$t = \frac{C}{\mathcal{P}} \left[T(t) - T_0 - T_{\text{ext}} \ln \left(\frac{T(t)}{T_0} \right) \right]$$

Ainsi, la température T_1 sera atteinte à l'instant t_1 , compté à partir de l'instant origine, tel que :

$$t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} \left[T_1 - T_0 - T_{\text{ext}} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right]$$

22. Dans l'hypothèse d'un chauffage direct de la pièce on a : $\mathcal{P} dt = C dT$. Dans ce cas la température T_1 sera atteinte à l'instant t_2 , compté à partir de l'instant origine, tel que :

$$t_2 = \frac{C}{\mathcal{P}} (T_1 - T_0) > t_1$$

La pompe à chaleur présente donc un intérêt évident pour chauffer un local. Effectivement, pour une puissance dépensée identique, la pompe à chaleur apporte une quantité de chaleur η fois plus grande à la source chaude qu'un chauffage direct.

23. On suppose qu'à l'instant où la température de la pièce est $T_1 = 295 \text{ K}$ on arrête la pompe à chaleur ; cet instant sera pris comme nouvelle origine du temps.

Entre deux instants voisins, t et $t + dt$, la température du local varie de $dT < 0$ ce qui correspond, en supposant la pression constante, à une variation d'enthalpie : $dH = C dT$. Pendant la même durée l'enthalpie reçue à travers la paroi du local est : $\delta H_r = \delta Q = -kC(T(t) - T_{\text{ext}}) dt$.

Le bilan énergétique nous conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT(t)}{dt} + k(T(t) - T_{\text{ext}}) = 0$$

Compte tenu que $T(0) = T_1$ cette équation s'intègre en :

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_1 - T_{\text{ext}}) \exp(-kt)$$

On en déduit la constante k , homogène à l'inverse d'un temps :

$$k = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{T_1 - T_{\text{ext}}}{T - T_{\text{ext}}} \right) = \frac{1}{10,8 \cdot 10^3} \ln \left(\frac{5}{2} \right) = 84,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

24. On reprend la même démonstration qu'à la question 21 mais ici la quantité de chaleur cédée à la source chaude est : $-\delta Q_c = C dT - kC(T(t) - T_{\text{ext}}) dt$.

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dT(t)}{dt} + k(T(t) - T_{\text{ext}}) - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}} = 0$$

La température de la pièce atteint sa valeur maximale T_{max} lorsque, au bout d'un certain temps, un régime stationnaire s'installe. L'énergie thermique apportée par la pompe sert alors uniquement à compenser les pertes par fuite thermique qui augmentent avec l'écart de température entre le local et le milieu extérieur. Dans ce cas l'équation différentielle précédente se réduit à :

$$k(T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}) - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}} = 0$$

soit encore :

$$T_{\text{max}}^2 - 2 \left(T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{2kC} \right) T_{\text{max}} + T_{\text{ext}}^2 = 0$$

Électrostatique.

25. La charge électrique totale du noyau est :

$$Q = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r^2 dr = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$$

C'est d'ailleurs la seule solution homogène proposée.

26. Le champ électrique $\mathbf{E}$, **vecteur vrai**, appartient aux plans de symétrie de la distribution de charge et est orthogonal aux plans d'antisymétrie de cette même distribution. Ainsi, dans le cas proposé, on a $\mathbf{E}(\mathbf{P}) = E(r)\mathbf{u}_r$: le champ électrique est radial et ne dépend que de la distance $r = OP$ du centre de la distribution au point considéré.

27. A l'extérieur de la distribution, c'est-à-dire pour $r > a$, tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle Q placée en O. Il en résulte donc un champ électrique :

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

28. A l'intérieur de la distribution on applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique Σ de centre O et de rayon $r < a$. Il vient :

$$4\pi r^2 E_{\text{int}}(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right) r'^2 dr' = 4\pi \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right)$$

On en déduit :

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{P}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \mathbf{r}$$

Notons que le champ électrique est continu en $r = a$ compte tenu de l'absence de charges superficielles.

29. Champ et potentiel sont liés par $\mathbf{E} = -\nabla V$, soit pour $r > a$: $\mathbf{E}_{\text{ext}}(r) = -\frac{dV_{\text{ext}}(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$. Compte tenu de la condition aux limites $\lim_{r \rightarrow +\infty} V_{\text{ext}}(r) = 0$, on en déduit par intégration :

$$V_{\text{ext}}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}$$

30. On effectue le même raisonnement pour $r < a$ ce qui nous donne par intégration :

$$V_{\text{int}}(P) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + K'$$

On détermine la constante K' en utilisant la continuité du potentiel en $r = a$, d'où $K' = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0}$. En définitive

il vient :

$$V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right)$$

Magnétostatique.

31. Tous les plans contenant l'axe Oz sont plans d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le champ magnétique $\mathbf{B}$, **pseudo vecteur**, appartient à ces plans donc à leur intersection. Il en résulte qu'en tout point M de l'axe Oz , $\mathbf{B}(M)$ est porté par cet axe.

Le plan xOy est plan de symétrie pour la distribution de courant. $\mathbf{B}(P)$ est alors orthogonal à ce plan en tout point P de celui-ci.

32. C'est un résultat classique du cours, soit :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z$$

33. On a $(z_M - z) \tan \alpha = R$ qui nous donne, en prenant sa dérivée logarithmique :

$$\frac{d\alpha}{\tan \alpha \cos^2 \alpha} - \frac{dz}{z_M - z} = 0$$

On en déduit aisément :

$$dz = \frac{z_M - z}{\tan \alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

34. Si on note n le nombre de spires par unité de longueur on a $n = \frac{N}{L}$ d'où le nombre de spires contenues dans un élément de longueur dz de solénoïde :

$$dN = n dz = \frac{N}{L} dz$$

35. L'élément de longueur dz de solénoïde peut être considéré comme une spire circulaire plane de rayon R , centrée à la cote z et parcourue par le courant d'intensité $di = I dN$. Elle crée donc en M le champ magnétique élémentaire :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha dN \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 NI}{2L} \sin \alpha d\alpha \mathbf{e}_z$$

On obtient, par intégration, le champ magnétique total créé en ce point par le solénoïde, soit :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \mathbf{e}_z$$

36. Pour un solénoïde infini, comportant $n = \frac{N}{L}$ spires circulaires par unité de longueur, on a $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$. On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{B}_\infty(\mathbf{M}) = \mu_0 n I \mathbf{e}_z}$$

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini et nul à l'extérieur. C'est un résultat qui fait partie des connaissances de base de la magnétostatique.